Conceptele figurale

E. FISCHBEIN

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

E. FISCHBEIN

CONCEPTELE FIGURALE

Cercetări teoretice şi experimentale asupra naturii entităţilor geometrice şi a evoluţiei lor în ontogeneză

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
1963

Scanned with OKEN Scanner

CUVÎNT ÎNAINTE

Lucrarea de faţă porneşte de la un studiu de psihologie genetică. Problema pe care ne-am pus-o a fost aceea de a urmări evoluţia în ontogeneză a unor noţiuni geometrice fundamentale, cum sînt punctul, linia, dreapta, sistemul de coordonate, locul geometric etc., noţiuni cu care copilul intră în contact şi în practica sa curentă, şi, sistematic, în procesul de învăţămînt.

Ocupîndu-ne de aceste domenii, ne-am dat seama că avem de-a face cu o clasă de entităţi mintale distincte care nu puteau fi reduse nici la reprezentări, nici la concepte propriu-zise: figurile geometrice. Figurile geometrice sînt abstracţii, sînt reflectări ideale ale unor proprietăţi spaţiale obiective (se înţelege, nu este vorba de *desenul geometric,* care este o construcţie materială, ci de entităţile care intră în lanţul raţionamentului geometric). Aceste abstracţii dobîndesc o serie de proprietăţi conceptuale — esenţialitate, generalitate, puritate, invarianţă etc. —, fără a-şi pierde totuşi intuitivitatea, faptul de a fi reflectări intuitive ale formelor spaţiale obiective.

Şi astfel am ajuns să ne punem şi o serie de alte probleme care depăşeau cu mult limitele studiului nostru genetic. De ce tocmai în domeniul geometriei găsim asemenea entităţi ? Sau poate este vorba, de fapt, de o clasă mai vastă care-şi are reprezentanţi şi în alte domenii? Astfel s-a născut prima parte a

Scanned with OKEN Scanner

lucrării noastre, în care încercăm să rezolvăm, de pe poziţiile filozofiei marxist-leniniste, problema naturii entităţilor geometrice. Aceste preocupări ne-au dus la consideraţii asupra spaţiului ca obiect de cercetare ştiinţifică, asupra evoluţiei istorice a ideii de spaţiu, asupra reflectării empirice a spaţiului, la consideraţii asupra relaţiilor dintre concept şi imagine în procesul gîndirii.

Cercetările experimentale de psihologie genetică, expuse în partea a doua a lucrării noastre, au fost organizate şi interpretate în baza rezultatelor acestei analize teoretice.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA I

CAPITOLUL I

GÎNDIREA MATEMATICĂ ŞI DOMENIILE DE LEGITATE

Obiectul de investigaţie al matematicianului nu este niciodată un obiect material, ci o *abstracţie*. În domeniul matematicilor, abstracţia nu e numai un atribut al procedeelor de investigaţie, nu e numai un mod de prezentare a rezultatelor obţinute; abstracţia este chiar obiectul investigaţiei. Ceea ce sînt pentru chimist apa, fierul, aerul, ceea ce sînt pentru fiziolog nervul, muşchiul, sîngele animalului studiat, pentru matematician sînt numerele, figurile sau simboluri ale acestora. Pentru geometru este indiferent dacă e vorba de figuri decupate în carton, de figuri desenate sau de figuri pur şi simplu reprezentate, imaginate. Substanţa care le serveşte ca suport este absolut indiferentă pentru proprietăţile intrinseci ale figurii. Putem spune acelaşi lucru despre o proprietate cum este de pildă, culoarea ? Şi culoarea unui corp poate fi gîndită independent de corpul respectiv. Îmi pot imagina culoarea roşie sau pot gîndi ideea de culoare. Dar nici un fel de investigaţie reală, productivă nu poate fi întreprinsă dacă nu ne ocupăm de culoare ca fenomen material obiectiv, deci de substanţe colorate, de radiaţii de diferite culori.

Pentru ca să aflăm proprietăţile triunghiului nu numai că nu avem nevoie să ne ocupăm de un obiect triunghiular, dar, în fond, nici nu ne este permis să avem în vedere un asemenea obiect în raţionamentele noastre.

Dar dacă entităţile matematice, obiectele investigaţiei matematice sînt abstracţii şi nu obiecte materiale, mai putem noi considera că investigaţia matematică este o investigaţie ştiinţifică în sensul deplin al cuvîntului, adică o investigaţie ale cărei rezultate duc, în cele din urmă, la o mai profundă cu-

Scanned with OKEN Scanner

noaştere a realităţii obiective, la o mai deplină stăpînire a realităţii de către om?

La aceasta ne răspunde întreaga istorie a matematicii, întreaga istorie a ştiinţelor şi a civilizaţiei umane. Progresul tehnicii mondiale, progresul ştiinţelor în ansamblul lor nu ar fi fost posibile fără uriaşa dezvoltare a disciplinelor matematice. Aşadar, nu poate fi vorba doar de originile practice ale matematicii sau de simple contingenţe, mai mult sau mai puţin temporare, ale matematicii cu activitatea practică a oamenilor. Adevărurile matematicii în genere şi implicit ale geometriei sînt direct sau indirect, mai devreme sau mai tîrziu aplicabile în activitatea practică, utile în activitatea practică, confirmate în activitatea practică; toate acestea înseamnă că, deşi entităţile matematice sînt abstracţii, investigaţia matematică este departe de a fi o construcţie fantezistă, arbitrară, indiferentă faţă de realitatea obiectivă. Poate că e nevoie să precizăm din nou : în toate domeniile ştiinţei, cercetătorul operează cu abstracţii, din înlănţuirea cărora îşi construieşte raţionamentele. Dar pentru matematician abstracţiile formează chiar obiectul său de cercetare şi nu numai un instrument de lucru sau un mod de exprimare a rezultatelor. „...Matematica — scrie A. D. Aleksandrov, — care studiază proprietăţile generale făcînd total abstracţie de fenomenele concrete, consideră înseşi aceste sisteme de abstracţii în generalitatea lor abstractă, indiferent de limitele aplicabilităţii lor la diversele fenomene concrete. Putem spune că matematica se caracterizează printr-un fel de absolutizare a abstracţiilor ei“ [1].

Dacă înseşi obiectele de cercetare ale matematicii sînt abstracţii, cum se realizează contactul investigaţiei matematice cu realitatea? Problema este deosebit de complexă. Explicaţia fundamentală este cea pe care ne-o oferă filozofia materialist-dialectică : *abstracţiile matematicii sînt ele înseşi reflectări ale realităţii obiective.*“ ...în matematica pură — scrie Engels — intelectul nu se ocupă în nici un caz, numai cu propriile sale creaţii şi imaginaţii. Noţiunile de număr şi figură nu sînt luate de nicăieri de cît numai din lumea reală, şi nu de altundeva. Cele zece degete cu ajutorul cărora oamenii au învăţat să numere, adică să efectueze prima operaţie aritmetică, sînt orice vreţi numai nu o creaţie independentă a intelectului.

[1] *Matematica, conţinutul, metodele şi importanţa ei*, vol. I, Edit. ştiinţifică, 1960, p. 91.

Pentru a număra e nevoie nu numai de obiecte care să se poată număra, dar şi de capacitatea de a face abstracţie în considerarea acestor obiecte de toate celelalte însuşiri ale lor în afară de număr, iar această capacitate este rezultatul unei îndelungate dezvoltări istorice bazate pe experienţă. Ca şi noţiunea de număr, şi noţiunea de figură este luată exclusiv din lumea exterioară şi nu s-a născut în cap din gîndirea pură. Trebuie să fi existat obiecte care să aibă anumite forme pe care omul să le compare între ele, înainte de a fi putut ajunge la noţiunea de figură. Matematica pură are drept obiect formele spaţiale şi raporturile cantitative ale lumii reale, adică un material foarte real. Faptul că acest material apare într-o formă extrem de abstractă nu poate să ascundă decît superficial proveniența lui din lumea exterioară. Pentru a putea cerceta aceste forme şi raporturi în puritatea lor, e necesar ca ele să fie complet despărţite de conţinutul lor, care trebuie neglijat ca ceva indiferent..." [1].

Prin acest proces de abstractizare, contactul cu realitatea nu este rupt. „Gîndirea — ne învaţă Lenin —, pornind de la concret la abstract, nu se îndepărtează — dacă este *justă* N. B. (iar Kant, ca şi toţi filozofii, vorbeşte despre gîndirea justă) — de adevăr, ci se apropie de el. Abstracţia *materie, lege* a naturii, abstracţia *valoare* etc., într-un cuvînt *toate* abstracţiile ştiinţifice (juste, serioase, nu absurde), reflectă natura mai profund, mai exact, mai *complet*" [2].

Abstracţiile matematice — de la cele elementare, numerele şi figurile, pînă la cele mai complexe — nu sînt ficţiuni, nu sînt creaţii arbitrare ale intelectului. Ele reflectă, deşi într-o formă schematizată, purificată, idealizată şi adeseori foarte complicată, aspecte ale realităţii obiective. Caracterul lor idealizat este, în fond, o condiţie a generalităţii lor, a capacităţii lor de a reflecta realitatea „mai profund, mai exact, mai complet".

„Această idealizare — scrie G. I. Ruzavin — este cea care ne ajută să punem în evidenţă proprietăţile esenţiale menţionate, în forma lor pură... Trebuie menţionat că în toate noţiunile matematice sînt reflectate proprietăţi care nu aparţin numai unui singur obiect, ci unei infinităţi de obiecte diferite. Astfel cînd vorbim despre linia dreaptă, putem înţelege prin

[1] F. Engels, *Anti-Dühring*, ed. a 3-a, Buc., E.S.P.L.A., 1955, p. 47—48.
[2] V. I. Lenin, *Caiete filozofice*, Bucureşti, E.S.P.L.P., 1956, p. 140.

ea atît hotarul unui lot de pămînt, cît şi drumul unei raze luminoase şi multe alte fenomene. În noţiunea geometrică însă luăm aceste fenomene nu în întregul ansamblu al proprietăţilor lor, ci doar sub un singur aspect, anume sub aspectul întinderii unidimensionale. Prin urmare, noţiunile matematice reflectă, la fel ca toate celelalte noţiuni, relaţiile reale ale lucrurilor, însă cu o anumită aproximaţie. Ele iau realitatea în linii mari, o schematizează, însă în modul acesta se ajunge ulterior la o cunoaştere mai completă şi mai profundă a lucrurilor decît în cunoaşterea senzorială“ [1].

Teza că abstracţiile matematice sînt, în ultimă instanţă, reflectări ale realităţii nu trebuie înţeleasă în mod simplist. Chiar cele mai elementare abstracţii, ca numerele şi figurile geometrice, sînt rezultatul unui îndelungat proces istoric de confruntare, analiză, generalizare şi abstractizare. Noţiunile matematice reflectă realitatea nu ca entităţi izolate, ci în conexiunile şi interdependenţele lor.

Numerelor complexe, de pildă, nu le corespund direct obiecte ale realităţii. Dar numerele complexe nu s-au născut dintr-un joc arbitrar al imaginaţiei. Ele sînt rădăcini ale unor ecuaţii, anulează anumite funcţii. Asemenea funcţii apar adeseori ca imagini ale unor interdependenţe obiective, reale în diferite domenii ale fizicii (teoria zborului avionului, teoria propagării căldurii într-o placă, teoria cîmpului electric plan, teoria elasticităţii. N. E. Jukovski, creatorul aerodinamicii moderne, a obţinut renumita sa teoremă asupra portanţei aripii de avion cu ajutorul funcţiilor de o variabilă complexă) [2].

G. I. Ruzavin scrie pe drept cuvînt: „Considerînd abstracţia ca treaptă determinată în cunoaştere, mai trebuie să ţinem seama că fiecare abstracţie, reflectînd o anumită latură a realităţii, nu poate fi înţeleasă corect dacă o luăm în afara legăturii ei cu alte abstracţii“ [3].

Se constituie o întreagă ierarhie de concepte integratoare din ce în ce mai abstracte, cu o sferă din ce în ce mai cuprin-

---

[1] G. I. Ruzavin, *Despre natura abstracţiei matematice*, în „Voprosî filosofii“, 1960, nr. 9, 87—104.

[2] Vezi în acest sens M. V. Keldîş, *Funcţii de o variabilă complexă*, în „Matematica“, vol. II, p. 235—282, şi S. V. Vonsovski şi G. A. Kursanov, *Despre rolul matematicii în dezvoltarea fizicii moderne*, în „Voprosî filosofii“, 1958, nr. 9, p. 87—104.

[3] G. I. Ruzavin, *op. cit.*, p. 163.

zătoare. Noţiunile de grup, corp, inel, latice, sintetizează clase vaste de entităţi matematice.

★

Aşadar, matematica, la fel ca toate domeniile ştiinţei, reprezintă în structura şi în dinamica ei internă o modalitate de reflectare a realităţii obiective. Numai aşa se poate explica faptul că rezultatele investigaţiilor matematice se dovedesc, mai devreme sau mai tîrziu, aplicabile în activitatea practică a oamenilor.

Dar, aşa cum am arătat, abstracţiile nu sînt pentru matematician doar verigi, doar momente ale investigaţiei sale, ci obiectele înseşi ale acestei investigaţii.

Această particularitate are ca urmare un fapt extrem de important: posibilitatea axiomatizării integrale a diferitelor domenii ale matematicii. Operînd numai cu abstracţii, elaborate deci independent de un conţinut concret, dezvăluind diferite proprietăţi şi interdependenţe ale acestor abstracţii, matematicianul poate reconstitui ansamblul rezultatelor sale într-o formă logică-deductivă în care stringenţa inferenţelor nu mai este condiţionată de verificări practice succesive, ci de însăşi structura logică a raţionamentelor folosite. Pornind de la o serie de axiome fundamentale, matematicianul poate obţine *deductiv*, printr-un şir mai simplu sau mai îndelungat de raţionamente, ansamblul propoziţiilor dintr-un domeniu al matematicii, propoziţii care, oricît de depărtate ar fi de axiomele iniţiale, rămîn adevărate.

Şi astfel se deschide o problemă extrem de importantă pentru filozofia ştiinţelor. Ce atribute posedă această vastă categorie de abstracţii datorită cărora este posibilă desprinderea totală de obiectul concret în cursul cercetării ştiinţifice (fără ca prin această desprindere să ajungem la ficţiuni)?

De ce nu este acest lucru posibil şi pentru fizician, chimist, biolog etc. ? Doar şi aceşti oameni de ştiinţă utilizează abstracţii, care şi ele reflectă realitatea.

★

Conceptele folosite de gîndirea ştiinţifică reflectă, mai mult sau mai puţin indirect, diverse aspecte, proprietăţi ale obiectelor şi fenomenelor din realitatea obiectivă. Aceste proprietăţi se reflectă în gîndire în urma unui proces de analiză, de izolare, de abstractizare din complexul real al fenomenelor.

Scanned with OKEN Scanner

Datorită acestui fapt, noi putem raţiona asupra unui fenomen sau şir de fenomene reale, ajungînd astfel să descoperim, printr-un proces mintal, proprietăţi obiective necunoscute înainte. De fapt, în mod obiectiv, întreaga realitate este subordonată principiului conexiunii. Fenomenele realităţii obiective se află într-o inepuizabilă interdependenţă. Dar în acest complicat peisaj al realităţii, omul de ştiinţă izbuteşte să distingă contururile unor *domenii de legitate* în interiorul cărora interdependenţele ating o mare densitate: sînt mai bogate, mai variate, mai stabile.

Pe de altă parte, domeniile de legitate nu sînt izolate între ele. Ele se prezintă structurate într-o vastă ierarhie de domenii suprapuse.

S. L. Rubinştein descrie în felul următor acest sistem ierarhic de legităţi: „Întrucît conexiunea universală a fenomenelor se compune dintr-o serie de sfere de interacţiune ierarhic suprapuse, se naşte în mod necesar întrebarea: care este raportul reciproc dintre sfere?

Datele ştiinţifice actuale ne permit să afirmăm că legile mai generale ale sferelor «inferioare» îşi păstrează valabilitatea pentru toate sferele «superioare». În acelaşi timp, extinderea legilor generale ale sferelor «inferioare» asupra sferelor care au un caracter mai particular nu exclude existenţa legilor specifice ale acestora. În fiecare sferă specială de fenomene, în fiecare sferă de interacţiune acţionează şi legile generale, şi cele particulare. Astfel stînd lucrurile, se naşte întrebarea: ce se întîmplă cu legităţile generale, cum sînt cele fizico-chimice, la trecerea spre fenomene cu un caracter mai special, cum sînt cele biologice? Răspunsul este următorul: probabil că în această situaţie, schimbîndu-se condiţiile în care acţionează legile generale, se schimbă şi efectul acţiunii lor, însă legile ca atare îşi păstrează valabilitatea“ [1].

Psihologia a neglijat, în general, faptul extrem de important că gîndirea, în funcţia ei de cunoaştere *eficientă* a realităţii, trebuie să-şi adapteze mişcarea acestui sistem obiectiv, ierarhic de legităţi. Generalizarea unei proprietăţi, odată descoperite, trebuie neapărat să ţină seama de limitele în care proprietatea se poate manifesta, de limitele legităţii respective. Raţionînd asupra unui ansamblu de fenomene, pentru ca pe

[1] S. L. Rubinştein, *Existenţă şi conştiinţă*, Bucureşti, Edit. ştiinţifică, 1960, p. 20.

baza datelor existente să putem descoperi altele, necunoscute, noi ne desprindem, temporar, de controlul nemijlocit al concretului şi operăm cu concepte, cu abstracţii. Cum putem evita ca prin construcţiile noastre mintale să nu ajungem la ficţiuni? Faptul esenţial este următorul: *gîndirea, în structura şi dinamica ei internă, tinde să reflecte însăşi această ierarhizare obiectivă a domeniilor de legitate.* Generarea raţionamentelor noastre nu seamănă cu revărsarea în toate direcţiile a unui puhoi de apă pe o suprafaţă plană. Lanţurile noastre de raţionamente, deşi parcurg trasee adeseori inedite — altfel creaţia n-ar fi posibilă — rămîn totuşi întotdeauna în interiorul unui domeniu de legitate. Traversarea hotarelor unui astfel de domeniu are loc, dar aceasta nu prin încălcarea neligitimă a unor prescripţii, ci sub forma integrării într-un alt domeniu de legitate, mai vast. În felul acesta se evită evaziunile gîndirii în ficţiune, în regiuni necontrolate. În matematica modernă, găsim, într-o formă schematizată, dar foarte limpede, un model al acestui principiu de funcţionare a gîndirii. Este vorba de conceptul de *grup* [1].

După părerea noastră, imensa fecunditate şi larga aplicabilitate a acestui concept se datoreşte tocmai faptului că el este expresia acestui principiu fundamental al gîndirii.

Orice *grup* (în sens matematic) se caracterizează prin:

a) o mulţime de *elemente*, de natură foarte diferită (numere, substituţii, transformări de figuri), dar care sînt nişte operaţii ;

b) un anumit procedeu de compunere, de îmbinare a acestor operaţii, adică, în fond, de realizare succesivă a lor.

Pentru ca *elementele* respective să formeze un grup în raport cu procedeul (sau legea) de compunere, ele trebuie să îndeplinească anumite condiţii, care constituie axiomele grupului [2].

1. Compunerea („produsul") a două elemente ale sistemului trebuie să dea întotdeauna un element perfect determinat al aceluiaşi sistem.

2. Asociativitatea: a, b, c, fiind elemente ale grupului, avem întotdeauna egalitatea:

$$(ab)c = a(bc).$$

Rezultatul compunerii este independent de paranteze.

---

[1] Vezi în această privinţă şi articolul nostru *Teoria grupurilor şi psihologia gîndirii*, în „Revista de psihologie", 1960, nr. 2.

[2] O expunere elementară a teoriei grupurilor găseşte cititorul în lucrarea lui P. S. Aleksandrov, *Introducere în teoria grupurilor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1961.

Scanned with OKEN Scanner

3. Printre elementele sistemului există unul singur care, compus cu un altul, îl lasă neschimbat. Acesta se numeşte elementul neutru.

4. Pentru fiecare element există întotdeauna, în cadrul sistemului, un element invers. Produsul unui element cu inversul său ne dă elementul neutru.

Faptul esenţial este că grupul matematic este o *familie* de elemente sau operaţii, avînd o anumită solidaritate între ele. Compunînd două elemente (sau operaţii) ale grupului după o anumită lege de compunere, obţinem întotdeauna tot un element al grupului, *nu trecem dincolo de hotarele domeniului*. Aşa, de exemplu, mulţimea numerelor întregi, pozitive şi negative faţă de operaţia de adunare formează un grup, un domeniu relativ închis. (Un număr trebuie considerat, în esenţă, ca o operaţie, iar adunarea a două numere ca realizarea succesivă a două operaţii. Rezultatul adunării „şapte plus opt" înseamnă, în fond, a număra întîi şapte şi apoi încă opt). În orice fel am aduna două numere întregi pozitive sau negative, nu obţinem altceva decît tot un număr întreg, pozitiv sau negativ, rămînem deci în interiorul domeniului. În felul acesta dispunem de un domeniu în care gîndirea are infinite posibilităţi de mişcare fără riscul de a ajunge la construcţii necontrolate.

Asociativitatea, axioma elementului neutru, axioma elementului invers sînt prescripţiile fundamentale ale diverselor modificări permise în mişcarea gîndirii, fără riscul de a se depăşi domeniul. Aceste prescripţii sînt, în fond, extrem de largi şi lasă posibilităţi infinite de mişcare.

Dacă dintre numerele întregi considerăm numai numerele pare, constatăm că şi ele formează un grup în raport cu aceeaşi lege de compunere, adunarea. (Două numere pare, oricare ar fi ele, adunate dau tot un număr par etc.). Numerele pare formează un *subgrup* al numerelor întregi. La rîndul lor, numerele întregi formează un subgrup al domeniului mai larg al numerelor raţionale. Avem deci de-a face cu un *lanţ ascendent de subgrupuri* [1], cu domenii din ce în ce mai vaste, *suprapuse ierarhic*.

În felul acesta, necesitatea ca gîndirea să nu se mişte decît în interiorul unor domenii controlate, definite nu duce de loc la înăbuşirea libertăţii ei de mişcare. Domeniul mai

[1] A. G. Kuroş, *Teoria grupurilor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959, p. 35.

larg nu reprezintă pur şi simplu o sumă de domenii subordonate, ci este el însuşi expresia unui principiu propriu care-l defineşte şi care oferă în acelaşi timp gîndirii, posibilităţi mai ample de mişcare. Am putea vorbi de un principiu de *disciplină a gîndirii,* care, fără a-i înăbuşi libertatea de mişcare, asigură menţinerea ei în limitele oglindirii realităţii.

Toate acestea înseamnă că grupul exprimă, în fond, *un domeniu de legitate.*

Pentru ca operaţiile (denumite „elemente") efectuate cu diferite obiecte să poată fi „compuse" în aşa fel încît să se obţină o operaţie („element") de aceeaşi natură, este necesar ca *obiectele asupra cărora operaţiile respective se exercită să posede anumite proprietăţi invariante în raport cu acele operaţii.*

Aşa este, de pidă, ansamblul transformărilor efectuate asupra a două variabile x, y şi care lasă invariantă o funcţie dată $F(x, y)$ a acestor două variabile (între variabilele x, y şi transformatele lor x', y' avem relaţia $F(x', y') = F(x, y)$. Toate proprietăţile enunţate de geometria elementară cu privire la o figură rămîn valabile dacă supunem figura unor translaţii, rotaţii sau simetrii. Aceste deplasări, aceste transformări ale figurii formează un grup : grupul *Gm* al mişcărilor spaţiului. „Un grup — spune Georges Bouligand, — este un domeniu de cauzalitate, în sensul că anumite ipoteze (sau cauze) invariante pentru modificările grupului dau naştere unor concluzii (sau efecte) care se păstrează pentru aceste modificări" [1].

Teoria grupurilor, creată de Evariste Galois (1830) în legătură cu rezolvarea ecuaţiilor algebrice, şi-a dovedit marea utilitate, oferind profunde posibilităţi de sistematizare, în special în geometrie (Sophus Lie şi Felix Klein), dar şi într-o serie de alte domenii, ca teoria ecuaţiilor diferenţiale, fizica, mecanica cuantică, teoria relativităţii.

După H. Poincaré, adept al kantianismului, „conceptul general de grup preexistă în spiritul nostru cel puţin potenţial. El ni se impune nu ca o formă a sensibilităţii noastre, ci ca o formă a intelectului" [2].

Este limpede că poziţia idealistă aprioristă adoptată de acest gînditor este absolut falsă, contrazisă de toate datele şti-

---

[1] G. Bouligand, *Premières leçons sur la théorie générale des groupes,* Paris, Vuibert, 1935, p. 3.

[2] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse,* Paris, Flammarion, 1906, p. 90.

inţelor. Nici una dintre aşa-zisele forme ale sensibilităţii sau intelectului nu s-a dovedit absolută şi imuabilă. Ideile noastre de spaţiu, timp, cauzalitate etc. nu sînt decît oglindiri ale realităţii obiective, susceptibile de a se modifica şi completa pe măsură ce cuceririle ştiinţei descoperă noi aspecte ale realităţii.

Teza susţinută de noi, în opoziţie cu concepţia idealistă, este aceea că conceptul de grup îşi datorează imensa valoare ştiinţifică faptului că exprimă un principiu fundamental de mişcare a gîndirii în cunoaşterea realităţii obiective [1].

Înaintarea creatoare a gîndirii se realizează pe domenii definite, care constituie reflectarea domeniilor de legitate obiectivă, ierarhic suprapuse. Acesta este unul dintre mijloacele cele mai importante prin care se realizează *controlul intern* al mişcării gîndirii. Controlul intern este însă subordonat *controlului extern*, reprezentat de *verificarea prin practică.*

Să luăm un exemplu. Constatăm că un lichid oarecare, de pildă alcool, introdus într-un tub se dilată dacă îi ridicăm temperatura. Orice previziune am vrea să facem în această privinţă este necesar să stabilim, în prealabil, *domeniul de legitate al fenomenului*, ceea ce înseamnă să stabilim *o proprietate, o relaţie invariantă în raport cu diferite condiţii.* Principalul invariant va fi în acest caz relaţia de proporţionalitate dintre creşterea de volum Δ_v şi doi factori: volumul iniţial (V_0) şi creşterea temperaturii $(t_2 - t_1)$. O asemenea relaţie de proporţionalitate implică şi un factor constant, un coeficient de proporţionalitate. Relaţia devine astfel:

$$\Delta_v = \mu V_0 t.$$

Posedînd această formulă, noi putem prevedea prin gîndire cu ce cantitate se va dilata o cantitate determinată de alcool dacă dăm temperaturii o creştere determinată. Putem prevedea prin gîndire ce rezultat vom obţine dacă vom face alcoolul să treacă printr-o serie de modificări de temperatură. Unele elemente însă ne lipsesc. Ca să nu greşim, trebuie să cunoaştem limitele între care este valabilă relaţia. Depinde dilatarea de puritatea alcoolului, de vasul în care se află, de altitudine, de presiune, de gradul de iluminare etc. etc.? Numai după ce (prin experienţe) am putut răspunde la aceste întrebări, putem fi siguri că nu vom greşi în raţionamentele noastre (de exemplu, cînd ne propunem să construim un termometru cu alcool). Prin aceasta am stabilit un *domeniu de legitate, care, după cum vedem, este un domeniu de invarianţă.*

---

[1] Conceptul de grup a fost introdus în psihologie de J. Piaget. Asupra criticii concepţiei lui Piaget vom reveni într-un capitol ulterior.

Scanned with OKEN Scanner

Dar noi mergem mai departe. Oare toate lichidele se dilată în acelaşi mod? Ceea ce înseamnă: a) Oare toate lichidele se dilată conform unei relaţii de proporţionalitate? b) Factorul de proporţionalitate este acelaşi pentru toate lichidele? c) Condiţiile externe acţionează la fel asupra fenomenului? Prin experienţe izbutim astfel să lărgim domeniul de legitate. Constatăm întîi că aproape toate lichidele se dilată conform unei relaţii de proporţionalitate. Constatăm însă că factorul de proporţionalitate — coeficientul (μ) de dilatare — nu este acelaşi: el diferă de la un lichid la altul şi este specific fiecărui lichid. Ceea ce înseamnă că putem trece de la primul domeniu de legitate referitor la dilatarea alcoolului la domeniul mai vast, referitor la dilatarea lichidelor în general, înlocuind coeficientul determinat (0,00105), caracteristic alcoolului, cu un factor K, nedeterminat (dar determinabil pentru fiecare lichid în parte). Totuşi, domeniul de legitate nu este încă complet definit: nu toate lichidele urmează relaţia de proporţionalitate. Care lichid nu o urmează? De pildă apa. După cum se află pe cale experimentală, volumul apei scade atunci cînd este încălzită de la 0° la 4°C şi numai după aceea începe să crească. Aceste date sînt necesare pentru a se cunoaşte limitele invarianţei, limitele domeniului de legitate. Putem merge cu problema mai departe: cum se comportă gazele la ridicarea temperaturii? Cum se comportă solidele? În momentul în care putem răspunde cu precizie la aceste probleme, am stabilit un domeniu de legitate şi mai vast.

Unii factori au fost consideraţi pînă acum ca secundari în raţionamentul nostru. Am căutat *să izolăm* din ansamblul fenomenelor un *grup de fenomene* între care există o interacţiune strînsă, continuă, constantă, şi anume *volumul* şi *temperatura*.

Această *izolare* nu este un act arbitrar al spiritului. Ea reflectă o stare de fapt, obiectivă: interdependenţa profundă, constantă, legică dintre cele două fenomene reale. Totuşi, această izolare nu este absolută. În realitate, interdependenţa menţionată între volum şi temperatură este interdependentă şi cu alte fenomene. Un fenomen care trebuie luat aici în consideraţie este presiunea. Izolarea efectuată de noi are un sens obiectiv, pentru că *în mod obiectiv*, în condiţii obişnuite, *presiunea exercitată din afară este relativ constantă*. Dar presiunea nu este *întotdeauna* constantă. Variaţiile ei trebuie şi ele luate în consideraţie, lărgind însă prin aceasta domeniul de legitate considerat. Ş.a.m.d.

Şi astfel, cercetînd natura, omul de ştiinţă ia în consideraţie mereu alte fenomene, trece la domenii de legitate din ce în ce mai vaste. Termodinamica, mecanica, electricitatea etc. etc. reprezintă fiecare domenii largi de interacţiune. Ele se încadrează în domeniul şi mai cuprinzător al fizicii etc.

Scanned with OKEN Scanner

Ori de cîte ori omul de știință trebuie să rezolve o problemă, el este obligat să-și delimiteze, să-și definească sfera de preocupări, să facă abstracție de toate celelate fenomene. Gîndirea sa se va mișca pe trasee diverse, adeseori noi, originale, dar întotdeauna cu respectarea unor principii, prescripții, condiții, care delimitează domeniul de invarianță al proprietăților obiective și, respectiv, al conceptelor și legilor utilizate în raționament. Acesta este unul dintre aspectele cele mai importante ale caracterului *dialectic* al mișcării gîndirii în cunoașterea realității obiective. Conexiunea universală a fenomenelor — relevată de dialectica marxistă — nu constă într-o interinfluență haotică, amorfă. Ea este *o conexiune structurală,* cum spuneam, *pe domenii de legitate ierarhic suprapuse.*

★

Așadar gîndirea în mișcarea ei trebuie să-și delimiteze domeniul sau sistemul de domenii, definit printr-un ansamblu de proprietăți sau relații relativ invariante. Procesul acesta de delimitare nu se realizează pentru toate domeniile cu aceeași ușurință. Putem vorbi de *grade de separabilitate,* care exprimă independența mai mult sau mai puțin întinsă a unui ansamblu de proprietăți, de relații în complexul realității obiective.

Este foarte important să subliniem faptul că nu ne referim, în discuția noastră, la fenomene ca atare în desfășurarea lor concretă, ci la esențe, la relații generale, adică la ceea ce rămîne invariant în această eternă mișcare.

Aceste *grade de separabilitate* sau de *invarianță* nu sînt construcții ale spiritului, ci exprimă aspecte profunde, esențiale, structurale ale conexiunii universale a fenomenelor realității.

Acceptînd aceste considerente, credem că putem răspunde la întrebarea pusă de noi în paginile precedente: cum e posibil ca matematicianul, spre deosebire de oamenii de știință din alte domenii, să se ocupe întotdeauna în cercetarea sa de abstracții, fapt care permite axiomatizarea integrală a domeniului său, fără ca prin aceasta controlul veracității rezultatelor să se piardă ?.

Explicația cea mai generală, după cum am văzut, este aceea dată de filozofia marxistă: și abstracțiile matematice reflectă, în sistematica, în dinamica lor, realitatea obiectivă.

De ce însă îi este permis matematicianului să se ocupe exclusiv de abstracții?

Scanned with OKEN Scanner

Explicaţia acestui fapt rezidă, după noi, *în gradul de separabilitate* al domeniului de care se ocupă matematicianul. „Posibilitatea de a considera în acest mod abstract obiectul matematicii — scrie A. D. Aleksandrov — are un fundament obiectiv în însuşi acest obiect. Formele, relaţiile, conexiunile şi legile generale — independente de particularităţi calitative sau de conţinutul concret, pe care le reflectă matematica — există în mod obiectiv, independent de conştiinţa noastră. Numai existenţa numărului ca proprietate obiectivă a unei mulţimi de obiecte, *independenţa relaţiilor dintre numere faţă de particularităţile calitative ale obiectelor,* bogăţia acestor relaţii au făcut posibilă apariţia aritmeticii. Acolo unde nu există astfel de forme şi relaţii generale, indiferente faţă de conţinut, nu este posibilă nici o considerare matematică“ [1].

Domeniul numerelor, domeniul relaţiilor cantitative se relevă a fi, *în mod obiectiv,* integral separabil de ansamblul proprietăţilor obiective, şi aceasta tocmai pentru că este vorba de entităţi care fac total abstracţie de *calitate,* de determinarea internă specifică a obiectului. Numărul este o proprietate pur formală, comună unei infinităţi de mulţimi în care natura concretă a obiectelor nu este luată în consideraţie, şi deci nu sînt luate în consideraţie nici interdependenţele reciproce dintre obiectele respective“ [2].

Această independenţă a domeniului relaţiilor cantitative nu contrazice de loc legea dialectică a conexiunii universale. *În mod concret,* 3 + 5 poate să dea 8 şi poate să nu dea 8. Dacă, în timp ce punem alături de trei pahare, alte cinci pahare, un pahar cade şi se sparge, vom avea numai 7 pahare la sfîrşit.

Relaţia 3 + 5 = 8 este o relaţie formală. În această calitate, ea este întotdeauna adevărată. *Relaţia* ca atare este absolut independentă de împrejurări. Împrejurările modifică rezultatul, dar pentru aceasta trebuie să intervină în trecerea de la antecedente la rezultat. Să analizăm însă propoziţia: „Apa fierbe la 100°C“. Aici lucrurile se schimbă. Însăşi relaţia „apa la 100°C→fierbe“ este condiţionată de alţi factori (în primul rînd de presiune). La rîndul lor, relaţiile care reglementează varia-

[1] A. D. Aleksandrov, *Privire generală asupra matematicii,* în *op. cit.,* vol. I, p. 83. (Subl. ns.).

[2] „Calitatea — scrie N. F. Ovcinnikov — este determinaţia interioară a lucrului, identică cu existenţa lui. Lucrul încetează de a mai fi ceea ce este atunci cînd îşi pierde calitatea“ (N. P. Ovcinnikov, *Calitate şi însuşire,* în „Voprosî filosofii“, 1960, 6, p. 146.

ţiile de presiune sînt interdependente cu alte proprietăţi. Ceea ce înseamnă că relaţia „apa fierbe la 100°C“ este integrată într-un ansamblu de interdependenţe, din care nu poate fi separată decît prin aproximaţie.

Faptul că „trei şi cu cinci este egal cu opt“, trebuie descoperit întîi printr-o acţiune practică (aceea de a număra cele două grupe de obiecte), la fel cum este necesară o acţiune practică pentru a stabili temperatura de fierbere a apei. Dar, în timp ce, pentru a se stabili temperatura de fierbere a apei şi apoi *constanţa ei*, a fost necesar un şir de experienţe (pentru a ne asigura de „puritatea“ fenomenului), în cazul numerelor relaţia odată stabilită apare ca universală şi necesară.

Domeniul numerelor este prin însăşi natura sa, ca domeniu al relaţiilor cantitative, complet separabil din contextul celorlalte aspecte ale realităţii. Raţionamentele pe care le facem cu numerele sînt riguroase, necontrazise niciodată de fapte, pentru că numerele reprezintă entităţi „pure“, relaţiile dintre numere nu sînt interdependente cu alte aspecte ale realităţii. Numerele fiind „formă pură“, pot fi integrate total, fără reziduuri, în structura unui raţionament logic.

Logicianul sovietic E. B. Şur scrie: „Existenţa conceptelor despre proprietăţile, despre notele claselor de lucruri, care îşi păstrează întotdeauna în mod riguros un conţinut anumit, mereu acelaşi, determină şi caracterul inferenţelor deductive pe care le studiază logica formală. Specificul acestora constă în faptul că ele se deduc din cunoştinţe dinainte stabilite, fără o nouă verificare a lor în practică, fără a recurge nemijlocit la practică. În acest sens, inferenţele considerate au un caracter logic formal“ [1]. Şi mai departe: „Adevărul unor astfel de concepte şi judecăţi este determinat de faptul că ele concordă, sub un anumit aspect, cu realitatea obiectivă, că oglindesc corect anumite laturi, proprietăţi, momente ale realităţii obiective. Pe de altă parte, este clar că adevărul acestor concepte este relativ, deoarece ele sînt adevărate numai în anumite condiţii, drept care ele pot fi considerate ca avînd întotdeauna acelaşi conţinut, ca fiind constant, „etern“ adevărate, numai făcînd abstracţie de aceste condiţii“ [2].

Abstracţiile cu care operează raţionamentele noastre sînt în mod necesar rezultatul unui proces de simplificare, purificare şi

---

[1] E. B. Şur, *Teoria conceptului în logica formală şi în cea dialectică*, în „Voprosî filosofii“, 1958, nr. 3, p. 86.

[2] *Ibidem*, p. 86.

Scanned with OKEN Scanner

idealizare. Ceea ce înseamnă că ele omit anumite aspecte, laturi interdependenţe, proprii fenomenului concret. De aceea invarianţa specifică conceptului reprezintă o aproximare care se cere neîncetat corectată prin apelul la cercetarea concretă a naturii.

În cazul numerelor însă, tocmai pentru că întregul conţinut concret trebuie neglijat, păstrîndu-se numai relaţiile cantitative, asemenea reziduuri nu există. Acel aspect al unei colecţii de obiecte pe care-l numim *cantitatea* lor este oglindit integral în conceptul respectiv, *numărul*. Relaţiile dintre aceste entităţi sînt *absolut invariante* şi de aceea concluziile raţionamentelor care operează cu ele sînt şi ele absolut invariante, adică riguroase, universale.

A doua mare categorie de entităţi elementare cu care operează matematica este constituită de figurile geometrice. Figurile geometrice însă nu sînt cantitate pură cum sînt numerele. Ele sînt *cantificabile*, aşa cum se întîmplă în geometria analitică, dar, în natura lor proprie, ele cuprind un aspect obiectiv în plus în afară de cantitate, şi anume *forma*, proprietate spaţială prin excelenţă. Însăşi posibilitatea cantificării integrale a entităţilor geometrice prin analiză este o problemă care merită toată atenţia. Dar aceasta nu este decît o parte a problemei mai mari: cum este posibil ca geometria, care este un studiu al proprietăţilor spaţiale, să se constituie prin cercetarea unor *abstracţii*, cum este posibilă formalizarea şi axiomatizarea integrală a geometriei?

Este vorba şi în acest caz, după părerea noastră, de *gradul de separabilitate al domeniilor de legitate.*

Faptul că geometria a constituit primul domeniu, după cel al numerelor, care a fost integrat în sfera matematicilor nu se poate explica decît prin aceea că proprietăţile spaţiale prezintă cel mai mare grad de separabilitate din ansamblul domeniilor de legitate. Spre deosebire însă de numere, care, exprimînd raporturi cantitative pure, fac abstracţie prin însăşi esenţa lor de natura concretă a lucrurilor, proprietăţile spaţiale păstrează un anumit grad de interdependenţă cu celelalte aspecte ale realităţii, fapt dovedit de evoluţia geometriei şi a fizicii în ultimile decenii. Dar această interdependenţă nu este remarcabilă decît la scară cosmică. La nivelul dimensiunilor mijlocii şi al practicii curente, proprietăţile spaţiale apar ca total separabile, independente, invariante în raport cu ansamblul celorlalte legi care guvernează fenomenele materiale.

Scanned with OKEN Scanner

La baza desprinderii geometriei din domeniul investigaţiei experimentale şi a trecerii ei în sfera ştiinţelor abstracte, raţionale, se află convingerea generată de practica curentă privitoare la separabilitatea absolută a proprietăţilor spaţiale.

La rîndul ei, această convingere se bizuie pe concepţia spaţiului clasic, constituită istoric în legătură în special cu dezvoltarea mecanicii, concepţie sintetizată magistral în opera lui Newton.

Problema psihologică a figurii geometrice ca reflectare abstractă, idealizată a formelor spaţiale nu poate fi rezolvată decît în cadrul mai amplu al problemei filozofice (şi psihologice) a naturii spaţiului obiectiv, a reflectării acestuia în capul oamenilor.

Înainte de a aborda această problemă am socotit necesar să aducem o precizare privitoare la *entităţile geometrice ca reflectări ale unor proprietăţi.*

★

Dintre diferitele proprietăţi ale unui obiect care, *perceptiv,* marchează individualitatea lui, primul loc îl ocupă *forma.* Dacă percepem o culoare, un sunet, un miros, o atingere, este posibil ca, printr-o *asociaţie exterioară,* să ne imaginăm şi obiectul căruia îi aparţin aceste proprietăţi. Dacă însă ni se dă numai *forma,* în lipsa altor indicaţii senzoriale, ideea *obiectului* corespunzător apare nemijlocit. Forma nu apare ca o proprietate oarecare la care reprezentarea obiectului trebuie asociată din afară, ci ca obiectul însuşi, lipsit de unele proprietăţi.

Acest fenomen psihologic a avut consecinţe importante în ceea ce priveşte semnificaţia pe care au luat-o figurile geometrice în gîndirea curentă.

Ce este de fapt, strict vorbind, figura geometrică? Ea ne apare ca fiind un obiect simplificat, schematizat, sărăcit la extrem de proprietăţile sale, dar totuşi ca un obiect. Ea este gîndită ca atare. (Imaginaţi-vă o sferă, un paralelipiped sau chiar un triunghi, o dreaptă, un punct.) De aici rezultă o serie de contradicţii, imposibil de depăşit. În realitate, o analiză mai atentă ne arată că figurile geometrice — toate — nu sînt obiecte schematizate, ci reflectări ale unor *proprietăţi, însuşiri,* ceea ce este cu totul altceva, după cum culoarea, greutatea, duritatea etc. nu sînt obiecte schematizate, ci proprietăţi desprinse, izolate, abstractizate şi gîndite independent. Aceste proprietăţi de care se ocupă geometria se referă întotdeauna la *proprietăţi*

Scanned with OKEN Scanner

spaţiale, ale obiectelor. Cercul pe care-l studiază geometria nu este un obiect circular, pe care ne forţăm să ni-l imaginăm ca fiind lipsit de una dintre dimensiuni, ci o proprietate: proprietatea unui obiect de a fi circular. Linia dreaptă studiată de geometrie nu este o bară subţiată la extrem pînă a ajuns la grosimea zero — acest lucru este un nonsens (şi de acest nonsens ne izbim mereu) — ci este o *proprietate,* proprietatea rectitudinii. Punctul pe care-l studiază geometria nu este un corp minuscul lipsit de dimensiuni — şi aceasta este un nonsens —, ci este o *proprietate,* proprietate exprimînd poziţia, fără alte indicaţii.

Dar pentru că proprietăţile spaţiale, şi în special *formele,* reprezintă indicii cu cea mai mare capacitate individualizantă, ele singure, fără alt adaos, tind să se constituie — să se reconstituie mai bine zis — în *obiecte.* Aşa se face că noi gîndim nu poziţia, ci *punctul* (ca pe un obiect minuscul); nu rectitudinea, ci *linia dreaptă;* nu forma circulară, ci *cercul* etc. Aşa se face că în istoria matematicii s-a ajuns cu Euclid, să se definească prin *negaţii* figurile geometrice fundamentale: „Punctul este ceea ce nu are nici o parte" (nici o dimensiune), „linia este o lungime fără lăţime" (adică un obiect din care trebuie să renunţăm la două dimensiuni), „suprafaţa este ceea ce are numai lungime şi lăţime" etc. [1].

În realitate însă, aşa cum spuneam, entităţile geometrice nu sînt obiecte schematizate la extrem, ci reflectările unor *proprietăţi* ale acestor obiecte, proprietăţi spaţiale referitoare în esenţă la formă şi dimensiune.

Precizarea faptului că entităţile geometrice reflectă întotdeauna proprietăţi şi nu constituie imagini ale unor obiecte schematizate ne va ajuta să lămurim multe aspecte ale problemei.

★

Să revenim acum la problema reflectării spaţiului şi a relaţiilor ei cu entităţile geometrice.

Filozofia marxistă şi-a spus răspicat cuvîntul în problema naturii spaţiului şi timpului. „Admiţînd existenţa realităţii obiective, adică a materiei în mişcare, independentă de conştiinţa noastră — scrie V. I. Lenin —, materialismul trebuie să admită de asemenea în mod inevitabil şi realitatea obiectivă a timpului

[1] Euclid, *Elemente,* vol. I, Bucureşti, 1939, p. 5.

și spațiului, spre deosebire în primul rînd de kantianism, care se situează în această problemă de partea idealismului, văzînd în timp și în spațiu forme ale contemplării omenești și nu o realitate obiectivă. ...Așa cum lucrurile sau corpurile nu sînt simple fenomene, complexe de senzații, ci realități obiective care acționează asupra simțurilor noastre, tot așa spațiul și timpul nu sînt simple forme ale fenomenelor, ci forme reale, obiective, ale existenței" [1].

Așadar, concepția marxist-leninistă consideră spațiul și timpul, în primul rînd, ca forme fundamentale ale materiei în mișcare *existente obiectiv*, în afara conștiinței noastre, independent de ea. Totodată, spațiul și timpul se caracterizează prin aceea că sînt absolute. „Spațiul și timpul sînt absolute — scrie V. I. Sviderski — prin faptul că au un caracter universal, implacabil, obligatoriu în raport cu existența tuturor celorlalte forme ale materiei în mișcare. ...Înțelegerea marxistă a caracterului absolut al spațiului și timpului în sensul caracterului fundamental, universal al acestor forme este confirmată în întregime de cercetările actuale ale științei. Cercetările astronomiei și astrofizicii, pe scara a sute de milioane de ani-lumină, ca și studierea microproceselor la scări extrem de mici, tinzînd către zero, de ordinul de lungime de 10^{-13} cm și de timp de 10^{-25} s, confirmă existența în spațiu și timp a tuturor proceselor cunoscute nouă" [2].

În același timp însă, spațiul și timpul sînt *relative*. Aceasta înseamnă că, deși sînt forme obiective absolute, spațiul și timpul depind, sub raportul însușirilor lor concrete, de diferitele forme și stări ale materiei în mișcare. „Se înțelege că ambele forme de existență ale materiei — spune F. Engels — nu sînt nimic fără materie, nu sînt decît reprezentări goale, abstracții care există numai în capul nostru" [3].

Relativitatea spațiului și timpului a putut fi dezvăluită și confirmată științific numai în ultimele decenii, în urma marilor

---

[1] V. I. Lenin, *Materialism și empiriocriticism*, Edit. politică, București, 1959, p. 166.

[2] V. I. Sviderski, *Spațiul și timpul*, *București*, Ed. științifică, 1960, p. 66—67. Cartea lui Sviderski, deși de dimensiuni reduse, reprezintă o lucrare filozofică importantă, o analiză profundă și judicioasă a pozițiilor filozofiei marxist-leniniste asupra acestei importante probleme.

[3] F. Engels, *Dialectica naturii*, București, E.S.P.L.P., 1954, p. 239.

Scanned with OKEN Scanner

cuceriri ale fizicii şi astronomiei, în special în cadrul teoriei relativităţii, pentru vitezele şi dimensiunile cosmice.

Pentru experienţa obişnuită, pentru dimensiunile mijlocii, adecvate practicii curente, spaţiul şi timpul apar ca absolut independente de materia însăşi şi de însuşirile ei . Spaţiul şi timpul apar ca absolute nu numai în sensul universalităţii lor, ci şi în sensul independenţei lor de orice conţinut concret, asemenea raporturilor cantitative pure. Proprietăţile spaţiale, studiate şi descrise de geometrie, apar ca deplin izolabile, detaşabile de ansamblul celorlalte proprietăţi ale materiei.

Spaţiul, ca urmare a independenţei sale (relative) faţă de ansamblul celorlalte însuşiri concrete ale materiei, poate fi studiat — în limitele respective — în mod izolat, ca formă pură, abstractizată.

Tocmai de aceea a devenit posibil ca şi domeniul *figurilor geometrice să se constituie într-un domeniu închis (relativ), ca şi domeniul numerelor, iar geometria să se transforme dintr-o ştiinţă „experimentală", înrudită cu fizica, într-o ştiinţă raţională, matematică, încă din antichitate.*

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL II-lea

GEOMETRIA ŞI SPAŢIUL OBIECTIV

Această posibilitate de a obţine pe cale mintală un calc al proprietăţilor spaţiale, cu alte cuvinte „spaţiul pur", şi de a raţiona eficient pe el l-a făcut pe Immanuel Kant să afirme că spaţiul nu este, de fapt, propriu realităţii în sine, ci ceva adăugat din exterior acestei realităţi, şi anume adăugat de însăşi activitatea noastră mintală pentru a conferi „lucrului în sine" o structură organizată, cognoscibilă. „Expunerile noastre — scria Kant — ne învaţă, prin urmare, realitatea (adică valabilitatea obiectivă) a spaţiului cu privire la tot ce putem întîlni în afară ca obiect, dar totodată *idealitatea* spaţiului cu privire la obiecte, cînd ele sînt cumpănite în ele însele de raţiune, adică fără a se lua în consideraţie constituţia sensibilităţii noastre. Noi afirmăm deci *realitatea empirică* a spaţiului (cu privire la toată experienţa posibilă), deşi totodată *idealitatea lui transcendentală,* anume că el nu e nimic îndată ce eliminăm condiţiunea posibilităţii a toată experienţa şi-l considerăm ca ceva ce stă la baza obiectelor în sine. ...Conceptul transcendental al fenomenelor în spaţiu e un avertisment critic cum că în general nimic ce e intuit în spaţiu nu e o formă a obiectelor care le-ar putea fi lor, în sine, proprie, ci că obiectele în sine ne sînt cu desăvîrşire necunoscute şi că ceea ce numim lucruri exterioare nu sînt altceva decît simple reprezentări ale sensibilităţii noastre a cărei formă e spaţiul, al cărei adevărat corelativ însă, adică obiectul în sine, nu e cunoscut prin aceasta de loc şi nici nu poate fi cunoscut, după care însă în experienţă nici nu se întreabă niciodată" [1].

[1] Immanuel Kant, *Critica raţiunii pure*, Bucureşti, Edit. Casei şcoalelor, 1930, p. 68, 69.

Scanned with OKEN Scanner

Spaţiul, în concepţia lui Kant, este deci în acelaşi timp real şi ideal, empiric şi transcendental. Dar el este, pentru Kant, real nu în sensul că este o proprietate inerentă, obiectivă a lucrului în sine, ci în sensul că el este o proprietate generală a oricărui lucru cunoscut. Dacă în orice experienţă a noastră cu lumea externă, raţionează Kant, spaţiul este prezent, atunci nu mai e nevoie ca, în mod practic, să considerăm spaţiul ca ceva adăugat din afară pentru a corecta cunoştinţele noastre şi activitatea noastră desfăşurată în baza acestora. În acest înţeles putem vorbi, după Kant, de realitatea spaţiului. În fond însă, situîndu-ne deasupra experienţei, socoteşte el, dintr-o perspectivă filozofică,—generalitatea spaţiului, omniprezenţa spaţiului în experienţa noastră cu lumea externă, exprimă faptul că acesta nu este o proprietate obiectivă a lucrurilor, ci o condiţie — de origine internă şi, tocmai prin aceasta, generală — a cunoaşterii umane. Spaţiul există peste tot pentru că, în fapt, îl aducem noi, îl ducem cu noi peste tot şi-l proiectăm peste tot.

Or, tocmai geometria este, după Kant, un argument esenţial al acestui punct de vedere (pe lîngă cele care ţin de ceea ce Kant numeşte „expunerea metafizică a conceptului").

Kant pleacă de la teza că „geometria este o ştiinţă care determină însuşirile spaţiului în mod sintetic şi totuşi apriori" [1]. Filozoful explică el însuşi această afirmaţie a sa : „Ce trebuie oare să fie reprezentarea spaţiului pentru ca o atare cunoaştere despre el să fie posibilă ? El trebuie să fie din capul locului intuiţie; căci dintr-un simplu concept nu se pot scoate propoziţii care depăşesc conceptul, ceea ce, doar, se întîmplă în geometrie. Dar această intuiţie trebuie să se găsească în noi apriori, adică înaintea oricărei percepţii a unui obiect, prin urmare trebuie să fie intuiţie pură, nu empirică. Căci propoziţiile geometrice sînt toate apodictice, adică legate cu conştiinţa necesităţii lor..." [2].

Iată deci, formulată pentru geometrie, întrebarea pe care Kant o formulase cu cîteva pagini mai sus într-o formă generală : „Cum sînt posibile judecăţile sintetice apriori" ? [3], întrebare care a frămîntat apoi minţile atîtor filozofi şi oameni de ştiinţă.

---

[1] Immanuel Kant, *op. cit.*, p. 66
[2] *Ibidem*, p. 66.
[3] *Ibidem*, p. 51.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă adevărurile geometriei, și în genere ale matematicii, se impun ca necesare, „apodictice", aceasta înseamnă că ele se obțin pe o cale pur rațională, deductivă, deci, după Kant, apriori. Dar dacă lucrurile stau astfel, cum este posibil progresul științelor matematice, cum este posibil ca fiecare adevăr matematic să apară nu ca o detaliere sau o reformulare a ceea ce a fost deja afirmat în propozițiile precedente, ci ca o cucerire a minții ca o cunoștință nouă, sau, în terminologia kantiană, ca „o judecată sintetică" ? Cum e deci posibil ca un adevăr să apară ca necesar, ca fiind riguros determinat de adevărurile precedente și totuși nou în raport cu acestea ?

Or, după Kant, soluția problemei constă în faptul că, așa cum am arătat, spațiul — este vorba de adevărurile geometrice — este și real și ideal în calitate de intuiție pură a sensibilității. Fiind o condiție a oricărei experiențe, el este de domeniul experienței, al experimentării (fără ca în fond să fie de origine empirică). Cercetarea spațiului, a formelor spațiale ne va duce la descoperirea mereu a unor noi proprietăți, ca în orice experiență reală, obiectivă. În același timp însă, dat fiind că în fond spațiul nu aparține „lucrului în sine", ci este numai o formă a sensibilității, o intuiție pură, apriori, adevărurile sale nu sînt contingente, ci necesare, cu alte cuvinte ele implică ideea, certitudinea că nu pot fi contrazise de desfășurarea evenimentelor obiective.

Această argumentare presupune în primul rînd teza după care orice adevăr *necesar* nu poate fi conceput decît ca aprioric; el este necesar tocmai prin apriorismul său, prin independența sa față de experiență.

Nu vom stărui asupra acestei probleme complet rezolvată de filozofia marxistă. În filozofia idealistă, în genere, se reduce necesitatea obiectivă la necesitatea logică. Pentru filozofia marxistă, *primordială este necesitatea obiectivă*. Această teză face parte organic din structura concepției materialist-dialectice asupra relației dintre conștiință și existență. „Engels consideră — scria Lenin referindu-se la marele său predecesor —, pe de o parte, cunoașterea și voința omului, iar pe de altă parte necesitatea naturii, declarînd simplu, în locul oricărei alte definiții, că necesitatea naturii este factorul prim, iar voința și conștiința omului factorul secund" [1].

[1] V. I. Lenin, *Materialism și empiriocriticism*, p. 180.

Evident, aşa cum arată tot Engels, „observaţia empirică nu poate constitui niciodată prin ea însăşi o dovadă satisfăcătoare a necesităţii“ [1]. Este nevoie pentru aceasta ca întregul drum al cunoaşterii să fie parcurs „de la contemplarea vie la gîndirea abstractă şi de la aceasta la practică“. Numai gîndirea umană este capabilă ca, generalizînd rezultatele experienţei, să ajungă la dezvăluirea necesităţii obiective şi apoi la dominarea ei. Numai practica este cea care, în ultimă instanţă, va oferi dovada justei reflectări a necesităţii. Necesitatea nu poate fi niciodată percepută. Ea nu poate fi decît gîndită. Garanţia necesităţii nu se obţine niciodată prin simpla înregistrare a unui şir de evenimente. Ea se obţine integrînd cele dobîndite prin cunoaşterea directă într-un ansamblu de cunoştinţe avînd o structură bine determinată. De aici iluzia că atît originea ideii de necesitate, cît şi garanţia ei se află în gîndirea însăşi. Dar o necesitate de origine pur mentală, în afara relaţiilor om-mediu, în afara activităţii practice a oamenilor, neavînd deci nici un rol în această activitate, este un nonsens. Doar dacă nu considerăm că cea mai bună garanţie împotriva unor surprize ale realităţii în raport cu ideile pe care ni le facem despre ea este ignorarea acestei realităţi. Garanţia logică a necesităţii unui adevăr nu înseamnă independenţa acestuia faţă de realitatea obiectivă. „...Practica omului — scrie Lenin —, repetîndu-se de miliarde de ori, s-a imprimat în conştiinţa omului ca figuri logice. Aceste figuri au trăinicia unor prejudecăţi şi un caracter axiomatic tocmai (şi numai) datorită acestei repetări de miliarde de ori“ [2].

În opoziţie deci cu apriorismul kantian, Lenin arată că chiar elementele structurale ale gîndirii, care au un caracter axiomatic şi care deci par a se impune cunoaşterii noastre ca forme apriorice de organizare a ei, îşi au izvorul tot în realitatea obiectivă, în legitatea obiectivă, exprimînd în fond o vastă practică socială. Ceea ce arată Lenin despre figurile logice este adevărat pentru toate legile şi regulile gîndirii logice. Acestea s-au constituit şi s-au cristalizat treptat în istoria umanităţii, devenind elemente structurale ale gîndirii datorită unui îndelungat proces de selecţie şi de verificare în activitatea pratică, colectivă a oamenilor. Necesitatea, garantată logic, a unor categorii de propoziţii, cum sînt cele matematice, nu înseamnă decît tot garanţia practicii sociale, sintetizată în acest sistem de angrenaje excepţional de perfecţionate care este logica umană.

---

[1] F. Engels, *Dialectica naturii*, 1954, p. 232.
[2] V. I. Lenin, *Caiete filozofice*, p. 181.

Scanned with OKEN Scanner

Un adevăr nu este necesar pentru că este aprioric, ca în concepţia lui Kant, ci *pare* aprioric întrucît este necesar, iar necesitatea i-a fost dezvăluită de practica socială a umanităţii. Aceasta este, de fapt, filiaţia istorică şi *psihologică* a ideii de necesitate.

Să revenim la problema spaţiului. În concepţia lui Kant, după cum am văzut, spaţiul este aprioric, ceea ce după el conferă caracterul de necesitate adevărurilor geometrice, şi în acelaşi timp este intuiţie, reprezentare şi nu noţiune, ceea ce explică posibilitatea progresului în gîndirea geometrică. Cum îşi imaginează Kant această calitate de „intuiţie pură" a spaţiului? „Astfel — spune el explicîndu-şi termenul —, dacă din reprezentarea unui corp separ ceea ce intelectul gîndeşte despre el ca substanţă, forţă, divizibilitate etc., tot aşa ceea ce în el aparţine senzaţiei ca impenetrabilitate, duritate, culoare etc., atunci din această intuiţie empirică îmi va rămîne ceva, anume întindere şi figură. Acestea aparţin intuiţiei pure, care are loc în minte apriori ca simplă formă a sensibilităţii chiar fără un obiect real al simţurilor sau senzaţiei" [1].

Poate că n-a fost suficient remarcat în istoria filozofiei faptul că toate argumentele care urmează privitoare la natura şi la originea spaţiului ca intuiţie pură, apriori se întemeiază în fond pe această *descriere introspectivă a unui act psihologic:* după ce eliminăm tot ceea ce în reprezentarea noastră pare să fie de origine senzorială : culoare, duritate, greutate etc., rămîne ceva ce, deşi ţine de domeniul imaginii, al reprezentării, al intuiţiei, nu mai poate fi conceput ca eliminabil, şi acesta este spaţiul (pentru lumea externă).

În argumentarea lui Kant se confundă însă două unghiuri de vedere din care este considerat spaţiul. Dacă este vorba de o reprezentare propriu-zisă, de o imagine senzorială, atunci este fals că spaţiul pur ni-l putem imagina constituit numai din întindere şi formă, fără alte atribute senzoriale. Pentru a putea fi *reprezentat,* spaţiul trebuie „sensibilizat" într-un fel oarecare.

De fapt, vorbind de *intuiţia* de spaţiu, Kant aduce argumente valabile pentru *ideea* de spaţiu, pentru o imagine conceptualizată a spaţiului.

Spaţiul deci — şi acest fapt ni se pare esenţial pentru discuţia noastră — poate fi conceput ca existînd, după Kant, fără orice alt atribut senzorial, fără orice altă proprietate. În schimb,

[1] Immanuel Kant, *op. cit.*, p. 62.

celelalte însuşiri ale obiectelor — culoare, duritate etc. — nu pot fi concepute decît ca aparţinînd unor obiecte care, la rîndul lor, nu pot fi concepute decît în spaţiu.

Această analiză ne arată pe de altă parte, că în argumentarea lui Kant sînt confundate două idei, pe care urmează să le disjungem :

a) spaţiul apare ca o *proprietate generală* comună tuturor lucrurilor din realitate. De unde rezultă, după Kant, că această proprietate trebuie considerată ca anterioară informaţiei externe în constituirea oricăror cunoştinţe senzoriale ;

b) spaţiul apare ca o proprietate conceptibilă independent de orice obiect material, independent de alte proprietăţi.

Ambele idei sînt redate simultan în următoarea formulare: „Nu ne putem face niciciînd o reprezentare despre cum ar fi dacă n-ar fi spaţiul, deşi ne putem gîndi foarte bine ca în el să nu se întîlnească obiecte“ [1].

Că spaţiul este într-adevăr o formă fundamentală de existenţă a materiei, o formă generală comună tuturor obiectelor, acest fapt este indiscutabil. De aici însă nu rezultă în mod obligatoriu că această „formă“ este de origine subiectivă. *Ea poate apărea* — şi aici este vorba de un joc de fenomene psihologice —, datorită generalităţii ei, ca fiind apriori. O gîndire consecvent ştiinţifică nu poate însă admite această teză. Spaţiul nu este o proprietate generală comună tuturor lucrurilor materiale pentru că este aprioric, ci poate să *pară* aprioric în urma unei analize unilaterale, din cauza însuşirii sale de formă fundamentală de existenţă a materiei în mişcare.

Dar argumentarea lui Kant, cum spuneam, cuprinde şi această idee : spaţiul apare ca ceva ce poate fi conceput independent de orice alte proprietăţi materiale, ceva ce poate fi conceput în „stare pură“, *fără să fie nevoie să facem apel, pentru a-l explica, la vreuna dintre legile, relaţiile constatate la vreo proprietate de altă natură.*

Această posibilitate a „purităţii“ intuiţiei de spaţiu ar putea fi un argument extrem de puternic în favoarea aprioriismului kantian. Ştiinţa contemporană a dovedit însă falsitatea acestei teze. Teoriile fizicii moderne, în special teoria relativităţii, au demonstrat că nici spaţiul, nici timpul nu sînt de fapt detaşabile în cadrul unei investigaţii ştiinţifice riguroase din complexul acţiunii materiale. Clasicii marxism-leninismu-

[1] Immanuel Kant, *op. cit.*, p. 64.

lui au prevăzut în mod genial acest adevăr. „Se înțelege — arată Engels — că ambele aceste forme de existență ale materiei nu sînt nimic fără materie, nu sînt decît reprezentări goale, abstracții care există numai în capul nostru“ [1].

Faptul însă care merită să ne rețină în mod deosebit atenția este acela că pentru practica obișnuită, la scara experienței curente a oamenilor și chiar la nivelul unei prime aproximații științifice, proprietățile spațiale ale lucrurilor pot fi concepute ca „pure“ în reflectarea mintală. În aceste limite, spațiul poate fi conceput și este conceput ca un continuum omogen, care permite raționamente complete fără variabile dependente de alte proprietăți ale materiei.

Cînd îmi dau seama că un corp este o bucată de fier, eu pot prevedea fără alte experiențe că el va avea în mod necesar anumite proprietăți fizice și chimice și pot raționa în legătură cu corpul respectiv avînd în vedere aceste raționamente. N-am nevoie să refac de fiecare dată experiențele care au dus la descoperirea acestor proprietăți. Dar *inițial* omul de știință a stabilit pe cale experimentală *și nu altfel,* nu pe cale pur rațională, ansamblul proprietăților fierului și legătura dintre ele, în așa fel încît constatînd prezența unora dintre proprietăți, să poată afirma că este vorba de fier și să poată deduce și prezența celorlalte proprietăți.

Dacă bucata de fier are, de pildă, o formă paralelipipedică, ceea ce se determină prin cîteva măsurători, se pot determina și alte dimensiuni spațiale, să zicem lungimea diagonalei, volumul corpului etc. Pentru toate acestea aplicăm cunoștințele de geometrie de care dispunem, anumite relații stabilite între diferitele elemente spațiale ale corpului. Dar aceste cunoștințe de geometrie de care avem nevoie pentru stabilirea datelor respective nu le-am aflat cercetînd un corp material, raportîndu-ne și la alte proprietăți decît cele spațiale. Tot ceea ce știm despre relațiile dintre dimensiunile spațiale ale corpului respectiv a fost aflat prin studierea unui *paralelipiped ideal, imaginat* (chiar dacă ne-am sprijinit pe desene), în care n-am păstrat decît — ca să zicem așa — spațiul pur.

Repetăm: toate acestea sînt valabile numai în limita experienței curente. La scară cosmică, lucrurile, cum am văzut, se schimbă.

---

[1] F. Engels, *Dialectica naturii*, p. 230.

Problema interdependenţei tuturor fenomenelor obiective în realitatea materială este limpede şi pe deplin rezolvată de filozofia marxistă. Separabilitatea proprietăţilor spaţiale, ca domeniu de legitate, nu este decît relativă, ca şi separabilitatea oricăror alte domenii de legitate. Ceea ce este caracteristic este faptul că variaţiile introduse de interdependenţa cu alte domenii de legitate (în primul rînd proprietăţile cîmpului gravitaţional) sînt insesizabile la scara practicii curente, ceea ce ne permite ca în limitele respective să considerăm domeniul proprietăţilor spaţiale ca absolut separabil.

De ce această interdependenţă nu este sesizată la nivelul dimensiunilor mijlocii nu este numai o problemă filozofică, ci şi o problemă psihologică.

Pentru a ne face mai bine înţeleşi, să ne referim la un exemplu. Un om aflat pe un teren viran percepe suprafaţa acestuia ca fiind plană. În realitate este o calotă sferică. Pentru activitatea lui curentă, de pildă însămînţarea terenului, el nu are nevoie să ştie că se află pe suprafaţa unei sfere. Problema de ce acest om nu percepe curbura suprafeţei şi are impresia că terenul pe care se află este plan nu este o problemă filozofică, legată de natura spaţiului. Ea este o problemă psihologică limitată, foarte simplă a cărei rezolvare este în legătură cu structura analizatorilor.

Problema de ce proprietăţile spaţiale apar, pe o anumită treaptă de evoluţie istorică, ca fiind întru totul izolabile, detaşabile din complexul existenţei materiale, deşi ele nu sînt, de fapt, izolabile, nu este aşadar numai o problemă filozofică, ci, de asemenea, o problemă psihologică evident incomparabil mai complicată decît cea din exemplul dat mai sus. Kant a absolutizat această „intuiţie pură", care de fapt, este o intuiţie conceptualizată, a ridicat-o la rangul de proprietate absolută şi i-a acordat importanţa filozofică pe care o cunoaştem.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL III-lea

EVOLUȚIA ISTORICĂ A IDEII DE SPAȚIU

Care sînt proprietățile unui asemenea „spațiu pur“ ?

El este conceput, în primul rînd, ca fiind *omogen,* adică identic în toate punctele sale. El este conceput ca fiind *izotrop:* însușirile spațiului sînt identice în toate direcțiile. Spațiul apare ca fiind *continuu* și *infinit.* În sfîrșit, spațiul este *tridimensional.* Cu alte cuvinte, pentru determinarea unui punct în spațiu sînt necesare întotdeauna trei date.

Dacă încercăm să sintetizăm din perspectiva psihologică aceste caracteristici ale spațiului, pe care l-am putea numi *geometric,* am putea spune că acesta ne apare, în fond, ca un simplu *cadru,* a cărui calitate esențială constă în faptul că nu intervine cu nimic în desfășurarea fenomenelor realității, sau, după expresia lui Weyl, ca „o cazarmă de închiriat“ care poate fi ocupată de orice fel de locatari sau, în lipsa acestora, poate rămîne absolut goală“[1].

Faptul cel mai important pe care vrem să-l subliniem este că această *reflectare a spațiului nu este unica reflectare posibilă psihologic.*

Trei, cel puțin, dintre calitățile spațiului — omogenitatea, izotropia și continuitatea — s-au dovedit a nu fi calități absolute, ci exprimînd aproximații legate de o anumită viziune, istoricește determinată, a spațiului : concepția newtoniană a spațiului.

Această imagine despre spațiul obiectiv este și ea rezultatul unei îndelungate evoluții istorice.

---

[1] După *Bazele filozofiei marxiste,* București, Edit. politică, 1959, p. 68.

Scanned with OKEN Scanner

Imaginea despre care Kant credea că reprezintă o formă veșnică, absolută, imuabilă — ceea ce a constituit pentru el un argument în favoarea concepției aprioriste — reprezintă, de fapt, numai o etapă în elaborarea unei imagini cît mai adecvate a spațiului obiectiv, etapă în bună măsură depășită astăzi de știință.

Elaborarea acestei imagini a spațiului cu caracteristicile sale nu poate fi înțeleasă decît în strînsă legătură cu evoluția, în primul rînd, a ideii de timp, apoi de mișcare și materie și, în genere, în contextul general al dezvoltării fizicii și astronomiei.

În gîndirea antică apar deja schițate unele dintre aceste caracteristici, deși nu întotdeauna explicit și clar formulate.

Problema spațiului se pune, în primul rînd, sub forma problemei *locului*. Arhit din Tarent, din școala lui Pitagora, avea ideea locului ca fiind prima dintre existențe, ceva distinct de corpuri și independent de ele. Cu alte cuvinte, ceea ce se formula în primul rînd era ideea *amplasamentului* fapt care denotă deja un grad avansat de abstractizare.

În concepția atomistă a materialiștilor antici, *vidul* — spațiul neumplut — există ca o condiție necesară a mișcării atomilor. „Leucip însă și elevul său Democrit — spune Aristotel — socotesc ca elemente *plinul și golul*, înțelegînd prin aceasta ceea ce este și ceea ce nu este. Prin *plin* și *solid* (adică atomii) ei înțeleg aici ființa, pe cînd prin golul și rarefiatul, neființa. De aceea, pentru ei, ființa nu este cu nimic mai existentă decît neființa [1].

Epicur, care a continuat și a dezvoltat atomismul lui Democrit, are vederi originale chiar în privința spațiului și timpului. În concepția lui Epicur, spațiul și timpul au un caracter discontinuu : în unitatea cea mai mică de timp, considerată ca indivizibilă, atomul poate parcurge cea mai mică unitate de drum — și ea indivizibilă —, ceea ce duce și la o cuantificare a mișcării: cinemele (mișcări indivizibile). Pe de altă parte, pentru Epicur, spațiul apare ca anizotrop, deoarece el considera că atomii „cad în jos".

Lucrețiu, în *Poemul naturii*, a exprimat cu pregnanță ideea vidului în sens de spațiu ca o condiție a mișcării atomilor : „Iarăși spun, neființînd acel loc, acel spațiu pe care vid îl numim,

[1] Aristotel, *Metafizica*, I, 4 (citat după F. Engels, *Dialectica naturii*, p. 189).

nici un corp n-ar putea să se afle în vreo parte ori să se mişte cumva în natură pe căi felurite“ [1].

Concepţia lui Aristotel este oarecum diferită. După el, spaţiul este suma locurilor pe care le ocupă corpurile, iar *locul* este delimitarea unui corp de către alte corpuri din jurul lui. Precum se vede, Aristotel nu identifică spaţiul cu vidul : vidul, fiind *nimic*, nu poate *exista* în sensul propriu al cuvîntului.

Pe de altă parte, la Aristotel spaţiul nu este absolut indiferent faţă de natura obiectelor. Fiecare corp tinde să ocupe un loc anumit, ceea ce determină mişcarea sa. Aceasta înseamnă că, pentru Aristotel, spaţiul nu este omogen şi nici izotrop, deşi este continuu. „Deplasările corpurilor fizice — scrie el în *Fizica* —, de pildă focul, pămîntul şi altele asemenea lor, arată că locul nu este numai ceva, dar că el are şi o anumită forţă : într-adevăr, fiecare, dacă nu este împiedicat, este îndreptat spre locul său propriu, unul în sus, altul în jos ; iar sus, jos şi restul celor şase dimensiuni sînt părţi şi specii ale locului“ [2]. Anizotropia spaţiului este precizată în modul următor : „În natură... fiecare determinare este absolut definită : sus nu este oriunde, ci locul unde se îndreaptă focul şi ceea ce este uşor ; la fel, jos nu este orice, ci locul unde lucrurile grele şi pămîntene sînt transportate, aceste determinări deosebindu-se nu numai prin poziţia lor, ci şi prin putinţa lor“ [3].

Conform cu concepţia sa asupra materiei, pe care o consideră finită, Aristotel consideră şi spaţiul ca fiind finit (spaţiul nefiind altceva decît locul determinat ocupat de un lucru).

Pentru Aristotel este limpede că deplasarea presupune întotdeauna două corpuri : unul care se deplasează şi celălalt care constituie un reper. Dar, aşa cum arată V. P. Zubov [4], Aristotel n-a ajuns la relativizarea mişcării în sensul galileean. Locul este conceput ca un recipient imobil, ca un reper absolut. Aceleaşi dificultăţi apar şi în legătură cu mişcarea aştrilor. Dacă acestea se mişcă, în raport cu ce se mişcă ? De aici necesitatea de a concepe universul ca posedînd un reper fix, imobil în raport cu care se poate vorbi de mişcarea aştrilor. În concepţia lui

---

[1] Lucretius, *Poemul naturii*, trad. D. Murărașu, Bucureşti, 1947, p. 9.
[2] Aristotel, *Fizica*, IV (1), 2 086 (după trad. franceză a lui H. Carteron, Paris, *Les Belles Lettres*, 1926, p. 123).
[3] *Ibidem*.
[4] V. P. Zubov, *Ideile fizice ale evului mediu* în *Dezvoltarea ideilor fundamentale ale fizicii*, Bucureşti, Edit. ştiinţifică, p. 137.

Scanned with OKEN Scanner

Aristotel, acesta este Pămîntul. Este limpede, așadar, că și sub acest raport spațiul apare la Aristotel ca anizotrop.

Este foarte interesant de subliniat faptul că viziunea aristotelică a spațiului este cu totul deosebită de spațiul geometriei euclidiene. Geometria euclidiană presupune o viziune a spațiului adecvată mecanicii, pe care, multe secole mai tîrziu, o vor dezvolta Copernic, Galileu și Newton. Geometria euclidiană, care a tins să reconstituie într-o structură rațională ansamblul cunoștințelor geometrice din epoca respectivă, presupune existența unui spațiu infinit, continuu, omogen și izotrop. Dar aceste implicații n-au fost dezvăluite și dezvoltate în antichitate, n-au ajuns să pătrundă în filozofia naturii și să-i determine orientarea, și aceasta tocmai din cauza cunoștințelor rudimentare de mecanică și de astronomie. Concepția aristotelică a rămas dominantă pînă în epoca Renașterii.

Este foarte semnificativă pentru mentalitatea antichității în această privință următoarea argumentare a lui Seneca împotriva „minciunilor lui Artemidor" privitoare la constituția bolții cerești. „Dacă ar fi să-l credem pe Artemidor — scrie Seneca —, regiunea cea mai înaltă a cerului este masivă și materia dură și înaltă a acestui fel de acoperiș solid este formată din acumularea și îngrămădirea atomilor... Dar aș vrea ca acest autor, care a așezat deasupra lumii un acoperiș atît de solid, să ne spună de ce trebuie să-l credem atunci cînd atribuie cerului o asemenea grosime. Care este forța care a așezat acolo și menține materiale atît de compacte? Și pentru că o boltă atît de densă trebuie să fie cu necesitate foarte grea, cum e posibil să rămînă în înaltul cerului corpuri atît de grele? Cum e posibil ca această masă să nu cadă și să nu se sfărîme sub propria ei greutate?" [1]

În filozofia evului-mediu, concepția reperului absolut își păstrează încă actualitatea. În locul reperului central se recurge la o soluție de compromis : așa-numitul „empireu", un „al zecelea cer", care joacă rolul unui „corp de referință" pentru toate mișcărilor aștrilor.

Problema continuității spațiului i-a preocupat pe gînditori pînă în secolul al XVII-lea : este spațiul format din atomi indivizibili de întindere sau din puncte ? Ceea ce echivalează cu întrebarea : este spațiul discontinuu sau continuu ? Abia în secolul al XVII-lea a devenit dominantă concepția spațiului continuu.

---

[1] Sénèque, *Questions naturelles*, trad. P. Oltramare, Paris, *Les Belles Lettres*, 1930, p. 317.

Ideea izotropiei spaţiului a fost cel mai greu cucerită. Chiar dacă din teoriile unora dintre gînditorii antichităţii rezultă faptul că ei concepeau spaţiul ca un cadru omogen şi continuu, ei nu puteau concepe şi totala relativitate a direcţiilor. Universul apare ca „polarizat" între sfera exterioară şi centrul său : între „sus", cerul, şi „jos", pămîntul. Mişcarea corpurilor „în jos" apare ca naturală, ca exprimînd direcţia firească.

Numai către sfîrşitul evului mediu şi în timpul Renaşterii, în legătură cu progresele fizicii, ale mecanicii şi mai ales ca urmare a „revoluţiei copernicane", care a înlocuit geocentrismul lui Ptolemeu cu concepţia heliocentrică, se limpezesc şi se stilizează treptat ideile privitoare la caracterul infinit şi izotrop al spaţiului. Principiul galileean al inerţiei — fundamental pentru mecanica clasică, contribuţia lui Descartes la dezvoltarea fizicii şi a matematicii (şi mai ales concepţia sa asupra întinderii ca atribut fundamental a materiei), ideile lui Gassendi asupra spaţiului ca întindere vidă, parţial umplut de materie şi independent de materie etc., au dus la cristalizarea concepţiei moderne asupra spaţiului ca formă fundamentală, obiectivă a existenţei, la limpezirea ideilor asupra omogenităţii, izotropiei şi infinităţii spaţiului (toate acestea împreună cu cristalizarea ideilor moderne despre timp şi mişcare).

Această evoluţie a pregătit momentul newtonian, moment de colosală importanţă în dezvoltarea gîndirii ştiinţifice. Între mecanica lui Newton, tezele sale asupra gravitaţiei universale şi concepţiile despre spaţiu şi timp ca forme, cadre absolute, infinite şi omogene, legătura este organică. „Spaţiul absolut — scrie Newton în opera sa *Principiile matematice ale filozofiei naturale* —, considerat în natura sa, fără nici o relaţie cu ceva extern, rămîne întotdeauna asemenea şi imobil. Spaţiul relativ este o măsură sau o parte oarecare mobilă a celui absolut, care se relevă simţurilor noastre prin poziţia sa faţă de corpuri şi de obicei se confundă cu spaţiul imobil" [1]. Şi mai departe. „Dacă ordinea părţilor timpului este imutabilă, tot aşa este şi ordinea părţilor spaţiului. Dacă acestea ar fi mişcate din locul lor, aceasta ar însemna (ca să zicem aşa) că ele s-ar îndepărta de sine însele. Căci timpurile şi spaţiile sînt ca şi cînd ar fi locurile lor însele şi ale tuturor lucrurilor. Toate se află în timp în ceea ce priveşte ordinea de succesiune şi în spaţiu în ceea ce priveşte

[1] Isaac Newton, *Principiile matematice ale filozofiei naturale*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1956, p. 31.

Scanned with OKEN Scanner

ordinea așezării. Esența lor este că sînt locuri și este absurd să se miște locuri primare... Locuri imobile însă nu există decît toate acelea care din veci în veci păstrează pozițiile lor reciproce date, deci care rămîn totdeauna nemișcate și constituie un spațiu pe care eu îl numesc imobil“ [1].

Noțiunile de spațiu absolut și timp absolut sînt necesare mecanicii newtoniene. Cele trei legi fundamentale ale mecanicii lui Neton („legea inerției“, „legea forței“ și „principiul egalității acțiunii și reacțiunii“) nu au sens decît în cadrul imobil al spațiului absolut și al timpului care curge uniform. Legea inerției, legea acțiunii forței sînt valabile numai în sisteme de referință inerțiale. Dar, ca să putem vorbi de sisteme de referință inerțiale, trebuie să avem un reper. Care este acesta? În epoca respectivă nu era posibil decît acest răspuns: legile mecanicii sînt valabile pentru sisteme care se mișcă în virtutea inerției în raport cu spațiul absolut.

Numai în raport cu un asemenea spațiu are sens distincția între mișcarea absolută și relativă. „Cauzele prin care se deosebesc între ele mișcările adevărate și relative — spune Newton — sînt forțele imprimate asupra corpurilor pentru a produce mișcarea. Mișcarea adevărată nici nu se naște, nici un variază decît prin forțele imprimate asupra corpului mișcat însuși, pe cînd mișcarea relativă se poate produce și schimba fără forțe imprimate asupra acestui corp. Căci este de ajuns să se imprime numai asupra altor corpuri, cu care corpul este în relație pentru ca acestea, cedînd lor, să se schimbe acea relație care determină repausul sau mișcarea relativă a corpului“ [2].

Aceasta este, în definitiv, concepția asupra spațiului și timpului pe care Immanuel Kant o ridică, în mod nejustificat, la rangul de intuiție primară, absolută și invariabilă a cunoașterii umane.

Concepția newtoniană a stăpînit ideile fizicienilor pînă la începutul secolului nostru. Dar chiar în grandioasa construcție a lui Newton, în aparență atît de armonioasă, existau germenii propriei negații. Teoria ondulatorie a luminii și cea a cîmpului electromagnetic, datorate lui Maxwell și Faraday, — au scos în evidență fisurile concepției. Problema modului în care se realizează influența la distanță a maselor materiale — influență care traversează spații vide — devenea tulburătoare.

---

[1] Isaac Newton, *op. cit.*, p. 32, 33.
[2] *Ibidem.*

Scanned with OKEN Scanner

Ce simnificaţie are propagarea undelor acolo unde nu există nici o materie care să constituie suportul lor ? Ce semnificaţie are cîmpul creat de mase electrice sau mase magnetice cît timp acest „cîmp“ nu apare ca o modificare a unei substanţe ? Se părea că spaţiul însuşi îşi modifica proprietăţile, luînd aspectul „cîmpului“ magnetic, electric, electromagnetic.

Dar, pentru oamenii de ştiinţă ai secolului al XIX-lea, spaţiul căpătase, în aparenţă în mod definitiv. proprietăţile a căror modificare era de neconceput.

Acest fapt este pentru expunerea noastră esenţial. *Aşa de adînc se înrădăcinase în conştiinţa oamenilor ideea spaţiului ca un recipient imobil şi pasiv — idee elaborată de fapt, cum am văzut, numai treptat, în decurs de milenii —, încît chiar în faţa noilor cuceriri evidente ale fizicii, acestea rămîneau neclintite.* Şi astfel este repusă pe tapet cu o nouă vigoare concepţia *eterului*, soluţie de compromis, mediu care ar umple întregul spaţiu, sediu al acţiunilor dinamice care traversează spaţiul, al fenomenelor ondulatorii, al cîmpurilor gravitaţionale şi electromagnetice.

Toate încercările de a afla proprietăţile acestui mediu ipotetic au rămas infructuoase. Numai treptat, pe măsura dezvoltări cunoştiţelor fizicii, s-a putut preciza faptul fundamental că eterul nu poate fi conceput altfel decît ca imobil, ca fiind legat în mod rigid de spaţiu. Şi astfel s-a ajuns la ceea ce Albert Einstein a numit mai tîrziu „marea descoperire a lui H. A. Lorenz“ : spaţiul fizic şi eterul nu sînt decît expresii diferite ale aceluiaşi lucru ; cîmpurile sînt stări fizice ale spaţiului [1]. Spaţiul era astfel curăţat de un balast inutil, dar ceea ce rămînea după această operaţie nu mai poate fi cadrul absolut şi omogen al mecanicii newtoniene. Încă înainte de aceste descoperiri, Lobacevski şi Riemann prevăzuseseră în mod genial noile căi pe care urma să se dezvolte ştiinţa. Cei doi geometri, fiecare separat, elaborînd geometriile lor neeuclidiene, prevăzuseră acest fapt fundamental : spaţiul real nu corespunde cu concepţia unui cadru rigid, omogen, absolut pasiv în raport cu fenomenele fizice. Structura spaţiului este dependentă de fenomenele fizice şi, la rîndul ei, influenţează aceste fenomene.

Dar aceste idei geniale nu-şi găsesc aplicaţia decît mai tîrziu, în cadrul teoriei relativităţii generale.

---

[1] A. Einstein, *The problems of space, ether and the field in Physics*, în *Ideas and opinions*, Londra, Alvin Redman, 1956, p. 281.

Scanned with OKEN Scanner

Teoria relativității restrînse, creată în 1905, pornește — dacă ne referim la construcția logică — de la critica ideii de simultaneitate. Nu putem afirma că două evenimente sînt sitane decît în raport cu un anumit sistem de referință. Considerate din alt sistem de referință, aflat în mișcare față de primul, cele două evenimente nu mai sînt simultane. Nu se poate vorbi de o simultaneitate absolută, pentru că nu se poate vorbi de o mișcare rectilinie și uniformă în mod absolut. În consecință, nu se mai poate vorbi de un „timp absolut", care „curge în mod egal fără nici o legătură cu ceva extern" (Newton), și nici de un spațiu absolut.

Măsurătorile spațiului — iar spațiul nu are sens fizic decît dacă îl măsurăm ! — sînt dependente de sistemul de referință la care raportăm distanțele respective, de mișcarea relativă a acestora. Toate aceste măsurători implică considerații de mișcare și, în consecință, de timp. De aceea, în locul a două forme distincte și independente ale existenței obiective, spațiul absolut și timpul absolut, „spațiul și timpul s-au contopit într-un singur continuum cu patru dimensiuni, la fel cum înainte celetrei dimensiuni ale spațiului s-au contopit într-un continuum de acest gen. Spațiul fizic s-a completat astfel, devenind un spațiu cu patru dimensiuni, care cuprinde, de asemenea, și dimensiunea timp" [1]. Acest continuum cvadridimensional (Minkovski) oferă o altă imagine a realității obiective, mai apropiată de sensul fizic al noțiunilor respective, determinate de noile date ale științei. În acest continuum, spațiul și timpul nu se mai pot separa fără a denatura desfășurarea reală a fenomenelor. Evident, aici nu mai poate fi vorba de „intuițiile pure" pe care Kant și-a construit teoria aprioristă a cunoașterii.

Dar schimbarea nu s-a oprit aici. „Spațiul cu patru dimensiuni al teoriei restrînse a relativității este tot atît de rigid și de absolut, notează mai departe Einstein, ca și spațiul lui Newton" [2].

Un pas mai departe în restructurarea concepției despre spațiu și timp l-a constituit teoria relativității generalizate. Faptul fundamental l-a constituit în acest caz fenomenul extrem de important, pe care predecesorii lui Einstein l-au neglijat, al identității dintre masa gravifică și masa inertă. Ideea nouă se putea exprima astfel : „Într-un cîmp de gravitație omogen, toate mișcările se produc ca în absența unui cîmp de gra-

[1] A. Einstein, *op. cit.*, p. 281—282.
[2] *Ibidem*, p. 282.

vitaţie, în raport cu un sistem de coordonate animat de o acceleraţie uniformă“ [1].

De aici a urmat în mod logic concepţia curbării razei de lumină într-un cîmp gravitaţional suficient de intens. De aici decurg consecinţe importante pentru spaţiu şi timp. „Teoria relativităţii generale — scrie V. L. Sviderski — a arătat că însuşirile spaţiului şi timpului sînt însuşiri ale spaţiului şi timpului fizic şi ca atare sînt determinate de formele fizice concrete ale mişcării materiei prin intermediul cîmpului de gravitaţie. În conformitate cu acţiunea cîmpului gravitaţional asupra proceselor fizice, spaţiul şi timpul dobîndesc însuşiri de „structuralitate“, modificări de „ritm“ ş.a.m.d. Se observă, prin urmare, caracterul mărginit al unor reprezentări ale însuşirilor spaţiului şi timpului ca omogenitatea, izotropia spaţiului, uniformitatea curgerii timpului, caracterul absolut al spaţiului şi timpului în sensul lui Newton etc. Pe baza particularităţilor spaţiului şi timpului descoperite de teoria relativităţii generale, au fost evidenţiate însuşiri ca curbura, structuralitatea spaţiului, „ritmul“ timpului, dependenţa spaţiului şi timpului de gravitaţie, dependenţa reciprocă a spaţiului şi timpului etc. [2].

Am putea deci vorbi, rezumînd, despre trei mari etape în evoluţia ideii de spaţiu (şi, bineînţeles, a ideii de timp) :

Antichitatea, în care se ciocnesc două orientări principale : cea a lui Democrit, Epicur, Lucreţiu (spaţiul vid, infinit, izotrop, cu inconsecvenţe la Epicur) şi cea a lui Aristotel (spaţiul finit neomogen şi anizotrop). Învingătoare iese concepţia lui Aristotel, care domină şi în evul mediu.

Epoca modernă, cu cristalizarea concepţiei newtoniene a spaţiului absolut ca un cadru infinit, continuu omogen, izotrop şi care face corp cu geometria euclidiană.

Concepţia relativistă a unui continuum spaţio-temporal cvadridimensional, neomogen, anizotrop, structurat în dependenţă de cîmpul gravitaţional, concepţie căreia îi corespunde geometria neeuclidiană riemanniană.

★

Scopul acestei schiţe istorice a fost acela de a face mai pregnantă ideea că reflectarea în mintea oamenilor a spaţiului obiectiv (ca şi reflectarea timpului) se schimbă în istoria umanităţii,

---

[1] A. Einstein, *Notes on the origin of the general theory of relativity,* în *Ideas and opinions,* Londra, Alvin Redman 1956 p. 281.

[2] Vezi V. I. Sviderski, *Spaţiul şi timpul,* p. 38—39.

Scanned with OKEN Scanner

în legătură cu dezvoltarea generală a cunoștințelor științifice apropiindu-se tot mai mult de adevărul absolut, de o reflectare deplină a proprietăților spațiului.

Geometria euclidiană, care era considerată ca unica posibilă, s-a dovedit și ea a nu fi decît o aproximație, o etapă în cunoașterea proprietăților spațiale. Geometria euclidiană presupunînd viziunea spațiului ca un cadru continuu, omogen și izotrop, este cea cu care mecanica lui Newton a format o unitate și a cărei absolutizare i-a servit lui Kant ca argument în sprijinul filozofiei sale aprioriste.

Pentru geometria euclidiană, *figura geometrică* este o proprietate sau un ansamblu de proprietăți spațiale, concepute ca fiind complet detașabile din complexul celorlalte proprietăți materiale ale obiectului. Figura geometrică, fiind o porțiune a spațiului omogen, continuu și izotrop, este considerată ca absolut detașabilă de obiectul material, ca absolut pasivă față de celelalte proprietăți ale obiectului, cărora le servește doar ca un cadru. Concluzia, în cadrul acestei concepții, este că figura geometrică *poate fi studiată în sine, cu totul independent de alte proprietăți ale realității obiective.*

În felul acesta devine absolut indiferent dacă studiem figura geometrică sub forma unei imagini materializate sau sub forma unei imagini mentale. În ambele cazuri noi nu luăm în considerație decît *forma spațială pură,* cu alte cuvinte noi nu luăm în considerație decît ceea ce, printr-un *proces de abstractizare,* am detașat din obiect, din complexul de proprietăți ale obiectului, sub forma proprietăților spațiale.

Ceea ce vrem să subliniem este faptul că *această operație de desprindere a figurii în formă „pură" își are izvorul în concepția mai generală a spațiului ca un cadru, simplu „loc", cum spunea Newton, omogen, continuu și izotrop.*

Această concepție a spațiului „clasic", de care ne servim și azi în mod curent, trebuie considerată valabilă între anumite limite. „Dacă aceste concepte (este vorba de spațiu și timp) au fost acceptate ca evidente de-a lungul atîtor secole — scrie prof. Al. Sanielevici —, aceasta se datorește faptului că ele oglindeau proprietăți valabile în *primă aproximație* ale formelor fundamentale de existență a materiei, așa cum rezultau din experiența dobîndită de practica curentă, care ne pune în contact cu corpuri de dimensiuni mijlocii (de ordinul de mărime al dimensiunilor umane, intermediare între cele ale microcosmosului ato-

Scanned with OKEN Scanner

mic şi cele ale macrocosmosului astrofizic), corpuri înzestrate cu viteze mici (în raport cu viteza luminii)" [1].

Această aproximare a reflectării spaţiale este, totuşi, o *aproximaţie ştiinţifică*. Acest fapt ni se pare extrem de important în cercetarea problemei. Nu este vorba de un mod arbitrar de a considera spaţiul, ales în mod convenţional, ci de o *imagine ştiinţifică*, elaborată de gîndirea umană de-a lungul mileniilor ca urmare a dezvoltării cunoştinţelor despre realitatea obiectivă şi a progresului social în genere (în legătură în special cu progresul mijloacelor tehnice de măsurare, transport, comunicaţie).

Această imagine euclidiană-newtoniană a spaţiului este mult mai apropiată de adevăr decît cea veche aristotelică, a spaţiului finit, neomogen şi anizotrop. Ea reprezintă o reflectare *conceptuală*, realizată prin sinteza unui şir întreg de abstracţii ştiinţifice şi nu „o intuiţie pură".

Imaginea ştiinţifică a spaţiului „clasic" (newtonian) *nu este* — ţinem să subliniem în mod deosebit acest lucru — *o componentă obţinută printr-un proces de extracţie şi purificare din experienţa cotidiană a individului*. Spaţiul newtonian nu este spaţiul percepţiilor şi reprezentărilor noastre curente, aşa cum cere concepţia kantiană, nu este „intuiţie pură", ci este, în primul rînd, reflectarea conceptuală corespunzătoare unei anumite etape în evoluţia istorică a gîndirii ştiinţifice.

În toată această discuţie am considerat geometria, disciplină matematică, în raport cu realitatea obiectivă. Din acest punct de vedere, o geometrie se poate dovedi mai mult sau mai puţin adecvată pentru descrierea spaţiului fizic. Dacă însă facem abstracţie de această raportare, ierarhizarea dispare: propoziţiile diferitelor geometrii sînt la fel de adevărate în măsura în care sînt derivabile pornind de la sistemul de axiome dat. Faptul că o singură geometrie se prezintă la început ca admisibilă — cea euclidiană — este rezultatul separabilităţii cvasitotale a domeniului, în limitele dimensiunilor mijlocii. O dată separaţia efectuată, matematecienii au trecut la construcţia a diverse geometrii numai pe cale logică.

Pentru a se reveni la realitatea obiectivă la „spaţiul fizic" selecţia apare din nou ca necesară.

---

[1] Al. Sanielevici, *Timpul şi spaţiul din punct de vedere al materialismului dialectic*, în *Materialismul dialectic şi ştiinţele contemporane ale naturii*, Bucureşti, Edit. politică, 1959, p. 53—54.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL IV-lea

REFLECTAREA EMPIRICĂ A SPAȚIULUI

Din capitolul precedent a rezultat faptul că viziunea euclidiană-newtoniană a spațiului, care încă și azi ne apare în mod curent ca unica viziune adecvată realității, nu reprezintă, de fapt, decît o etapă în evoluția ideii de spațiu, iar geometria euclidiană corespunzătoare, numai o etapă în evoluția geometriei.

Dar chiar în această etapă viziunea euclidiană-newtoniană a spațiului nu este, de fapt, modul unic în care spațiul se reflectă în conștiința noastră. În realitate, ideea spațiului absolut și metrica euclidiană sînt formații conceptuale elaborate, după cum am văzut, istoric și de aceea însușite de către om în ontogeneză, din afară, din ambianța socială, sistematic și nesistematic. Percepția și reprezentările noastre, afectivitatea noastră sînt încă impregnate de imaginea unui spațiu structurat, direcționat și activ, peste care s-a suprapus rețeaua sobră a metricii euclidiene.

Să ne gîndim în primul rînd la locul privilegiat unde omul se simte „la el", cum îl numește P. Janet [1]. Nu e vorba pur și simplu de faptul că știm să ne orientăm pe stradă, pe cîmp, în pădure, că știm să deosebim locuința noastră, strada noastră, localitatea noastră. Dar *spațiul însuși* este, pentru noi, centrat în raport cu anumite zone privilegiate. Este un fenomen de centrare în primul rînd cu conținut afectiv, dar și intelectual. Într-un oraș străin în care ai sosit pentru prima oară, în care nu cunoști pe nimeni nu te simți bine în primul rînd pentru că îți lipsește acest punct privilegiat și cauți să ți-l procuri cît mai repede, chiar dacă este vorba de o cameră de hotel, în fond străină, sau poate numai de o bancă într-un parc.

---

[1] Pierre Janet, *Les débuts de l'intelligence*, Paris, Flammarion, 1935, p. 103.

Ne dăm însă seama că această centrare nu se reduce la un punct privilegiat, ci constă într-o ierarhie concentrică de zone.

Se înţelege, este vorba aici în mare măsură de diviziuni obiective, geografice, dar lucrurile nu se reduc la atît. Am putea vorbi de adevărate „cîmpuri" distribuite spaţial şi în care „linii de forţă" afective influenţează activitatea noastră psihică şi conduita noastră. Dar nu este numai atît. Janet vorbeşte de „conduita drumului" [1]. Drumul implică, după el, fuziunea între „ducere" şi „întoarcere". Nu e suficient ca animalul să se îndrepte corect spre un anumit punct, de pildă prada, ca să putem vorbi, după Janet, de o conduită a drumului. Pentru aceasta e nevoie de imaginea unei conexiuni spaţiale stabile între două puncte date, utilizabile în aceeaşi măsură în ambele sensuri : *drumul*, ca atare, desprins oarecum din contextul imediat şi jucînd rolul unui adevărat instrument de lucru în deplasarea noastră. Că aceste drumuri se concretizează şi material sub forma unor cărări bătătorite sau a unor şosele pietruite este adevărat. Dar „drumul" nu se reduce la atît. El reprezintă în acelaşi timp, în reflectarea noastră subiectivă, *un fapt spaţial*, un mod de structurare a spaţiului. Chiar dacă ne aflăm în avion, înconjuraţi de ceaţă, fără nici un sprijin din partea impresiilor vizuale, noi continuăm să concepem spaţiul ca structurat, străbătut de „direcţii", de „rute" cu semnificaţii precise pentru conduita noastră.

Dar dacă ne referim la simpla percepţie ?

În primul rînd, este un fapt deplin stabilit că percepţia subiectivă a spaţiului, care ne apare în principal sub forma spaţiului vizual, este o construcţie complexă, realizată din confluenţa mai multor izvoare senzoriale : senzaţiile vizuale, tactile, kinestezice şi vestibulare.

Dacă desprindem, prin analiză, din acest aliaj contribuţia vederii, obţinem o imagine spaţială bidimensională. Este impresia pe care o resimt orbii din naştere, la început, după o operaţie capabilă de a le reda vederea. Adîncimea, volumul, plinătatea, într-un cuvînt tridimensionalitatea spaţiului, rezultă din participarea senzaţiilor tactile şi kinestezice, care, în ultimă instanţă, constituie semnale ale fenomenului esenţial al mişcării, al deplasării, al explorării. La toate acestea trebuie să adăugăm şi senzaţiile vestibulare cu rol special în orientare.

---

[1] P. Janet, *op. cit.*, p. 151.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, în urma unei analize psihologice, structura percepției spațiale se relevă a fi eterogenă. În această privință credem că-i putem da dreptate lui H. Poincaré [1]. Diversele teorii care susțineau o structură monosenzorială, omogenă a percepției spațiale n-au fost confirmate. Fiecare dintre aceste surse senzoriale își aduce contribuția sa în reflectarea spațiului.

S-a discutat mult, de pildă, dacă senzațiile tactile sau cele kinestezice au într-adevăr vreun rol în constituirea percepției spațiale. J. Wittmann [2] susținea, într-un studiu mai vechi că percepțiile tactile, nici chiar în cazul unor mișcări nu pot produce singure impresii spațiale. Diverși cercetători și-au manifestat dezacordul cu acest punct de vedere. De exemplu, Walter Blumenfeld scria : „Chiar și orbii din naștere pot învăța geometria și să vorbească în aceeași termeni despre relațiile spațiale ca și văzătorii" [3]. Iar mai departe : „Atît în domeniul vizual, cît și în cel tactil, factorii motori și dinamici participă de o manieră decisivă la structura spațiului..." [4].

Geza Revesz, sprijinindu-se pe un vast material faptic, scria : Rezultă din cercetările noastre că sensibilitatea tactilă mijlocește, într-un mod tot atît de original, impresii spațiale ca și sensibilitatea vizuală, așa încît nu se poate menține teza după care ordinea spațială a lucrurilor este redată numai pe cale optică...

Despre structura spațială a lucrurilor aflăm atît pe cale vizuală, cît și tactilă. Faptul acesta se manifestă în special prin aceea că imaginile vizuale și cele tactile sînt trăite, descrise și apreciate, în ceea ce privește structura lor geometrică, în esență la fel de cele două simțuri" [5].

Psihologii sovietici au adus o importantă contribuție în lămurirea acestei probleme. Menționăm cercetările lui S. N. Șabalin (1932), L. A. Șifman (1940), A. V. Iarmolenko (1947), F. S. Rozenfeld (1941, 1948), B. G. Ananiev (1955, 1956, 1959, 1960), M. A. Guzeva, R. A. Voronova, A. A. Liublinskaia, O. I. Galkina, N. M. Iakovleva, P. L. Garfunkel, N. F. Titova, L. A. Iațuketi.

---

[1] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, p. 71.

[2] J. Wittmann, *Über Raum, Zeit und Wirklichkeit*, în „Arch. f. gen. Psych.", 1924, nr. 47, citat după David Katz, *Der Aufbau der Tastwelt*, Leipzig, 1925, p. 241.

[3] Walter Blumenfeld, *The relationship between the optical and haptic construction of space*, în „Acta Psychologica", II, octombrie 1936, p. 129.

[4] *Ibidem.*

[5] Geza Revesz, *Sistem der optischen und haptischen Raumtäuschungen*, în „Zeitschrift für Psychologie", nr. 131 (1934), Leipzig, p. 374—375.

Scanned with OKEN Scanner

În comunicarea prezentată la primul congres al Societăţii psihologilor din Moscova (29 iunie — 4 iulie 1959), B. G. Ananiev se ridică cu hotărîre împotriva concepţiei monosenzoriale a percepţiei spaţiului (cu diferitele ei variante: primatul opticului, al hapticului, al kinesteziei, al senzaţiilor vestibulare). El dovedeşte fundamentul idealist al acestor vederi unilaterale. „Se poate presupune — scrie Ananiev — că acest mecanism (al reflectării spaţiului, *E. F.*) este un sistem care se formează prin interacţiunea diferiţilor analizatori ai mediului extern şi intern al organismului uman. Percepţia de spaţiu este o asociaţie intermodală complexă“ [1]. Ananiev menţionează în sprijinul acestui punct de vedere rezultatele prezentate la consfătuirea din mai 1959, consacrată special percepţiei de spaţiu şi reprezentărilor spaţiale, de către un mare număr de cercetători sovietici.

Cercetările efectuate în ultimii ani de Lomov, Zincenko şi alţii au scos în evidenţă rolul esenţial jucat în percepţia spaţiului de mişcările ochiului şi ale mîinii. Aceşti autori arată că în structura macromişcărilor efectuate de ochi şi mînă, în investigarea obiectului, putem distinge şi o serie de micromişcări foarte fine. Rolul acestora din urmă este, după Zincenko şi Lomov, de a menţine regimul fiziologic normal de activitate al analizatorului corespunzător (menţinînd sensibilitatea lui la acelaşi nivel) şi de a participa la reflectarea particularităţilor spaţiale ale obiectelor (împreună cu macromişcările) [2].

A. N. Leontiev susţinuse într-o lucrare a sa [3] teza extrem de interesantă după care percepţia trebuie să includă procese capabile să imite, să reproducă însuşirile obiectelor percepute. O asemenea reproducere se realizează tocmai prin pipăire, urmărirea cu privirile, intonarea sunetelor percepute. În esenţă, toate acestea sînt mişcări. Rolul lor nu este deci numai de adoptare a analizatorului, ci şi de reconstituire a imaginii obiectului. În capitolele următoare vom reveni asupra acestei teze extrem de importante.

Or, cercetările psihologilor sovietici confirmă acest punct de vedere. Atît mişcările ochilor cît şi cele ale mîinilor *tind să*

---

[1] Б. Г. Ананьев, *Новое в учении о восприятии пространства*, în *Вопросы психологии*, 196 , nr 1, p. 21.

[2] В. П. Зинченко и Б. Л. Ломов, *О функциях движений руки и глаза в процессе восприятия* în *Вопросы психологии*, 1960, nr. 1.

[3] А. Н. Леонтьев, *О механизме чувственного отражения*, în *Вопросы психологии*, 1959, nr. 2.

reproducă conturul obiectului perceput, fapt relevat în special în cazul figurilor geometrice [1].

Între procedeele de reconstituire a imaginii obiectului pe cale vizuală și tactilă există deci o serie de elemente comune esențiale. Această teză, susținută de psihologii sovietici în ultimii ani, se opune concepției mai vechi, susținută între alții de F. S. Rozenfeld [2], după care percepția vizuală începe printr-o sinteză primară, spre deosebire de cea tactilă, care este inițial analitică.

Cu toate acestea, Zincenko, Lomov etc. admit, pe drept cuvînt, și existența unor deosebiri manifeste între cele două modalități de percepere a proprietăților spațiale.

În cazul văzului, funcția „constructivă" apare mai puțin evidentă. Mișcările oculare sînt mai „libere", mai puțin dictate de conturul obiectului, și aceasta mai ales în cazul unor prezentări tahistoscopice ale obiectului. Aceasta nu înseamnă că ochiul nu examinează obiectul, ci doar că examinarea se face pe traiectorii mai puțin dependente de conturul obiectului și de aceea par haotice [3]

După părerea noastră, aceste deosebiri nu sînt lipsite de importanță. Autorii înșiși admit faptul că în percepția vizuală cîmpul care furnizează informații simultane este mai vast decît în cazul percepției tactile. Ochiul, ca și mîna, se deplasează pentru a obține, prin însumarea unei succesiuni de „poze", imaginea de ansamblu și, în același timp, detaliată a obiectului. Dar, în timp ce mîna trebuie să urmărească efectiv, din aproape în aproape, conturul obiectului pentru a face cunoștință cu el, ochiul se plimbă liber, explorînd obiectul pe o traiectorie aparent întîmplătoare.

---

[1] Zinceko, Lomov și colaboratorii disting două etape esențiale: 1) de investigație și orientare, în care se obține o informație generală în special cu privire la locul obiectului în cîmpul vizual sau tactil și se adaptează receptorul; 2) de urmărire, sau gnostice propriu-zise, în care sînt dezvăluite, printr-o acțiune de explorare, particularitățile obiectului. Analiza acestor mișcări „de urmărire" arată că ele îndeplinesc trei funcții principale: *a)* funcția constructivă, aceea a reconstituirii imaginii obiectului, *b)* funcția de măsurare, prin care, în funcție de durată și de amplitudinea mișcărilor, apreciem dimensiunile obiectului, și *c)* funcția de control și de corijare, realizată în special prin reveniri asupra unor elemente ale figurii insuficient determinate anterior (p. 31—32).

[2] F. S. Rozenfeld, *Particularitățile percepțiilor tactile ale copilului preșcolar* în *Probleme de psihologia copilului*, sub red. lui B. G. Ananiev. București, Edit. de stat, 1951.

[3] V. P. Zincenko și B. F. Lomov, *op. cit.*, p. 36.

Cum se explică faptul că ochiul dispune de un grad mai mare de libertate a mişcărilor sale în explorarea obiectului ? După părerea noastră, explicaţia constă tocmai în faptul că ochiul poate utiliza o cantitate mult mai mare de informaţii simultane decît mîna. Pentru a obţine o imagine propriu-zisă, completă, a obiectului, este necesar ca ochiul să-l „palpeze", ca şi mîna. Dar această „palpare" este ghidată de schiţa primară de ansamblu de care ochiul se poate servi tot timpul.

Aşadar, este incontestabil că percepţia spaţiului reprezintă o structură intermodală, după expresia lui B. G. Ananiev, o structură complexă, eterogenă, care prin ea însăşi, redusă la empiria individuală, nu poate genera reflectarea conceptualizată, abstractizată a spaţiului euclidian-newtonian omogen, continuu şi izotrop.

Structura neomogenă şi anizotropă a spaţiului perceptiv este foarte bine pusă în evidenţă de influenţa exercitată de ansamblul cîmpului perceptiv, tactil sau optic, asupra dimensiunilor şi formelor.

Să relatăm în acest sens rezultatele cercetărilor întreprinse de I. P. Lape [1] privitoare la percepţia tactilă. Autorul a efectuat 42 de experimente de percepere a unor figuri plane şi volumetrice prin pipăire pasivă şi tot atîtea prin pipăire activă. S-a constatat că, în ambele cazuri, forma şi dimensiunile figurii depind de natura liniilor şi a suprafeţelor palpate, în speţă de rugozitatea diferită. Astfel, figura unui romb ale cărui laturi prezentau diferite grade de rugozitate a fost percepută corect numai în 5 cazuri din 21. În rest, figura apărea ca avînd laturi de dimensiuni diferite (pipăire pasivă). Şi în pipăirea activă, deşi erorile se reduceau, apăreau aceleaşi fenomene.

După cum arată autorul corectarea acestor aprecieri greşite se poate obţine printr-o serie de mişcări suplimentare, adecvate ale mîinii.

În ceea ce priveşte cîmpul optic, cercetările întreprinse în ultimii ani de J. Piaget, P. Fraisse, M. Lambercier, E. Vurpillot, A. Rey, T. M. Kunnapas etc. au pus în evidenţă o serie de fenomene extrem de interesante privitoare la heterogenitatea cîmpului perceptiv. În cercetările lui J. Piaget şi ale colaboratorilor săi se porneşte de la acest fapt de bază : aprecierea lungimii unui segment depinde de orientarea privirii noastre.

---

[1] I. P. Lape, *Despre funcţia de măsurare a mîinii*, în „Dokladî Akad. Ped. Nauk RSFSR, 1960, nr. 5, p. 53—56.

În cazul unei comparații perceptive, atunci cînd se utilizează un etalon pentru măsurarea unor elemente variabile are loc o deformare sistematică pe care Piaget și Lambercier o numesc „eroarea etalonului". „...Elementul către care se îndreaptă mai mult privirea (adică, în general, etalonul însuși, atunci cînd variabila este depărtată, dar uneori și variabila, atunci cînd etalonul este apropiat de ea și cunoscut) este sistematic supraevaluat, și aceasta în comparațiile efectuate în planul frontoparietal, ca și în adîncime" [1].

Faptul acesta se explică, după Piaget, printr-un fenomen mai general. „Dacă etalonul este supraevaluat (sau, în anumite cazuri, variabil), aceasta se întîmplă numai pentru că elementul cel mai mult timp privit (sau cel mai des, cel mai intens etc.) apare doar prin acest fapt ca fiind mai mare, ca și cînd obiectul sau regiunea către care se îndreaptă privirea ar determina o dilatare a spațiului perceptiv... Spațiul perceptiv nu este deci omogen, ci este în fiecare moment centrat, iar zona de centrare corespunde unei dilatări spațiale, în timp ce periferia acestei zone centrale este cu atît mai contractată, cu cît este mai mare depărtarea de centru" [2].

Pentru studiul acestei probleme au fost efectuate o serie întreagă de cercetări experimentale [3]. Astfel, în 1954-1956 Piaget, Morf, Rey și Fraisse au studiat procesul comparației între două elemente egale și apropiate. Pe un fond negru erau prezentate 3 tije de fier de 1 mm diametru, avînd cîte un vîrf alb. Subiectul fixează spațiul *AB* dintre două tije și apoi, în vedere directă, trebuie să deplaseze a treia tijă *(c)* pînă cînd spațiul *AC* apare egal cu *AB*. Cu acest procedeu se verifică fenomenul supraaprecierii perceptive a elementului fixat de privire.

Pe baza unei alte serii de cercetări, A. Rey și M. Richelle au tras concluzia că, în general, tot ce este perceput în mod indistinct este subestimat [4].

Cercetările întreprinse de P. Fraisse, S. Ehrlich și E. Vurpillot, de P. Fraisse și P. Vautrey, ajung la concluzia că în afară

---

[1] Jean Piaget, *La psychologie de l'intelligence*, Paris, Colin, 1947, p. 87.

[2] Jean Piaget, *op. cit.*, p. 87—88.

[3] Vezi în această problemă și raportul lui J. Piaget la simpozionul internațional de psihologie de la Louvain, septembrie 1955 *(La Perception*, Symposium, PUF, 1955).

[4] A. Rey și M. Richelle, *Contribution à l'étude de l'effet de sous-estimation des données périphériques dans la centration du regard*, în „Arch, de Psych.", 1955, nr. 35, p. 25—40.

de efectul de cîmp, provocat de fenomenul de centrare, intervin şi alţi factori, ca durata percepţiei, vîrsta subiecţilor şi nivelul lor cultural [1].

Eterogenitatea şi anizotropia percepţiei vizuale a spaţiului este foarte bine pusă în evidenţă de iluziile optico-geometrice. Au fost publicate numeroase cercetări în acest sens, aşa încît nu vom insista. Amintim numai cunoscuta iluzie a supraestimării segmentului vertical în raport cu orizontala (fig. 1).

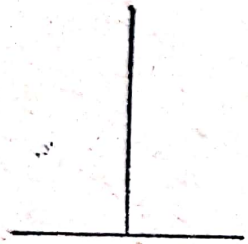


Fig. 1

Aceasta este o dovadă pregnantă a anizotropiei percepţiei vizuale a spaţiului.

Această iluzie a fost cercetată de Fraisse, Kunnapas etc., experimentîndu-se cu diferite variante (forma T răsutrnat, forma L, divizarea unuia dintre segmente etc.).

Pentru a sintetiza diferitele rezultate experimentale, Piaget a încercat să formuleze „legea centrărilor relative" pe baza unui model probabilist [2].

Deosebit de interesante sînt în această problemă cercetările efectuate de E. N. Sokolov privitoare la modelele probabiliste ale percepţiei [3].

Scopul autorului a fost acela de a găsi un model probabilist care să permită exprimarea unor imagini perceptive, reduse la un sistem binar de simboluri („negru" şi „alb"), ceea ce va servi la construirea unor „maşini perceptive".

În problema discutată de noi, ceea ce ne interesează este următoarea concluzie a autorului: „Nu toate punctele imaginii dau aceleaşi informaţii care să permită diferenţierea imaginilor. Purtătorii principali de informaţie sînt punctele critice. Restul elementelor imaginii, în cazul sistemului dat de ipoteze, formează partea care este purtătoarea informaţiei de prisos. Elementele comune ale etaloanelor nu joacă nici un rol în creşterea probabilităţii uneia din ipoteze" [4].

---

[1] O expunere succintă a discuţiilor în această problemă se găseşte în articolul lui E. Vurpillot, *La loi des centrations relatives de Piaget*, în „Bul. de Psych.", 169/XIII, 1959, nr. 1—2.

[2] J. Piaget, *Essai d'une nouvelle interprétation probabiliste des effets de centration, de la loi de Weber et de celle des centrations relatives*, în „Arch. de Psych.", 1955, nr. 35, p. 1—24.

[3] E. N. Sokolov, *Modelul probabil (probabilist?) al percepţiei*, în „Anal. rom.-sov.", serda psih.-ped., 1960, nr. 4, p. 62—75.

[4] E. N. Sokolov, *op. cit.*, p. 75.

Scanned with OKEN Scanner

Se înțelege că asemenea „puncte critice" în structura cîmpului vizual, care nu sînt determinate de alte efecte decît de distribuția spațială a ansamblului perceptiv, trebuie considerate ca elemente *active* ale figurii, ca exprimînd și în același timp influențînd o anumită structurare a spațiului perceptiv vizual [1].

În sfîrșit, cîteva cuvinte asupra „spațiului grafic". Au fost consacrate multe cercetări acestei probleme, mai ales în legătură cu evoluția desenului infantil. Ne vom referi la un studiu mai recent semnat de Henri Wallon și Liliane Lurçat. Este foarte important faptul că autorii studiului se situează pe poziția justă a raportării „spațiului grafic" la spațiul obiectiv. „Spațiul grafic al copilului — scriu autorii —, adică porțiunile de suprafață (perete, tablă, foaie de hîrtie) pe care el le umple de semne, face parte din spațiu în sensul curent al cuvîntului, adică dintr-un mediu presupus neutru, fără limite definite, omogen, cu trei dimensiuni, în care apare ca fiind conținut, tot ce există ca obiecte sau ca forțe materiale" [2].

Care sînt raporturile dintre „spațiul grafic" și spațiul obiectiv? „Raportul nu este numai de la parte la întreg — scriu autorii. Spațiul grafic este calitativ diferit; el este spațiu funcțional. El nu este neutru, ci orientat sistematic; el are limite care nu au numai o valoare negativă, ci pot avea o influență decisivă asupra amenajării și utilizării sale; nu este omogen, el este impregnat de elemente posturale, dreapta stînga, sus și jos; el nu are decît două dimensiuni și e necesar, pentru a reprezenta a treia dimensiune, să se recurgă la artificii speciale" [3].

---

[1] În problema raportului dintre percepție și teoria informației, vezi și studiul lui A. Ombredane *Perception et information*, publicat în volumul *La Perception*, Symposium, citat mai sus. Explicația în termeni de probabilitate și informație a constituirii percepției este în acord cu ideile dezvoltate de E. N. Sokolov.

După Ombredane percepția se manifestă ca o grupare mai mult sau mai puțin redondantă de informații utile pe care cel ce le percepe le-a obținut din cîmpul stimulant în cursul explorării perceptive. În concepția lui Sokolov, redondanța este rezultatul prezenței unor puncte de eficiență minimă în figură care nu influențează probabilitățile ipotezelor cu privire la imaginea cercetată.

Potrivit demonstrației lui Ombredane, cele trei aspecte relevate de Bruner și Potsman (1946, 1947, 1949) — selecție, accentuare, fixare — în constituirea percepției pot fi fundate probabilist. De altfel, momentul accentuării corespunde cu „efectul-etalon" al lui Piaget-Lambercier.

[2] H. Wallon și L. Lurçat, *L'espace graphique de l'enfant*, în „Journal de psychologie normale et pat.", 1959, nr. 4, p. 427.

[3] *Ibidem*, p. 427.

Scanned with OKEN Scanner

Evident, este vorba aici, de fapt, numai de *reprezentarea grafică* a unor realităţi spaţiale. Dar sistemul acesta de forţe, de influenţe reciproce care iau naştere în structura cîmpului perceptiv, în perceperea imaginii grafice nu este generat de un grafism pur, independent de raporturi spaţiale obiective. Aceasta ar fi un nonsens. Este vorba, în perceperea imaginii grafice, de raporturi spaţiale reale, obiective, dar reduse la o pojghiţă bidimensională. Efectele de cîmp care iau naştere sînt modificări de dimensiuni, distanţe şi proporţii, modificări de unghiuri, atracţii sau respingeri între elemente.

Într-un cuvînt, toată această distorsionare mai mult sau mai puţin accentuată a figurilor sub influenţa unor relaţii pur spaţiale nu este decît expresia eterogenităţii şi anizotropiei spaţiului perceptiv (mai accentuate în cazul spaţiului grafic, deoarece controlul semnificaţiei concrete a relaţiilor obiective este aici diminuat sau anulat).

★

Faptele expuse mai sus referitoare la structura percepţiei şi reprezentării spaţiale pledează pentru această teză: spaţiul euclidian — care, după cum am văzut, reprezintă o reflectare atît de adecvată sub raportul practicii curente, a spaţiului obiectiv, încît a ajuns să fie considerat, într-o lungă etapă a istoriei ştiinţelor, ca o reflectare definitivă, imuabilă — nu poate fi considerat a constitui o „intuiţie" pură. Imaginea unui spaţiu omogen şi izotrop, continuu şi infinit nu poate fi extrasă nemijlocit din percepţiile şi reprezentările noastre spaţiale, nu este un reziduu ultim al cunoaşterii senzoriale după ce toate celelalte proprietăţi sînt considerate eliminate.

În comportarea noastră curentă, în percepţiile şi reprezentările noastre obişnuite, spaţiul apare ca *structurat,* cu poziţii privilegiate, cu „gradiente" de tonalitate afectivă, polarizat pe direcţii fundamentale: sus-jos, dreapta-stînga, brăzdat de „rute", dilatîndu-se comprimîndu-se, în funcţie de orientarea privirii, de durata percepţiei, de intensitatea atenţiei, *dependent deci, în ultimă instanţă, de natura obiectelor pe care le conţine.*

Spaţiul nu poate fi considerat, ca în filozofia kantiană, o formă pură a sensibilităţii, o „intuiţie pură", în primul rînd pentru că nu este pur şi simplu intuiţie. Reflectarea subiectivă a spaţiului ca un spaţiu omogen, izotrop, continuu şi infinit se dovedeşte a fi *o reflectare conceptuală,* produs al unei îndelungate practici sociale şi al dezvoltării cunoştinţelor ştiinţifice.

Scanned with OKEN Scanner

Viața socială *nu este creatoarea* acestor categorii fundamentale — spațiu, timp, cauzalitate —, cum susținea Durkheim. Dar dezvoltarea progresivă a acestor categorii ale cunoașterii, apropierea lor de o reflectare din ce în ce mai adecvată a realității obiective, este rezultatul practicii sociale.

Pentru formarea ideii de spațiu, în sens euclidian, este necesară în primul rînd confruntarea și coordonarea diferitelor puncte de vedere din care aceeași persoană privește un obiect sau un ansamblu de obiecte.

Din această confruntare și coordonare a imaginilor între ele și din raportarea permanentă a acestora la activitatea practică, omul își formează ideea independenței relative a datelor spațiale obiective de propria persoană. Dar ideea unui spațiu absolut, ca un cadru total independent de conținutul material (deci nu numai independent de punctul de vedere de moment al persoanei) nu se poate realiza decît printr-o îndelungată și complicată confruntare interindividuală, socială a punctelor de vedere, deja sintetizate în primă instanță la nivelul individului, și printr-o raportare nu mai puțin îndelungată și complicată la *practica socială*.

Dar la ce servește relevarea acestor calități ?

Ea este necesară mai ales la acțiunea de *metrizare* a spațiului. Fiind absolut identic în toate punctele și direcțiile, fiind nelimitat și divizibil la infinit, spațiul poate fi împărțit în *subcadre numerabile*, poate fi *integral cantificat*, după alegerea unui punct de origine. O asemenea rețea infinită de cadre, de casete absolut identice, uniforme, universal și permanent valabile, devine o necesitate în primul rînd pentru înțelegerea reciprocă dintre oameni asupra lui „unde?“ și apoi pentru descrierea fenomenelor mecanice. Pentru eliminarea distorsiunilor perceptive, pentru eliminarea pozițiilor și direcțiilor privilegiate, numai experiența individuală nu este suficientă, ci este necesară cooperarea în cadrul practicii sociale.

Metrizarea spațiului presupune în același timp și descoperirea unei alte caracteristici fundamentale a sa, și anume *tridimensionalitatea*. Ni se pare cu totul limpede că tridimensionalitatea spațiului nu derivă direct din experiența senzorială a individului. Ca să descriem o sferă avem nevoie numai de o singură „dimensiune“ : raza ei, luînd cuvîntul de dimensiune în sensul curent și limitîndu-ne la datele percepției. Ca să determinăm o elipsă avem nevoie de două dimensiuni: axele ei. Ca să determinăm un paralelipiped avem nevoie de trei dimensiuni :

Scanned with OKEN Scanner

lungimea, lăţimea, înălţimea. Ca să descriem un obiect oarecare, să zicem un scaun, avem nevoie de multe dimensiuni. Nu vedem cum proprietatea tridimensionalităţii spaţiului s-ar putea desprinde numai din experienţa senzorială. Ideea celor trei dimensiuni nu apare în legătură cu forma spaţială a obiectelor şi nici în legătură cu reprezentarea generală a spaţiului ca un „gol" nelimitat, ci în legătură cu o anumită problemă foarte precisă: *determinarea poziţiei* unui punct în spaţiu, sau, mai exact, determinarea poziţei unui punct în raport cu alt punct.

Atunci se constată faptul că pentru aceasta avem nevoie de trei măsurători, de trei date, nici mai mult, nici mai puţin. Reflectarea subiectivă a tridimensionalităţii spaţiului este deci o reflectare *conceptuală*, aşa cum sînt şi celelalte proprietăţi.

Aşadar, rezumînd, putem spune : reflectarea mintală a spaţiului sub forma spaţiului „clasic", newtonian nu derivă direct din experienţa senzorială, nu este o simplă imagine intuitivă „purificată", cum ar cere teoria kantiană. Dar spaţiul clasic nu este nici aprioric, cum ar cere această teorie. Cea mai bună dovadă este evoluţia ideii de spaţiu despre care am vorbit în paginile precedente.

Reflectarea mintală a spaţiului obiectiv sub forma spaţiului „clasic" are o structură conceptuală. Ea a fost elaborată de practica socială, printr-o vastă activitate de confruntare, coordonare şi sintetizare, şi reprezintă o etapă extrem de importantă şi, între anumite limite, încă actuală, în evoluţia istorică a cunoaşterii proprietăţilor spaţiului obiectiv.

Integrarea completă a studiului spaţiului, a geometriei, în domeniul matematicilor, adică în domeniul în care socotim că putem obţine adevărurile exclusiv pe cale raţională, ţine tocmai de această etapă. *Spaţiul conceput ca un cadru omogen, izotrop şi continuu, total pasiv în raport cu celelalte fenomene materiale, spaţiul conceput ca INTEGRAL PURIFICABIL poate constitui un domeniu de legitate tot atît de închis şi izolabil ca şi cel al raporturilor cantitative, al numerelor.*

Gîndirea, mişcîndu-se în cadrul acestui domeniu şi respectînd legile logicii, va putea construi raţionamente oricît de îndelungate, ale căror concluzii vor fi întotdeuana adevărate în măsura în care şi premisele sînt adevărate.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL V-lea

GEOMETRIA ŞI RAŢIONAMENTUL EXPERIMENTAL

Cu aceste consideraţii apare alt aspect al problemei nu mai puţin spectaculos decît cel precedent: posibilitatea de *a crea* în matematici, posibilitatea de a descoperi adevăruri noi, deşi fiecare propoziţie matematică, pentru a putea fi considerată certă, trebuie să poată fi prezentată ca derivată exclusiv din adevăruri anterior stabilite (afară de axiome).

Teza noastră, care de altfel nu este nouă, este aceea că şi matematicianul, preocupat să găsească noi adevăruri în domeniul său, ca şi orice om de ştiinţă, nu extrage pur şi simplu adevărurile noi din cele precedente, ci le caută şi le construieşte. Iar această căutare şi construcţie au forma generală a *experimentării,* ca în orice domeniu de investigaţie ştiinţifică.

Dificultatea acceptării unei asemenea afirmaţii provine din faptul că se consideră, de obicei, geometria, şi matematica în genere, dat fiind o ştiinţă prin excelenţă *demonstrativă*. Această teză este implicată şi în teoria apriorismului kantian. Geometrul, pornind de la un număr de axiome — de adevăruri generale incontestabile —, le scoate, le deduce pe celelalte din primele, aşa cum scamatorul scoate diverse obiecte din jobenul lui miraculos.

Se confundă aici două lucruri cu totul deosebite: modul în care geometrul îşi fundează certitudinea rezultatelor găsite şi modul în care efectiv le găseşte. Niciodată, sau aproape niciodată, cele două căi nu sînt identice.

Într-o carte interesantă, apărută în urmă cu cîţiva ani, matematicianul G. Polya [1] urmăreşte tocmai mersul gîndirii în des-

[1] G. Polya, *Les Mathématiques et le raisonnement „plausible"*, Paris, Gauthier-Villars, 1958.

coperirea noilor adevăruri matematice. Folosind exemple din istoria matematicii şi rezolvări de probleme speciale, el dovedeşte faptul că şi în matematică, la fel ca în toate domeniile, descoperirea noilor adevăruri se face pe calea a ceea ce el numeşte „raţionamentul plauzibil", adică printr-o succesiune de încercări şi ipoteze care duc treptat, prin restrîngeri şi precizări succesive, la stabilirea adevărului incontestabil.

Pentru că această idee ni se pare deosebit de importantă, vom reproduce aproape integral unul dintre exemplele cele mai sugestive din cartea lui G. Polya [1]. Etapele prin care trece gîndirea în căutarea soluţiei sînt în fond — aceasta este teza la care ne raliăm — etapele unui *raţionament experimental,* ale unui raţionament *investigator.*

Problema pe care autorul îşi propune s-o rezolve în exemplul citat, este o problemă de geometrie în spaţiu referitoare la *poliedre.* Un poliedru este format dintr-un număr de feţe, vîrfuri şi muchii. Prismele, piramidele sînt poliedre. Dacă două poliedre au un număr diferit de *feţe,* vor avea — presupunem— şi un număr diferit de vîrfuri sau muchii. Dar există o relaţie stabilă (generală), de pildă între numărul feţelor şi numărul vîrfurilor ?

Putem presupune că, pe măsură ce creşte numărul vîrfurilor, creşte şi numărul feţelor. Dar este acest lucru întotdeauna adevărat ? Aşadar, să ne oprim la această problemă: „Numărul vîrfurilor creşte cu numărul feţelor?". Pentru simplificarea expunerii să notăm numărul feţelor cu F, numărul vîrfurilor cu V şi numărul muchiilor cu M. Deci problema, schematic, se poate formula :

F creşte în mod necesar cu V ?

Cum începem? Se înţelege, în primul rînd vom examina cîteva exemple, adică poliedre particulare. De pildă, în cazul unui cub vom avea:

$$F = 6, \qquad V = 8, \qquad M = 12.$$

$$F = 5, \qquad V = 8, \qquad M = 9$$

O prismă cu baza triunghiulară :

În felul acesta ajungem să examinăm diverse solide (vezi fig. 2).

---

[1] G. Polya, *op. cit.*, p. 21—30.

Scanned with OKEN Scanner

În afară de cub (I) şi prisma cu baza triunghiulară (II), am mai construit: o prismă cu baza pentagonală (III), piramide cu baza pătrată, triunghiulară sau pentagonală (IV, V, VI) un octaedru (VII), un „turn" format dintr-un cub şi piramidă (VIII),

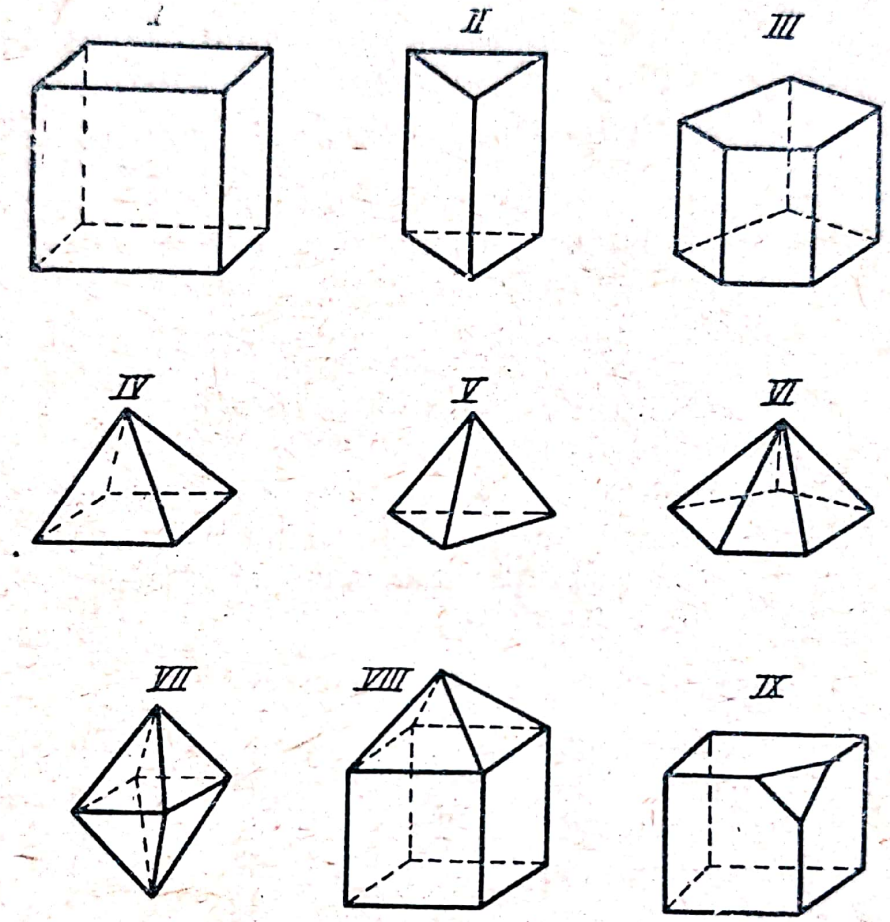


Fig. 2

un cub căruia i s-a „retezat" un vîrf (IX). „Să facem — scrie autorul — un efort de imaginaţie şi să ne reprezentăm aceste solide, unele după altele cu destulă claritate, pentru a putea număra feţele, vîrfurile şi muchiile. Obţinem următoarele rezultate:

		F	V	M
I	Cub	6	8	12
II	Prismă triunghiulară	5	6	9
III	Prismă pentagonală	7	10	15
IV	Piramidă pătrată	5	5	8

V	Piramidă triunghiulară	4	4	6
VI	Piramidă pentagonală	6	6	10
VII	Octaedru	8	6	12
VIII	„Turnul“	9	9	16
IX	„Cubul retezat“	7	10	15

„Figura alăturată seamănă puţin cu un tablou de forme cristaline — spune Polya — şi tabloul de mai sus prezintă analogii cu carnetul de note pe care un fizician îşi înscrie rezultatele experienţelor sale. Să examinăm şi să comparăm figurile şi numerele pe care le-am reunit, la fel cum un mineralog sau un fizician ar examina şi ar compara specimenele sau rezultatele strînse cu preţul unor eforturi mai mari“ [1].

Examinarea tabelului dă un răspuns negativ la întrebarea de mai sus. Dacă vom compara, de pildă, cubul cu octaedrul, vom constata că primul are mai multe vîrfuri, iar al doilea mai multe feţe.

Să mai facem o încercare. Nu cumva creşte numărul muchiilor *(M)* cu numărul feţelor *(F)* sau cu numărul vîrfurilor *(V)*? Pentru a putea răspunde mai uşor, să refacem tabelul în aşa fel încît *M* să fie în ordine crescătoare.

	F	*V*	*M*
Piramidă triunghiulară	4	4	6
Piramidă pătrată	5	5	8
Prismă triunghiulară	5	6	9
Piramidă pentagonală	6	6	10
Cub	6	8	12
Octaedru	8	6	12
Prismă pentagonală	7	10	15
„Cub retezat“	7	10	15
„Turn“	9	9	16

Din nou constatăm că nu există nici o regulă de genul celei presupuse. Cînd *M* creşte de la 15 la 16, *V* scade de la 10 la 9 etc.

Examinînd din nou tabelul, ne vine o idee : dar dacă am considera $F + V$? Într-adevăr, această sumă creşte constant o dată cu *M*. Putem chiar stabili o relaţie mai precisă:

$$F + V = M + 2$$

[1] G. Polya, *op. cit.*, p. 22.

Această relaţie este adevărată în toate cazurile examinate. Pare neverosimil ca o regularitate atît de constantă să fie întîmplătoare şi astfel formulăm ipoteza că nu numai în cazurile observate, ci în toate cazurile, pentru toate poliedrele, numărul feţelor plus numărul vîrfurilor este egal cu numărul muchiilor plus două. Un naturalist experimentat nu acceptă cu uşurinţă o ipoteză. El adună noi fapte şi imaginează noi experienţe pentru a o verifica. Vom face acelaşi lucru. Să considerăm ultimele două poligoane regulate: icosaedrul (cu 20 de feţe) şi dodecaedrul (cu 12 feţe).

Datele sînt	F	V	M
Icosaedrul	20	12	30
Dodecaedrul	12	20	30

Ipoteza $F + V = M + 2$ este verificată.

Verificarea poate continua. În ceea ce priveşte prismele şi piramidele se poate generaliza:

	F	S	V
Prismele cu n feţe laterale au ...	$n + 2$	$2n$	$3n$
Piramidele cu n feţe laterale au ...	$n + 1$	$n + 1$	$2n$

Din nou ipoteza se verifică.

După procedeul utilizat mai sus al construirii unor figuri noi prin combinare sau „retezare“ se poate proceda la fel şi cu alte prisme sau piramide. Aşa ajungem să ne gîndim la un poliedru oarecare cu n feţe, pe care aplicăm un „acoperiş“ format dintr-o piramidă. Un raţionament simplu ne arată că vom avea de astă dată (pornind de la poliedrul iniţial) :

$$F + n - 1 \qquad V + 1 \text{ şi } M + n$$

Făcînd calculul, constatăm că ipoteza este din nou verificată (dacă relaţia $F + V = M + 2$ ar fi adevărată pentru orice poliedru).

La fel dacă utilizăm procedeul „retezării“ unui vîrf al poliedrului cu n feţe.

Dar iată că un caz de tip diferit ne obligă să limităm ipoteza.

Să luăm o baghetă lungă cu baza tringhiulară, s-o tăiem în patru segmente şi să le potrivim apoi în aşa fel, încît să

obţinem un poliedru avînd forma unui cadru (fig. 3). De astă dată avem :

$$F = 12, V = 12, M = 24.$$

Formula de mai sus nu se mai verifică şi deci trebuie să ne restrîngem ipoteza. E posibil ca această formulă să fie valabilă numai pentru *poliedrele convexe.*

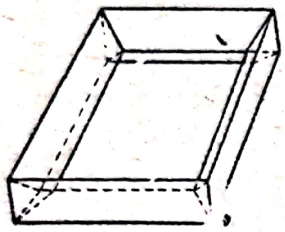


Fig. 3

Astfel se ajunge la o analogie cu *poligoanele convexe.* Raţionamentul continuă pe această cale şi apar noi argumente în sprijinul ipotezei după care formula $F + V = M + 2$ este valabilă pentru toate poliedrele convexe.

„Se consideră matematicile — scrie G. Polya — ca find o ştiinţă demonstrativă. Dar aceasta nu este decît un aspect al problemei. Matematicile încheiate, prezentate sub o formă definitivă, par pur demonstrative şi nu comportă decît demonstraţii. Dar matematicile în gestaţie se aseamănă cu orice altă ştiinţă la acelaşi stadiu de dezvoltare. Înainte de a demonstra o teoremă, trebuie s-o intuiţi; trebuie să intuiţi principiul general al demonstraţiei înainte de a intra în detalii. Trebuie să combinaţi observaţiile şi să vă bizuiţi pe analogii: trebuie să încercaţi şi din nou să încercaţi. Rezultatul muncii creatoare a matematicianului este un raţionament demonstrativ, o demonstraţie ; dar demonstraţia este descoperită printr-un raţionament plauzibil, este întîi ghicită“ [1].

Etapele rezolvării problemei expuse mai sus constituie etapele reale ale desfăşurării raţionamentului, ele sînt un document autentic, deoarece reprezintă mărturia unui matematician dublat de un fin psiholog.

Aşa cum notează autorul, şi matematicianul, asemenea naturalistului, începe prin a aduna diverse exemplare şi le cercetează înfăţişarea din punctul de vedere care-l interesează, *căutînd să descopere o anumită regularitate.* Evident, el nu poate aduna toate exemplarele din clasa respectivă (poliedre). Şi atunci el începe *să experimenteze,* căutînd să descopere o anumită legitate în dependenţa reciprocă a formelor care rezultă din combinaţiile sale. El cuplează o prismă cu o piramidă, reteză vîrful unui cub. Apoi cuplează o piramidă cu un alt gen de

[1] G. Polya, *op. cit.*, p. IX—X.

poliedru etc. şi *constată rezultatele.* Prin constatările sale, el caută să extragă o lege, o formulă, o *teoremă.*

Ce este aici deosebit faţă de modul de experimentare al unui fizician sau al unui chimist? Şi matematicianul ar putea construi corpuri diverse din lemn, de pildă, combinîndu-le, apoi retezînd vîrfuri etc. Dar el nu simte nevoia să procedeze astfel. Toate aceste corpuri sînt numai desenate sau numai imaginate, reprezentate mintal.

Acţiunile cu aceste corpuri, combinările, secţionările sînt, în consecinţă, şi ele numai imaginate. Dar ceea ce este absolut esenţial este faptul că toate corpurile la care se referă geometrul aici şi toate acţiunile pe care le presupune, deşi doar *imaginate, au un sens real, reproduc aspecte ale realităţii materiale, obiective şi sînt realizabile obiectiv.* Faptul acesta ni se pare esenţial. *Experimentul mintal al matematicianului nu este o înlănţuire de ficţiuni. Matematicianul, chiar în actul său inventiv, creator, apelează la memorie mai mult decît îşi dă seama, la experienţa sa reală, obiectivă, concretă.* Ar fi imposibil de imaginat ce se întîmplă cu un cub căruia i se retează un vîrf, ce figură ia naştere în urma acestei operaţii, dacă actul de retezare al unei părţi dintr-un solid n-ar fi fost niciodată efectuat în mod practic. Apelul la experienţa concretă, în cele mai originale combinaţii mintale, este o lege a imaginaţiei valabilă în toate domeniile de activitate.

Ceea ce este specific pentru matematician este faptul că el nu-şi pune problema dacă, de pildă, va izbuti să reteze vîrful, dacă cele două corpuri alăturate vor adera şi rămîn lipite, dacă în locul vîrfului retezat nu va creşte altul la loc, dacă obiectul nu se va sfărîma în timp ce operăm cu el etc. Toate aceste fenomene *sînt excluse* din punctul de vedere din care se situează. De ce ? Pentru că el are în vedere numai *spaţiul pur,* formele, *proprietăţile spaţiale pure.* Dacă anumite elemente spaţiale sînt date, ce rezultă pentru alte elemente spaţiale? La o astfel de întrebare îşi propune matematicianul să răspundă. Or, acest lucru îl poate face el imaginîndu-şi doar experienţe pe care le-ar fi putut realiza şi efectiv. *Şi aceasta pentru că domeniul proprietăţilor spaţiale poate fi conceput, în limite foarte largi, aşa cum am arătat, ca fiind un domeniu independent, la adăpost de imixtiunea unor legităţi provenind din alte domenii.*

Şi fizicianul, şi chimistul, şi biologul combină *mintal* în îndelungate încercări diferite fapte oglindite subiectiv, realizînd

produse pe care, în ultimă instanţă, activitatea practică le dovedeşte viabile.

Dar fizicianul, chimistul etc. au nevoie să se sprijine, mai mult sau mai puţin frecvent, şi pe încercări efective, în care utilizează obiecte, substanţe, fenomene materiale propriu-zise, în timp ce geometrul se mulţumeşte, de la început pînă la sfîrşit, cu abstracţii.

Dacă chimistul apelează atît de des la eprubetă, aceasta nu se întîmplă pentru că experimentul mintal este prin sine steril pentru el, ci pentru că chimistul nu poate asigura unicitatea, simplitatea totală a proprietăţilor de care se ocupă el, nu poate desprinde un domeniu de fenomene ale cărui legi să se dovedească a fi cu totul independente de celelalte domenii. Din această cauză, el nu poate numai printr-o experienţă mintală, cu ajutorul reprezentărilor şi conceptelor, să prevadă cu certitudine rezultatul unor combinaţii pe care nu le-a efectuat niciodată.

El nu se poate asigura împotriva intervenţiei unor legităţi pe care le-a ignorat. Gîndindu-se la două corpuri simple, pe care nu le-a mai întîlnit în combinaţie, el le poate combina mintal, el poate presupune că va obţine un corp compus. Dar el nu e sigur că le va putea combina efectiv şi, în cazul că această combinaţie ar fi posibilă, el nu poate prevedea cu certitudine proprietăţile corpului compus. Experimentul mintal trebuie să fie urmat de experimentul efectiv. Numai după aceea va putea el degaja, într-o formă generalizată desfăşurarea fenomenelor, ceea ce îi va servi la prezicerea desfăşurării unor fenomene de aceeaşi natură sau la emiterea unor ipoteze cu privire la desfăşurarea unor fenomene analoge.

Dacă geometrul îşi imaginează un cerc şi o dreaptă, el poate de asemenea experimenta mintal diferite combinaţii ale acestora: dreapta poate fi exterioară, poate fi tangentă la cerc, poate fi secantă. Aceste experienţe au o semnificaţie obiectivă, reală. Dacă dreapta este dusă tangent, se constată că raza dusă la punctul de contact este perpendiculară pe ea. Dar aici — spre deosebire, de pildă de chimie — previziunea este integrală, înaintea experimentării materiale, surprizele sînt excluse.

Oricînd se va desena un cerc şi se va duce o tangentă, raza va fi perpendiculară în punctul de contact. De ce aceasta? Numai pentru că, în cazul geometriei, operăm cu o categorie suigeneris de proprietăţi, independente de celelalte, deci integral

Scanned with OKEN Scanner

izolabile mintal. Prin aceasta, orice surpriză este exclusă (dacă, bineînţeles, ne limităm la concepţia spaţiului clasic).

Aşadar, noi susţinem că, *în ceea ce priveşte metoda descoperirii noilor adevăruri, între matematician şi ceilalţi oameni de ştiinţă deosebirea nu este de esenţă.* Şi unii şi alţii experimentează, adică asociază în combinaţii noi, neîntîlnite încă, entităţile de care se ocupă, aşteptînd să vadă rezultatele. Bineînţeles, nu este vorba de combinaţii prin simplu hazard, ci de asocieri integrate într-o finalitate, luminate de cunoştinţe deja dobîndite, ghidate strîns de legile logicii.

Caracteristic pentru matematician este doar faptul că el *experimentează mintal în limite extrem de largi,* iar acest lucru îi este permis tocmai datorită faptului că domeniul de legitate cu care operează este, aşa cum am văzut, un domeniu închis (sau relativ închis, în cazul geometrului).

Dar, pe de altă parte, aşa cum spuneam, forma mintală a experimentului nu este un apanaj exclusiv al matematicianului. În creaţia ştiinţifică, în cele mai de seamă momente din istoria ştiinţelor, experimentul mintal a jucat un rol de prim ordin.

Omul de ştiinţă, cercetător al naturii, procedează, pe secţiuni întinse ale activităţii sale, ca şi matematicianul. El imaginează transformări sau asocieri *inedite* de fenomene şi constată rezultatele, la fel cum constată rezultatele unor experimente concret-materiale.

Cu cît este mai mare gradul de separabilitate al domeniului de legitate de care se ocupă, cu atît vor ocupa aceste experimente mintale un loc mai important în investigaţia sa.

Vom cita cîteva exemple din istoria ştiinţelor, pentru a pune mai bine în lumină această teză.

Ne vom referi la trei momente cruciale: legea inerţiei a lui Galileo Galilei, legea gravitaţiei universale a lui Newton şi teoria relativităţii a lui A. Einstein.

Legea inerţiei, după cum ştim, afirmă că un corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare uniform rectilinie dacă nu intervine o forţă din afară. Ceea ce înseamnă că un corp în mişcare rectilinie uniformă îşi va păstra la infinit această mişcare dacă nu intervine o forţă care s-o frîneze.

Or, această lege nu este generalizarea directă a unei experienţe realizabilă concret ! În mod practic, nu putem realiza pe pămînt o situaţie în care un corp să se mişte rectiliniu şi fără acţiunea de frînare a forţei de frecare. Din această cauză a dăi-

Scanned with OKEN Scanner

nuit timp de aproape două milenii vechea concepţie a lui Aristotel după care menţinerea stării de mişcare a unui corp nu poate fi realizată decît prin intervenţia unei forţe.

Galileu constată că, lăsînd să cadă o bilă pe un plan înclinat, aceasta dobîndeşte o acceleraţie proporţională cu înclinarea planului. Aruncînd o bilă în sus sau făcînd-o să alunece de jos în sus pe un plan înclinat, acceleraţia apare din nou, dar de astă dată avem o acceleraţie negativă: viteza scade constant.

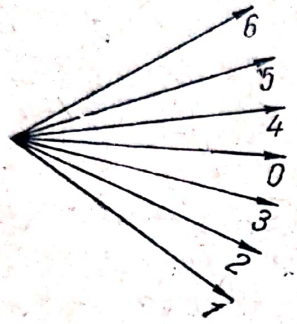


Fig. 4

Să ne imaginăm un plan făcînd un unghi variabil cu orizontala (rotindu-se în jurul lui O). Pe măsură ce reducem înclinaţia planului (poziţiile 1, 2, 3), acceleraţia pozitivă scade. Trecînd dincolo de orizontală obţinem o acceleraţie negativă care e din ce în ce mai mare (în poziţiile 4, 5, 6). Şi atunci ce se întîmplă în zona de trecere, pe orizontală ? Acceleraţia nu mai poate fi aci nici negativă, nici pozitivă. Ea nu mai există : viteza nici nu creşte, nici nu scade. Bila pe planul orizontal se va mişca cu o viteză constantă.

Ideea alunecării la infinit a bilei pe planul orizontal s-a născut din continuarea mintală a unui experiment efectiv, în care, mintal, frecarea a fost eliminată şi în care s-a ţinut seama de *simetria* celor două grupe de fenomene [1].

Einstein şi Infeld descriu în felul următor această experienţă mintală. După ce arată că, practic, ungînd roţile unui cărucior şi netezindu-i drumul, acesta va merge cu atît mai departe, pe baza unui impuls iniţial, cu cît roţile se vor învîrti mai uşor, fără nici o creştere a impulsului, ei continuă: „Să ne închipuim un drum perfect neted şi un cărucior ale cărui roţi să fie lipsite cu desăvîrşire de frecare. În aceste condiţii n-ar mai exista nimic care să oprească căruciorul, astfel că el ar trebui să-şi continue neîncetat mişcarea. La concluzia aceasta se ajunge numai reflectînd asupra unei *experienţe idealizate*, care nu poate fi niciodată realizată efectiv, întrucît este imposibil să se elimine toate influenţele exterioare. Această experienţă idea-

[1] Vezi, în privinţa raţionamentului galilean, capitolul consacrat acestuia („A discovery by Galileo") de Max Wertheimer în *Productive Thinking* New York and London, 1945, p. 160—167.

lizată ne-a dat cheia care a deschis calea pe care s-au pus bazele mecanicii mişcării" [1].

După Einstein şi Infeld, contribuţia cea mai importantă a lui Galileu constă în faptul că el a introdus *o nouă metodă de investigaţie, constînd tocmai în acest gen de experienţe idealizate* care permite desprinderea de imaginile intuitive nemijlocite — şi în mod necesar limitate — şi ridicarea cunoaşterii pe o treaptă mai înaltă, prin abstractizare. „Contribuţia lui Galileu a distrus punctul de vedere intuitiv şi l-a înlocuit printr-altul nou. Acesta este sensul descoperirii lui Galileu" [2].

În descoperirea legii gravitaţiei universale de către Newton, experienţa mintală a jucat, de asemenea, un rol important. Extrapolarea experienţei terestre, lărgirea conceptului de greutate, de gravitate terestră pînă la cel de gravitate universală implică asemenea experienţe idealizate. Dacă un proiectil este azvîrlit în spaţiu, el va descrie o mişcare care este rezultanta compunerii a două mişcări: deplasarea rectilinie sub acţiunea impulsului iniţial şi căderea sub influenţa gravităţii. Cu cît este mai puternic impulsul iniţial, cu atît este mai lungă traiectoria descrisă de proiectil. Dacă impulsul este suficient de puternic, atunci traiectoria se va alungi într-o asemenea măsură, încît proiectilul nu va mai atinge pămîntul, ci, urmînd traiectoria curbă, îl va ocoli şi se va roti în jurul său. Ceea ce trebuie dovedit este faptul că abaterea constantă a Lunii de la traiectoria rectilinie, în aşa fel încît să se menţină pe orbita sa, este determinată de o forţă egală cu forţa gravitaţională.

Newton descrie în felul următor această parte din urmă a experienţei sale mintale. „Dacă în jurul Pămîntului s-ar învîrti mai multe luni, după cum se întîmplă în sistemul lui Saturn şi Jupiter, timpurile lor periodice (prin argumentul inductiv) ar observa legea planetelor descoperită de Kepler, şi de aceea forţele lor centripete ar fi în raport invers cu pătratele distanţelor de la centrul Pămîntului, potrivit propoziţiei I a acestei cărţi. Şi dacă cea mai de jos dintre ele ar fi cea mai mică şi aproape ar atinge vîrfurile munţilor celor mai înalţi, forţa centripetă prin

[1] A. Einstein şi L. Infeld, *Evoluţia fizicii*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1957, p. 11 *(subl. ns.)*.
[2] *Ibidem* p. 12.

care ar fi reţinută pe orbită ar fi aproape egală cu greutatea corpurilor situate pe vîrfurile acelor munţi (potrivit calculului precedent) şi ar face ca aceeaşi lunişoară, dacă ar fi lipsită de toată mişcarea cu care descrie orbita sa, din cauza lipsei forţei centrifuge care o reţine pe orbită, să cadă pe Pămînt, şi anume cu aceeaşi viteză cu care corpurile grele cad din vîrfurile acelor munţi, din cauza egalităţii forţelor lor de cădere. Şi dacă forţa cu care lunişoara foarte mică coboară ar fi deosebită de gravitate şi lunişoara de asemenea : ar fi grea pe Pămînt la fel cu corpurile de pe vîrfurile munţilor: lunişoara din cauza ambelor forţe reunite ar cădea de două ori mai repede. De aceea, cum ambele forţe — şi acestea ale corpurilor grele şi acelea ale lunilor — tind spre centrul Pămîntului şi sînt asemenea şi egale între ele, ele (potrivit regulii I şi II) vor avea aceeaşi cauză. Şi de aceea forţa cu care Luna este reţinută pe orbita sa va fi aceeaşi pe care noi obişnuim s-o numim gravitate şi aceasta îndeosebi ca nu cumva lunişoara din vîrful muntelui să fie lipsită de greutate sau să cadă de două ori mai repede decît obişnuiesc să cadă corpurile grele“ [1].

Toată această expunere prin care Newton dovedeşte identitatea dintre *greutate* — forţa cu care obiectele sînt reţinute pe pămînt — şi *gravitatea universală,* forţa care menţine corpurile cereşti pe orbitele lor, constă într-un *experiment mintal.* Luna este micşorată la dimensiunile unei mingi şi adusă în apropierea Pămîntului, pînă atinge aproape vîrfurile celor mai înalţi munţi. Nu avem nici un motiv să admitem că acest obiect n-ar avea greutate. Dar dacă are greutate, atunci nu mai putem admite că există şi o altă forţă de atracţie care acţionează asupra lunişoarei, pentru că în acest caz ar însemna ca, în devierea ei constantă de la traiectoria rectilinie Luna să „cadă“ de două ori mai repede decît se întîmplă în realitate. Aşadar, forţa prin care Pămîntul reţine obiectele la suprafaţa sa şi forţa prin care menţine Luna pe orbita ei (imprimîndu-i o „cădere“, o acceleraţie care îi deviază constant traiectoria de la traiectoria rectilinie) reprezintă unul şi acelaşi lucru.

---

[1] Isaac Newton, *op. cit.*, p. 322—323.

În acestă experienţă mintală, un ansamblu de fenomene este izolat din întregul complex de fenomene obiective şi *gîndit independent*. Limitele acestui domeniu în interiorul căruia putem face modificări fără a modifica relaţiile esenţiale, sînt determinate de realitatea obiectivă. Ele, aceste limite, sînt descoperite de mintea omenească, dar, odată descoperite şi stabilite, ele permit acest procedeu extrem de important: *realizarea unor experienţe mintale cu respectarea limitelor domeniului.*

Şi acum al treilea moment crucial: teoria relativităţii. Întreaga construcţie a teoriei relativităţii restrînse, aşa cum am mai arătat, se bazează pe analiza ideii de simultaneitate. Pînă la Einstein, simultaneitatea era considerată tacit ca un dat absolut : două evenimente sînt sau nu simultane, independent de sistemele de referinţă în raport cu care sînt considerate. Dar cum putem defini fizic, real simultaneitatea? Să considerăm distanţa *A*—*B* şi punctul *M* situat la mijlocul ei. Vom spune că două evenimente se petrec simultan în punctele *A* şi *B* dacă un observator situat în punctul *M* le va percepe simultan. Acum să presupunem un tren foarte lung care înaintează cu o viteză constantă (fig. 6). Pasagerii trenului îl vor considera pe acesta ca un sistem de referinţă. Toate evenimentele vor fi raportate la tren. Orice eveniment care se petrece undeva de-a lungul drumului, se petrece şi pentru tren. Şi definiţia simultaneităţii poate fi dată în raport cu trenul, exact în acelaşi mod ca şi în raport cu drumul. Se ridică însă următoarea problemă.

Sînt cele două evenimente (de exemplu două fulgere por-

Fig. 5

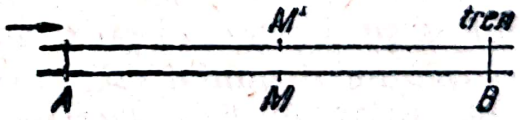


Fig. 6

nite din *A* şi *B*), care în raport cu drumul sînt simultane, şi în raport cu trenul simultane?

Şi Einstein arată în continuare că trebuie să răspundem negativ la această întrebare. Dacă afirmăm că cele două fulgere *A* şi *B* sînt simultane în raport cu drumul, aceasta înseamnă că cele două raze pornite din *A* şi *B* se vor întîlni în punctul *M*,

la mijlocul distanței AB. Evenimentelor A și B le corespund poziții AB, în ceea ce privește trenul. M' este mijlocul distanței AB pentru tren. Acest punct M' coincide cu M în momentul pornirii celor două fulgere. El însă se mișcă — în desenul nostru spre dreapta — cu viteza V a trenului.

În felul acesta, M' merge în întîmpinarea razei pornite din B (din punctul de vedere al privitului de pe drum) și fuge de raza pornită din A. Călătorul din tren va zări deci întîi raza pornită din B și apoi pe cea pornită din A. El va ajunge la concluzia, considerînd trenul ca sistem de referință, că fulgerul din B l-a precedat pe cel din A (în timp ce, pentru observatorul de pe drum fulgerele au apărut ca simultane).

Concluzia acestui raționament este, după cum se știe, că simultaneitatea este relativă. Ea nu poate fi definită decît în raport cu un anumit sistem de referință [1].

Raționamentul acesta al lui Einstein, care se află la baza teoriei relativității restrînse, este și el un exemplu tipic de *experiment mintal*. El nu poate fi realizat practic: trenul la care se referă Einstein nu poate fi construit. Și, totuși, această experiență ideală duce la consecințe imense pentru cunoașterea realității: relativitatea spațiului și a timpului, fuziunea spațiului și timpului într-un continuu cvadridimensional, reconsiderarea tuturor formulelor mecanicii.

Dacă ne referim la teoria generalizată a relativității, găsim de asemenea la baza raționamentului un *experiment mintal:* faimosul experiment cu liftul al cărui pasager nu poate să stabilească dacă este supus acțiunii unui cîmp gravitațional sau dacă liftul se deplasează cu o mișcare uniform accelerată [2]. În acest experiment mintal este necesar, evident, să se presupună că liftul se află în afara oricărui cîmp gravitațional.

Ca și în raționamentul „plauzibil" al lui Polya, care caută o relație între numărul fețelor unui poliedru și numărul vîrfurilor sale, nici în aceste raționamente ale lui Galileu, Newton și Einstein nu avem de-a face numai cu înlănțuiri deductive de

---

[1] A. Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1920, p. 16—18.

[2] A. E. Einstein, *op. cit.*, p. 40—48.

concepte dar nici cu îmbinări diverse de obiecte sau substanţe materiale.

În toate aceste cazuri, cercetătorul acţionează, transformă, construieşte, reuneşte în combinaţii noi *obiecte ideale:* cuburi, prisme, piramide, suprafeţe şi bile perfect netede, luni de dimensiunile unor mingi, trenuri cu viteze apropiate de viteza luminii, un lift situat în afara unui cîmp gravitaţional pe care totuşi îl putem deplasa după voie etc., *obiecte care nu există nicăieri în această formă pură, ideală.*

Acestor obiecte li se îndepărtează o serie de proprietăţi şi li se adaugă altele, în general sub forma trecerii la limită, în aşa fel încît să se obţină ca rezultat *o entitate comparabilă cu un concept,* entitate ideală, posedînd numai atributele cu care definiţia o învesteşte.

Rolul acestei transformări este tocmai acela de a permite gîndirii să supună mintal obiectele respective la un şir întreg de transformări şi combinaţii noi şi să obţină totuşi rezultate previzibile, adică rezultate care se păstrează în interiorul unui domeniu de legitate, definit, controlat de cunoaştere.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL VI-lea

METODA AXIOMATICĂ ŞI REALITATEA OBIECTIVĂ

Din cele arătate pînă aici rezultă deci următoarele.

Progresul în gîndirea matematică se explică prin aceea că şi matematicianul, ca şi ceilalţi oameni de ştiinţă, *experimentează* realizînd combinaţii noi şi consemnînd rezultatele obţinute [1].

Datorită faptului că el operează cu aspecte formale — raporturi cantitative pure exprimate în numere — sau cu proprietăţi spaţiale, detaşabile şi ele, în limite foarte largi, experimentul ia forma *experimentului mintal* pe întregul parcurs al investigaţiei. Rezultatele obţinute din această cauză nu mai trebuie raportate la realitatea obiectivă pentru a fi verificate cît timp ne menţinem în limitele unor aserţiuni cu caracter formal. Garanţia ia forma fundării logice şi ansamblul rezultatelor se resistematizează într-o înlănţuire deductivă. Mergînd pe această cale, se ajunge la axiomatizarea matematicii.

Aşadar, pe scurt: adevărurile matematice sînt certe pentru că sînt fundate deductiv; în acelaşi timp, ele nu sînt tautologii, pentru că descoperirea lor implică un act experimental. Cele două aspecte, în aparenţă contradictorii, sînt simultan posibile, pentru că matematicianul operează numai cu abstracţii.

Şi cu aceasta reapare problema fundamentală: cum se explică acordul matematicilor cu realitatea?

Noi am arătat, încă la începutul lucrării, care este răspunsul filozofiei marxiste. Discuţia însă trebuie acum reluată pen-

[1] Este vorba, bineînţeles, de mecanismul psihologic. Progresul matematicilor este legat de progresul material al societăţii, de progresul tehnicii şi al gîndirii ştiinţifice în ansamblu.

tru cazul special al metodei axiomatice. Metoda axiomatică, după cum se ştie, împinge formalizarea la extrem. În cazul geometriei, care ne interesează aici în mod special, nici un fel de imagini nu mai sînt implicate în raţionament. S-ar părea că, de astă dată, orice punte de legătură cu realitatea obiectivă este ruptă [1].

Problema pe care şi-a pus-o D. Hilbert a fost următoarea: nu poate fi reconstruită întreaga matematică pe baze pur logice, eliminîndu-se integral orice reziduuri intuitive? Dacă o asemenea reconstrucţie este posibilă, atunci toate controversele, nelămuririle care-şi au izvorul în imprecizia elementelor folosite vor fi eliminate.

Or, o asemenea reconstrucţie formală, conceptuală a geometriei euclidiene a fost într-adevăr realizată.

Hilbert a realizat o construcţie logică în care nu face apel la nici un fel de descrieri intuitive ale elementelor cu care operează. El îşi începe faimoasa *Grundlagen der Geometrie* astfel : „Definiţia I. Să considerăm trei sisteme diferite de obiecte : obiectele primului sistem le numim *puncte* şi le notăm cu literele *A, B, C...* ; obiectele sistemului al doilea le numim *drepte* şi le notăm cu literele *a, b, c ;* obiectele sistemului al treilea le numim *plane* şi le notăm cu literele α, β, γ... ; punctele sînt numite *elementele geometriei pe dreaptă;* punctele şi dreptele sînt numite *elementele geometriei în plan;* iar punctele, dreptele şi planele sînt numite *elementele geometriei în spaţiu,* sau *elementele spaţiului.*

Presupunem că punctele, dreptele şi planele se află în anumite relaţii unele faţă de altele, relaţii pe care le exprimăm

[1] Filozofia idealistă a exploatat mult dificultăţile problemei, H. Poincaré, E. Goblat. G. Milhaud, sau neopozitivişti ca Ph. Franck, L. Rougier ajung, în ultimă instanţă, la ideea că matematica este un produs al spiritului. Rougier, de pildă, într-un articol mai recent se exprimă astfel : „Noţiunile matematice nu preexistă convenţiilor care le dau naştere, cu singura condiţie ca aceste convenţii să nu fie contradictorii. Ele nu sînt «descoperite de ochii sufletului»; ele sînt construite de spiritul nostru cu scopul de a face posibile anumite operaţii şi potrivit nevoilor practicii". (L. Rougier, Les pséudo-problèmes, în vol. La méthode dans les sciences modernes, Paris). După cum se vede, L. Rougier nu aduce nimic nou faţă de convenţionalismul lui Poincaré, concepţie idealistă, incapabilă să rezolve problema acordului dintre rezultatele matematicii şi datele realităţii obiective.

prin cuvintele „sînt situate", „între", „congruent", „paralele", „continuu" [1].

Aceste „obiecte" şi aceste „relaţii" nu sînt nicăieri descrise şi, ceea ce este mai important, nu este necesar să fie descrise (aşa cum procedează Euclid).

Dar înseamnă aceasta că elementele respective nu au nici o semnificaţie obiectivă? Dacă n-ar avea nici o semnificaţie obiectivă, atunci întreaga construcţie n-ar avea nici ea nici o semnificaţie şi geometria ar fi lipsită de obiect. De fapt e vorba de cu totul altceva. „Geometria operează cu noţiuni cîştigate din experienţă — scrie N. V. Efimov — şi ca rezultat al unei abstractizări a obiectelor din realitate, luîndu-se în consideraţie numai anumite proprietăţi ale obiectelor reale. Atunci cînd facem demonstraţia strictă a unei teoreme, avem de-a face numai cu aceste proprietăţi, prin urmare numai ele trebuie amintite în axiome şi definiţii. În schimb, toate celelalte proprietăţi pe care ni le imaginăm atunci cînd se aud cuvintele „punct", „dreaptă", „plan" nu joacă nici un rol în construcţia logică a geometriei, ele nici nu trebuie amintite în principiile ei de bază" [2].

Rigurozitatea concluziilor nu se poate obţine decît utilizînd exclusiv entităţi riguros şi integral determinate. Pentru aceasta e necesar să eliminăm din aceste entităţi tot ceea ce este eterogen, tot ceea ce nu a fost prevăzut integral în axiome şi definiţii. Apelul la intuiţie nu mai este permis, pentru că prin intuiţie riscăm să reintroducem, pe uşa din dos, aspecte străine, necontrolate, Dar acest apel nu este nici necesar, pentru că tot ceea ce trebuia afirmat despre entităţile respective a fost integral menţionat în axiome.

Hilbert îşi construieşte sistemul printr-un procedeu de *decantare*. Nu toate adevărurile pot fi deduse. Unele trebuie să joace rolul de fundament, de adevăruri prime, nedemonstrabile, toate celelalte fiind riguros deduse din primele. Aceste adevăruri prime sînt axiomele. Există în sistemul lui Hilbert cinci grupe de axiome corespunzînd celor cinci tipuri de relaţii dintre elementele considerate: 1) 8 axiome de legătură, 2) 4 axiome de ordonare, 3) 5 axiome de congruneţă, 4) o axiomă a paralelelor, 5) 2 axiome de continuitate.

---

[1] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, ed. a VII-a Leipzig-Berlin, Teubner, 1930.

[2] N. V. Efimov, *Geometria superioară*, Bucureşti, Edit. Tehnică, 1952, p. 37.

Problema este de a se reduce la minimum numărul axiomelor utilizate, adică a nu se introduce printre axiome nici o propoziţie care ar putea fi demonstrată prin celelalte. Pe baza lor, în mod pur deductiv şi fără nici un apel la imagini, pot fi obţinute toate propoziţiile geometriei.

„Geometria axiomatică — scrie Ferdinand Gonseth — se mărgineşte la a stabili o canava logică întinsă între noţiunile care n-au altă semnificaţie decît cea care le este conferită de poziţia lor în ţesătura logică“ [1].

În felul acesta dispare în fond deosebirea dintre axiome şi definiţii. „Pe de o parte — scrie A. S. Esenin-Volpin —, în loc să introducem o noţiune nouă prin intermediul unei definiţii, putem, cu acelaşi efect, s-o adăugăm ca noţiune fundamentală, adăugînd şi axioma corespunzătoare acestei definiţii... Pe de altă parte... axiomele pot fi concepute ca definiţii (implicite) ale noţiunilor fundamentale“ [2].

De unde provin aceste axiome? Ele nu pot fi demonstrate. Dar sînt ele simple convenţii, cum susţine Poincaré? Sînt ele propoziţii arbitrare? Care este temeiul încrederii în cele afirmate de propoziţiile respective? Hilbert şi-a putut permite să neglijeze semnificaţia intuitivă a propoziţiilor *după ce* geometria euclidiană a fost construită prin mijloace intuitive, după ce

---

[1] Ferdinand Gonseth, *Les fondements des mathématiques*, Paris, A. Blanchard, 1926, p. 13. Ferdinand Gonseth a devenit, în ultimele decenii, conducătorul unei influente mişcări filozofice occidentale (ale cărei idei sînt răspîndite de revista „Dialectica“). „Această «mişcare» prezintă un mare interes — scrie S. A. Efirov (*Teoria dialectică a lui Ferdinand Gonseth şi materialismul dialectic*, în „Voprosî filosofii“, 1958, nr. 8), fiind pe de o parte o expresie a dezvoltării ştiinţei bazate pe legi obiective, a tendinţei gîndirii ştiinţifice metodologice occidentale de a-şi însuşi metoda dialectică, iar pe de altă parte o oglindire a greutăţilor insurmontabile pe care le întîmpină încercînd să-şi atingă scopul pe căi în afara filozofiei marxiste“ (p. 64). Concepţia lui Gonseth prezintă interes pentru noi mai ales prin faptul că într-o serie de aspecte se apropie de materialismul dialectic. Din păcate însă, nesituîndu-se deschis şi integral pe poziţiile filozofiei marxiste, F. Gonseth introduce adeseori diverse teze kantianiste, pozitiviste, convenţionaliste. „Limitîndu-se la o sferă relativ restrînsă de fenomene — observă Efirov —, alunecînd uneori spre relativism şi convenţionalism, această teorie sesizează totuşi soluţia justă a unor probleme atît de importante pentru metodologia ştiinţifică şi teoria cunoaşterii, ca, bunăoară, corelaţia dintre adevărul absolut şi relativ, dintre dialectica esenţei şi fenomenului, trecerea de la o esenţă de un anumit ordin la esenţa de un ordin următor“ (Efirov, *op. cit.*, p. 76).

[2] A. S. Esenin-Volpin, *Despre metoda axiomatică*, în „Voprosî filosofii“ 1959, nr. 7, p. 158.

Scanned with OKEN Scanner

întregul eşafodaj a fost realizat, urmîndu-se pas cu pas indicaţiile intuiţiei, ale evidenţei, ale practicii.

Hilbert nu a construit el geometria. El n-a făcut decît această muncă *de decantare,* care, la drept vorbind, a fost o operă grandioasă a minţii omeneşti, decantare care i-a permis să nu mai recurgă la intuiţie.

Dar, în cele 20 de axiome şi în modul lor de grupare, o imensă practică umană îşi spune cuvîntul.

Punctul, dreapta, planul nu sînt definite de la început pentru că nu pot fi definite. Dar înseamnă aceasta că întreaga geometrie s-a clădit pe ficţiuni? Punctul, dreapta, planul au pătruns în geometrie pentru că au pătruns în primul rînd în practica umană, apoi în eforturile de interpretare şi descriere a realităţii obiective. Fiecare crede că ştie ce este un punct, ce este o linie dreaptă, dar, cînd e obligat să dea o definiţie riguroasă, dă înapoi. Înseamnă aceasta că este vorba de ficţiuni? Aceasta înseamnă doar că sensul intuitiv al acestor termeni pe care-l acceptăm *grosso modo,* fără analiză — pentru că e suficient practicii curente —, comportă un anumit grad de impreciziune. Această imprecizie este eliminată în axiomatica lui Hilbert, tocmai prin faptul că fiecare termen utilizat are exclusiv semnificaţia pe care i-o asigură sistemul de axiome. Imprecizia nu reapare decît atunci cînd încercăm să redăm termenilor un sens intuitiv.

Să citim mai atent axiomele. Fiecare termen folosit, luat din limbajul curent, aduce cu sine o imensă practică cristalizată. Nu definim punctul, dreapta şi planul. Lăsăm ca relaţiile dintre ele — „sînt situate", „între", „congruent" etc. — să reiasă din axiome. Dar „oricare", „diferit", „nu mai mult", „singur", „cel puţin", „poate fi", „comun" etc. etc. ?

Cele 20 de axiome — pe care le acceptăm, nu orbeşte, ci pentru că întreaga experienţă umană ne suflă la ureche: le poţi accepta fără grijă —, introduse în maşina logicii, pot da naştere unui număr imens de combinaţii. Dar geometria nu este un catalog al tuturor combinaţiilor posibile de axiome. Geometrul caută, construieşte, încearcă. El nu dibuie la întîmplare. Căutările sale au, în fiecare moment, *un sens,* o direcţie. Şi acest sens al căutărilor este determinat de experienţa lui anterioară, de sugestiile realităţii, în ultimă instanţă de proprietăţile obiective ale spaţiului, pe care, în fond, nu le ignorează şi nu le poate ignora.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele investigaţiilor sale concordă cu realitatea, pentru că axiomele sale concordă cu realitatea (şi în măsura în care concordă) şi pentru că construcţiile sale mintale sînt controlate de realitate prin intermediul legilor logicii. Demonstraţia unei teoreme nu mai are nevoie să recurgă la evidenţa intuitivă, la figuri, la imagini spaţiale, după ce teorema a fost găsită, nu pentru că sensul obiectiv a dispărut, ci pentru că aparatul logic a reţinut din figuri, a conceptualizat tot ceea ce era necesar pentru a se realiza o construcţie riguros deductivă. „Matematica — arată pe bună dreptate F. Gonseth — nu poate fi decît în mod artificial, decît în aparenţă detaşată de fundamentele ei intuitive şi de prelungirea ei în real. Axiomatica, singură, nu este alfa şi omega matematicilor; ea nu este, în fond, decît o metodă şi, fără a-i nega întreaga importanţă, nu i se poate acorda decît un rol comparabil cu cel al legislatorului... Nu există vreun domeniu al matematicii, oricît de mic ar fi, unde axiomatica să fie suficientă prin ea însăşi“ [1].

După cum se ştie, încercarea lui Hilbert de formalizare integrală a matematicii a suferit o înfrîngere. Matematicianul austriac Gödel a demonstrat că nici măcar aritmetica numerelor naturale nu poate fi formalizată complet. „Rezultatul lui Gödel a dezvăluit, cu toată evidenţa, dialectica interioară a matematicii, care nu admite ca vreunul dintre domeniile ei să fie epuizat printr-un sistem de calcul formal. Chiar infinitatea cea mai simplă, aceea a şirului numerelor naturale, s-a dovedit inepuizabilă printr-o schemă finită de simboluri şi reguli de operaţie cu acestea [2].

După ce această „canava logică“ a axiomaticii a fost realizată, s-a constatat un fapt surprinzător: ea nu convenea numai geometriei elementare (adică sensului intuitiv, curent al noţiunilor de punct, dreaptă, plan), ci şi unei serii intregi de alte modele intuitive.

Aşa, de exemplu (după Gonseth), se poate realiza o geometrie care să corespundă perfect axiomaticii hilbertiene în felul următor: Fie *0* un punct în plan în geometria elementară. În afară de *0*, toate punctele din plan vor fi de asemenea numite puncte. Dar cercurile, trecînd prin punctul *0*, vor avea rolul de drepte şi unghiul dintre două asemenea cercuri va fi unghiul

[1] F. Gonseth, *op. cit.*, p. 13.
[2] A. D. Aleksandrov, în *op. cit.*, vol. I, p. 101.

Scanned with OKEN Scanner

a două drepte. Distanța dintre două puncte A și B va fi reprezentată prin expresia:

$$\text{cotg } \widehat{OB} - \text{cotg } \widehat{OA},$$

în care $\widehat{OA}$, de exemplu, reprezintă semiunghiul la centru corespunzînd arcului OA al cercului OAB. Orice teoremă valabilă pentru modelul M exprimă și o proprietate exactă pentru a doua interpretare [1].

Pe de altă parte, pentru același model M putem construi un alt sistem de axiome decît cel construit de Hilbert [2].

Iată deci un fapt extrem de interesant: între sistemul formal de exprimare a propozițiilor geometriei și sistemul de imagini intuitive nu există o corespondență strictă. Lucrurile se petrec, într-o anumită măsură, așa cum se petrec cu limba ca mijloc de comunicare ; aceeași situație poate fi exprimată utilizînd mijloace lingvistice diferite, iar același grup de cuvinte poate avea semnificații deosebite, în funcție de context sau de împrejurări.

Cum este posibil ca același sistem de axiome să poată fi concretizat în diverse modele intuitive și același model intuitiv să poată fi formalizat în diverse sisteme axiomatice? Rezultă de aici că între planul conceptual și cel intuitiv nu există, în fond, nici o interdependență și că, mai departe, între sistemul axiomatic și realitatea obiectivă nu există nici o relație determinată?

Faptul că un costum croit pentru o anumită persoană se potrivește și altor persoane și că aceleiași persoane i se potrivesc și alte costume nu înseamnă că între costum și persoana care-l îmbracă nu există nici o legătură. Dar relația nu este de *identitate*, ci de *adecvare*. Costumul este croit pe măsura unor anumite dimensiuni ale persoanei și nu are în vedere alte considerente, ca, de pildă, culoarea părului sau forma capului.

Sistemele axiomatice *nu descriu* pur și simplu modelele intuitive în toate detaliile lor, ci exprimă *într-o formă deductivă* relațiile spațiale esențiale. Ceea ce se cîștigă este însăși forma deductivă, riguroasă. Ceea ce se pierde, ceea ce se sacrifică sînt anumite precizări de ordin intuitiv. Ceea ce se păstrează sînt relațiile esențiale. Apare astfel posibilitatea unui anumit joc. După ce scoatem tiparul axiomatic, constatăm că el admite

[1] F. Gonseth, *op. cit.*, p. 14.
[2] A. S. Esenin-Volpin, în *op. cit.*, p. 159.

Scanned with OKEN Scanner

şi alte conţinuturi intuitive, şi aceasta tocmai pentru că l-am abstractizat pînă într-atîta încît să capete structura deductivă. Se înţelege însă că nu orice alte conţinuturi sînt adecvate, ci numai *anumite* conţinuturi intuitive. Între toate acestea există *obiectiv*, o unitate structurală exprimată în sistemul comun de axiome.

In al doilea rînd, din punct de vedere strict logic, nu numai geometria euclidiană cu axiomatica ei poate fi admisă, ci şi alte geometrii ale căror axiome fundamentale vin în contradicţie, cel puţin în parte, cu axiomele geometriei euclidiene.

Pornind de la asemenea considerente, H. Poincaré a susţinut că axiomele geometriei sînt *convenţii*. Ele nu pot fi judecăţi sintetice apriori, arată Poincaré, pentru că în acest caz nu am admite şi posibilitatea unor axiome contrare, ceea ce este adevărat.

Ele nu pot fi nici adevăruri experimentale, pentru că geometria se ocupă de entităţi ideale şi cu acestea nu se poate experimenta, arată în continuare Poincaré. „Ele sînt deci convenţii; alegerea noastră printre toate aceste convenţii posibile este ghidată de fapte experimentale ; dar această alegere rămîne *liberă* şi nu este limitată decît de necesitatea de a evita orice contradicţie; ...o geometrie nu poate fi mai adevărată decît alta; ea poate fi numai mai comodă“ [1].

Albert Einstein şi-a manifestat dezacordul cu acest punct de vedere. Soluţia propusă de el este următoarea.

Einstein admite, ca şi Poincaré, că „aceste axiome sînt creaţii libere ale minţii umane. Toate celelalte propoziţii ale geometriei sînt inferenţe logice obţinute din acestea (care trebuie luate numai în sens nominalist)“ [2]. Problema acordului geometriei pure cu realitatea nu se pune. „...O asemenea expunere purificată a matematicii face evident faptul că matematica, ca atare, nu afirmă nimic cu privire la obiectele intuiţiei noastre sau obiectele **reale.**

În geometria axiomatică, cuvintele punct, linie dreaptă etc. reprezintă numai scheme conceptuale goale“ [3].

De aici încolo însă Einstein se deosebeşte de Poincaré. Matematica dobîndeşte un sens obiectiv numai prin adăugarea unor semnificaţii fizice conceptelor ei. Pentru Poincaré, şi sensul fizic acordat acestor concepte (modelul intuitiv, fizic, pe care

---

[1] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, p. 66—67.
[2] Albert Einstein, *Geometry and experience*, în *op. cit.*, p. 234.
[3] *Ibidem*, p. 234.

trebuie să-l alegem) este arbitrar: datele realităţii pot fi exprimate tot atît de bine în termeni de geometrie euclidiană ca şi în termeni de geometrie neeuclidiană. Einstein însă consideră că această alegere nu se mai poate face ca urmare a unui simplu joc al spiritului.

Punînd în legătură propoziţiile geometriei cu datele realităţii (de pildă făcînd să corespundă corpul ideal din geometrie cu corpul solid din lumea fizică), obţinem *o anumită geometrie*. „Conform cu opinia susţinută aici, problema dacă acest continuum are o structură euclidiană, riemanniană sau altă structură este o chestiune de fizică, căreia trebuie să i se răspundă prin experienţă, şi nu o chestiune de convenţie, în care alegerea se face pe motive de oportunitate“ [1].

În această ultimă afirmaţie, Einstein are, fără îndoială, dreptate, dar cu aceasta el nu a răspuns la întrebarea fundamentală pe care a pus-o în fruntea articolului său: cum este posibil acordul matematicilor cu realitatea? Pentru că şi el, ca şi Poincaré, consideră matematicile ca „o creaţie liberă“ a minţii omeneşti. Acordul cu realitatea nu apare, după Einstein, în confruntarea matematicii cu realitatea, ci şi confruntarea unei matematici, în speţă a unei *geometrii,* denumită de el *practică* (a unei geometrii deci în care conceptele au dobîndit un sens fizic) cu realitatea. Aceasta este, în fond, sensul afirmaţiei sale : „...În măsura în care propoziţiile matematice se referă la realitate, ele nu sînt sigure ; şi, în măsura în care sînt sigure, ele nu se referă la realitate“ [2].

Acest punct de vedere ar fi valabil dacă matematicile ar fi o simplă listă de simboluri arbitrar alese. Atunci, firește, ar fi lipsit de sens să cerem simbolurilor să exprime un fapt real înainte de a fi precizat semnificaţia lor.

Dar lucrurile nu stau aşa. *Entităţile şi teoremele matematicilor pure oglindesc aspecte — este drept, extrem de generale — ale realităţii, chiar în forma lor abstractă pură, axiomatizată.* Ceea ce se oglindeşte nu sînt obiecte concrete sau relaţii particulare, ci relaţii extrem de generale. Dacă un asemenea acord al matematicilor pure cu realitatea nu ar exista *înainte de a se preciza semnificaţia fizică a termenelor,* atunci el nu ar apărea nici după această precizare. Şi aceasta pentru că, aşa cum spuneam, domeniile matematicii nu sînt liste de simboluri,

---

[1] Albert Einstein, *Geometry and experience,* în *op. cit.*, p. 238.
[2] *Ibidem,* p. 233

ci *sisteme conceptuale perfect structurate*. Este necesar ca domeniile matematicii să reflecte realitatea *în structura lor*, pentru ca ele să poată fi utilizate în descrierea şi, mai ales, în previziunea diverselor aspecte concrete ale realităţii.

Dar dacă entităţile geometrice oglindesc aspecte ale realităţii, cum e posibil să dispunem de sisteme axiomatice deosebite care se contrazic între ele şi care totuşi, din punct de vedere logic, sînt la fel de valabile? Aceasta este întrebarea esenţială.

Trebuie să conchidem de aici că există două feluri de adevăruri : adevăruri interne matematicilor, fără legătură cu realitatea, şi adevăruri exprimînd acordul cu realitatea ? Este punctul de vedere al lui Bertrand Russel. „Certitudinea noastră cu privire la propoziţiile matematice simple nu apare analogă certitudinii că soarele va răsări mîine. Nu spun că ne simţim mai siguri de un fapt decît de celălalt... Ceea ce vreau să spun este că certitudinea pare să aibă surse deosebite în cele două cazuri“ [1].

În felul acesta ne întoarcem de unde am plecat şi reapare problema esenţială: cum se explică concordanţa celor două forme de certitudini?

Este evident că o geometrie „pură“, „abstractă“ nu este suficientă prin ea însăşi pentru a decide asupra fenomenelor realităţii, deşi sistemul posedă o perfectă coerenţă internă. Sistemul acesta de deducţii apare ca punte care rămîne suspendată în gol dacă nu serveşte la a conduce de la o serie de cunoştinţe, fundate pe realitate, la altă serie de cunoştinţe, verificabile în realitate. Orice incertitudine în grupul iniţial de adevăruri admise se transmite de-a lungul întregului eşafodaj pînă la ultimele consecinţe.

În principiu, „maşina logică“ poate fi utilizată şi pentru a conduce de la o serie de premise a, b, c... n, arbitrar alese la o serie de consecinţe a', b', c' ... n'.

Nu e nimic misterios în toate acestea. *Aparatul logic utilizat de Euclid, Lobacevski, Riemann este corect în structura sa internă, pentru că respectă legile generale ale deducţiei logice, legi care şi ele oglindesc anumite relaţii obiective fundamentale. Acesta este „sîmburele“ de adevăr comun geometriilor respective. Certitudinea logică nu are altă sursă decît realitatea obiectivă. Numai prin acest acord al aparatului logic însuşi cu*

[1] B. Russel, *The Analysis* of Matter, New York, 1927, p. 172—173.

relaţii esenţiale din realitatea obiectivă este posibil ca din premise adevărate să se obţină concluzii adevărate.

F. Gonseth scrie şi el în această privinţă: „...Ideea de ordine raţională şi metoda deductivă nu reprezintă decît legături ideale, imitînd în mod schematic anumite legături concrete, anumite legi profunde ale realităţii“ [1].

Dacă premisele sînt, ele însele, adevărate sau nu, aceasta este altceva. Premisele pot fi integral adevărate sau parţial adevărate. Ele pot admite un element de incertitudine, dat fiind că anumite aspecte ale realităţii luate în consideraţie sînt insuficient cunoscute sau insuficient dovedite la un moment dat. Cel mai bun exemplu îl constituie faimosul Postulat V din geometria lui Euclid, admis fără demonstraţie, dar şi fără o certitudine absolută, pînă cînd a fost infirmat de progresul ştiinţelor.

Poincaré nu are dreptate cînd susţine că optarea pentru geometria euclidiană sau pentru una dintre geometriile neeuclidiene este o chestiune de convenţie, de comoditate. Noi nu ne mulţumim numai cu adevărul armăturii logice al acestor geometrii, ci vrem ca şi *conţinutul de sens* al teoremelor lor să fie adevărat, adică să fie concordant cu realitatea. Pentru aceasta trebuie să redăm conceptelor geometrice semnificaţia lor fizică. Dar în acest caz datele realităţii, dacă sînt suficiente, ne obligă şi în ceea ce priveşte sistemul de axiome. Geometria euclidiană este geometria bunului-simţ, a practicii curente, suficientă pentru mecanica clasică. Postulatul V este adevărat dacă ne mărginim la acest cadru. Dar dacă trecem la scara cosmică, dacă devine necesar un grad mai mare de certitudine, atunci faimosul postulat trebuie **înlocuit.**

Cîtă vreme cunoştinţele despre realitatea obiectivă duceau la concepţia spaţiului absolut newtonian, geometria euclidiană apărea ca fiind expresia unică, absolut certă a proprietăţilor spaţiale.

În aceste condiţii se putea considera că geometria este o ştiinţă pur raţională ale cărei propoziţii n-au niciodată nevoie de sancţionarea practicii. Progresul cunoştinţelor despre realitatea obiectivă a arătat însă dependenţa proprietăţilor spaţiale de celelalte proprietăţi ale materiei. Astfel s-a lămurit şi problema elementelor incerte din structura axiomaticii euclidiene, s-a dovedit necesitatea de a se reda conceptelor geometrice un

[1] F. Gonseth, *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique*, Paris, Lib. F. Alcan, 1936, p. 120.

Scanned with OKEN Scanner

sens fizic şi s-a stabilit faptul că geometria neeuclidiană, în speţă riemanniană, oglindeşte mai exact proprietăţile spaţiului obiectiv. Dar astfel a rezultat şi faptul că geometria nu este o disciplină raţională pură.

„Ajungem, aşadar — scrie A. D. Aleksandrov —, la următoarele concluzii: în general, acelaşi sistem izolat de fapte poate fi descris în mod diferit şi toate aceste descrieri sînt adevărate o dată ce ele reflectă realitatea.

Însă faptele geometrice, în întreaga lor generalitate, nu pot fi nicidecum desprinse de alte fenomene. Numai astfel putem stabili proprietăţile spaţiului, deoarece el este o formă universală de existenţă a materiei. Cînd luăm geometria în legătură cu fizica, trebuie în mod necesar să le adaptăm una la cealaltă, şi atunci se manifestă deosebirea esenţială dintre „diversele geometrii", care, desprinse de fizică, s-ar părea că diferă numai printr-o mai mare sau mai mică simplitate. Geometria euclidiană n-a apărut pentru că ea este mai simplă decît altele, ci pentru că ea corespunde mecanicii. Astăzi, tocmai în legătură cu dezvoltarea fizicii în teoria relativităţii, se trece la o geometrie mai complicată, cea riemanniană" [1].

Aşadar rezumînd :

— axiomele geometriei nu sînt adevăruri apriori, pentru că mai multe sisteme axiomatice apar, înainte de confruntarea cu realitatea, ca fiind logic posibile;

— ele nu sînt nici simple convenţii, pentru că, pe de o parte, acordul final cu realitatea ar rămîne inexplicabil şi pe de altă parte, nu s-ar impune optarea pentru o anumită geometrie ;

— ele nu pot fi decît reflectări mai mult sau mai puţin adecvate, mai mult sau mai puţin certe, mai mult sau mai puţin complete ale realităţii. Progresul ştiinţelor din ultimele decenii ne-a arătat acest fapt extrem de important: *evidenţa are un caracter relativ şi istoric*. Ceea ce pare la un moment dat absolut evident poate apărea mai tîrziu ca fiind mai puţin evident sau chiar ca incert, idee cuprinsă în teza leninistă a progresului *asimptotic* al cunoaşterii spre adevărul absolut. Vechile cunoştinţe considerate la un moment dat ca certe pot apărea mai tîrziu ca simple aproximări, în cadrul unor cunoştinţe noi, mai ample, mai apropiate de esenţa fenomenelor.

[1] A. D. Aleksandrov, *Spaţii abstracte*, în „Matematica", vol. III, p. 220.

Dar este geometria o ştiinţă experimentală? Am văzut că Poincaré răspunde negativ la această întrebare.

Răspunsul pe care-l dăm noi, pe baza consideraţiilor precedente este afirmativ, dar cere o serie de precizări.

Dacă ne referim la geometrie ca ştiinţă a proprietăţilor spaţiului considerat în realitatea sa obiectivă, a spaţiului în universalitatea sa, atunci geometria apare ca un domeniu dependent de un ansamblu de legităţi ale lumii materiale. Proprietăţile unui asemenea spaţiu nu pot fi stabilite decît pe cale experimentală (luîndu-se bineînţeles noţiunea de experiment în sens larg) prin raportare la datele obţinute pe calea măsurătorilor, cum a fost, de pildă, determinarea în 1919 a deviaţiei razei de lumină în cîmpul gravitaţional al Soarelui cu prilejul observării eclipsei solare.

Dacă ne referim la geometria euclidiană, la geometria adecvată practicii curente, o asemenea raportare nu este necesară. Geometria euclidiană se construieşte ca o ştiinţă aşazis raţională (lucru adevărat, de altfel, şi pentru celelalte geometrii, cîtă vreme nu ne punem problema ca ele să descrie spaţiul fizic). Dar şi în acest caz *experimentăm.* Experimentăm *mintal,* cu figuri desenate sau imaginate pe care le supunem unor operaţii diverse care reproduc operaţii materiale: deplasări, secţionări, suprapuneri etc. Descoperirea noilor proprietăţi nu este un proces pur analitic-deductiv, ci este un proces constructiv, în care ipotezele, încercările, verificările (mintale) au acelaşi rol ca în orice ştiinţă a naturii.

Între ştiinţele matematice şi ştiinţele care operează direct cu realităţi materiale, deosebirea nu este deci de esenţă în privinţa raportului cu realitatea obiectivă. Ea nu este de esenţă nici în ceea ce priveşte metodele de investigaţie. *Idealitatea matematicii nu este absolută, ci relativă. Matematica păstrează, cu sau fără ştiinţa cercetătorului, „canale de informare" asupra realităţii obiective, şi tocmai aceasta este sursa fertilităţii şi utilităţii ei practice.*

Şi matematicianul, asemenea oricărui cercetător, experimentează, în sensul deplin al cuvîntului, descoperind prin diverse experienţe adevăruri noi. Şi cercetătorul care studiază direct natura utilizează entităţi ideale, recurge la construcţii mintale mai mult sau mai puţin vaste.

Deosebirea constă în faptul că experienţa idealizată ocupă un loc mult mai important în activitatea matematicianului. Sînt atît de vaste, atît de îndelungate aceste experienţe mintale ale

Scanned with OKEN Scanner

matematicianului, încît contactul cu realitatea pare neglijabil. Mai mult: matematicianul consideră ca fiind de competenţa sa numai porţiunea idealizată a investigaţiei. De fapt însă, această porţiune idealizată se prelungeşte, pe de o parte, prin „fundamentele ei" şi, pe de altă parte, prin aplicaţiile ei în înseşi fenomenele obiective.

De aici rezultă şi pentru psihologie o consecinţă foarte importantă. Atît numerele cît şi figurile geometrice reprezintă entităţi mintale cu proprietăţi sui-generis. Figurile geometrice, care ne interesează în special în lucrarea de faţă, se deosebesc într-o anumită măsură şi de noţiunile obişnuite, şi de reprezentările obişnuite, deşi au elemente comune cu ambele categorii. Figurile geometrice (ne referim, bineînţeles, la figurile ideale cu care gîndeşte geometrul, nu la imaginea lor materializată, în desen), ca entităţi mintale al căror domeniu este relativ închis, pentru că reflectă un domeniu de proprietăţi obiective deplin separabil (în limitele practicii curente), prezintă relaţii deosebite între general şi particular, între abstract şi concret, şi un mod specific de înlănţuire în operaţiile mintale.

În ce constau aceste entităţi mintale, în ce relaţii se află cu conceptele şi reprezentările obişnuite, cum se raportează ele la realitatea obiectivă? Aceste probleme vor fi discutate în cele ce urmează.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL VII-lea

CONCEPTELE FIGURALE

Din cele expuse pînă aici reiese faptul că entităţile cu care operează geometrul posedă anumite calităţi care le permit să fie obiecte de investigaţie analoge cu obiectele materiale — surse inepuizabile de cunoştinţe despre realitatea obiectivă — şi, totodată, entităţi mintale deplin integrabile într-o înlănţuire logică-formală, într-o înlănţuire deductivă. Aceste entităţi mintale posedă, în acelaşi timp, proprietăţi conceptuale şi proprietăţi intuitive, aşa cum vom încerca să dovedim în cele ce urmează.

În general, noţiunile sînt definite ca forme de gîndire care reflectă esenţialul dintr-o categorie de obiecte.

P. V. Tavaneţ consideră această definiţie insuficientă, întrucît poate fi aplicată şi unor forme de judecată (judecata de necesitate şi judecata disjunctivă universală).

De acea el defineşte noţiunea ca fiind „îmbinarea, gîndită într-o unitate, a unor note care sînt; fiecare, necesare şi care, luate toate împreună, sînt suficiente pentru a deosebi obiectul noţiunii de toate celelalte lucruri din realitate“ [1].

Noţiunea nu are deci în vedere, pe de o parte lucruri şi, pe de altă parte, note ale acestora, ca în judecăţi, ci numai un sistem de note necesare şi suficiente pentru a deosebi un lucru de altul. Esenţialitatea notelor devine astfel un rezultat al *necesităţii* lor.

Caracterul necesar şi esenţial al notelor reflectate în noţiune determină şi *generalitatea* reflectării.

---

[1] P. V. Tavaneţ, *Despre adevărul noţiunilor*, în „Voprosî filosofii“, 1959, nr. 12, trad. rom., p. 140.

„Indiferent de deosebirea dintre particularităţile structurale ale noţiunilor cu conţinut concret diferit — notează D. P. Tarski — (compunerea proprietăţilor lor, natura legăturilor care intră în sfera lor), structura tuturor noţiunilor cuprinde ceva comun, anume că, în orice noţiune, o proprietate determinată, cu conţinut concret, este gîndită ca fiind raportată la o mulţime de obiecte (cel puţin la unele dintre ele) care reprezintă domeniul judecăţilor noastre, fiecare dintre obiectele acestei mulţimi nefiind bine precizat“ [1]. Aceasta înseamnă că, din punct de vedere psihologic, orice noţiune este virtual aplicabilă unui număr indefinit de obiecte, că noţiunea nu este un rezumat, un extract, un reziduu, ci un act mintal propriu-zis, o operaţie sau un ansamblu de operaţii virtuale. Generalitatea noţiunii trebuie deci înţeleasă nu în mod static, sub forma unei matriţe, ci ca expresie a dinamicii ei interne, a posibilităţilor ei infinite de utilizare, de aplicare.

Mai departe, Noţiunile sînt abstracţii. Noţiunile sînt abstracţii în primul rînd pentru că sînt *idei* şi nu obiecte materiale. Dar ele sînt abstracţii şi pentru că în mod necesar izolează o proprietate sau un grup de proprietăţi din complexul concret al obiectului. „Conceptele studiate de logica formală — scrie E. B. Şur — sînt concepte abstracte despre anumite laturi şi relaţii exterioare ale lucrurilor, despre calităţi, proprietăţi ale lucrurilor, care ne permit să clasificăm lucrurile şi fenomenele naturii în anumite specii şi genuri“ [2].

Faptul că Şur se referă aici la conceptele logicii formale nu modifică lucrurile. Conceptele matematicii, considerate numai în cadrul disciplinei respective, al domeniului respectiv, se integrează, prin excelenţă, în structura unui raţionament formal. Contradicţiile interne, dialectice relevate în structura unor concepte matematice fundamentale (cum sînt „infinit“, „limită“ etc.) apar numai atunci cînd conceptele respective sînt integrate în viziunea mai largă a raportării la realitate.

Pe de altă parte, aşa cum arată chiar E. B. Şur, şi conceptele dialectice, deşi sînt concrete — în sensul că sînt mai apropiate de oglindirea complexului fenomenelor reale — sînt totuşi, în acelaşi timp, abstracte în calitate de acte mintale.

---

[1] D. P. Tarski, *Noţiunea ca obiect de studiu al logicii dialectice*, în „Voprosî filosofii“ 1959, nr. 10, p. 50.

[2] E. B. Şur, *Teoria conceptului în logica formală şi în cea dialectică*, în „Voprosî filosofii“, 1958, nr. 1, p. 88.

„O altă particularitate a structurii conceptelor logicii formale — continuă E. B. Şur — este că, în procesul operaţiilor logice cu ele, aceste concepte trebuie gîndite ca avînd acelaşi conţinut. Indiferent de timpul şi contextul în care întîlnim conceptul de „triunghi", sîntem obligaţi să gîndim prin acest concept notele triunghiului, ca figură geometrică bine determinată şi să nu confundăm acest concept cu tot ce nu este triunghi" [1]. Aşadar, o altă caracteristică a conceptelor, pe care o putem accepta fără rezervă pentru conceptele matematice, este aceea a *stabilităţii* lor. Conceptul este un invariant în cursul unui raţionament. Se înţelege, istoric, conceptele se schimbă, conţinutul se îmbogăţeşte, semnificaţiile termenilor se precizează, se descoperă noi relaţii între obiectele şi fenomenele realităţii. Dar în cursul aceluiaşi raţionament, al aceleiaşi demonstraţii, oricît de îndelungate ar fi acestea în cadrul unui domeniu dat de investigaţie, conceptul rămîne neschimbat în conţinutul său.

Cu aceste caracteristici n-am epuizat însă conceptul. „Generalizarea prin intermediul abstracţiei — scrie S. L. Rubinstein — nu se reduce la simpla selecţie a însuşirilor comune din rîndul celor date nemijlocit, empiric. Generalizarea reprezintă întotdeauna nu numai *selecţie*, ci şi *transformare*. Noţiunea generală, fiind produsul abstracţiei ştiinţifice, idealizează fenomenele le consideră nu aşa cum sînt date nemijlocit, ci în forma lor pură, nealterată, nemascată de împrejurări lăturalnice şi trecătoare" [2].

Iată deci şi alte caracteristici ale noţiunii de care logica se ocupă mai puţin, dar care pentru psihologia gîndirii sînt importante. Noţiunea este o reflectare *ideală*, idealizată a unor fenomene ale realităţii obiective. Ea este ideală nu numai pentru că aparţine sferei ideilor, ci de asemenea, pentru că presupune o anumită *perfecţiune*. De exemplu: noţiunea de vid înseamnă absenţa oricărei substanţe într-o zonă anumită a spaţiului. Noţiunea de vid exprimă un deziderat ideal, practic irealizabil în mod absolut. Noţiunea exprimată prin termenul apă se referă la apa pură, fără corpuri străine, practic foarte greu de realizat în mod perfect ş.a.m.d.

De caracterul idealizat al reflectării conceptuale este legată deci şi ideea de *puritate*, de omogenitate perfectă. Aşa cum

---

[1] E. B. Şur, *op. cit.*, p. 85.

[2] S. L. Rubinstein, *Existenţă şi conştiinţă*, Bucureşti Edit. ştiinţifică, 1960, p. 174.

Scanned with OKEN Scanner

arată S. L. Rubinstein, conceptul reprezintă o reflectare a lucrurilor „în forma lor pură, nealterată, nemascată de împrejurări lăturalnice şi trecătoare". Această „purificare" este rezultatul izolării mintale, prin abstractizare, a unei proprietăţi din complexul concret al obiectului.

Rezumînd deci, putem spune că *conceptul este o îmbinare de note care reflectă necesarul, esenţialul, generalul din realitatea obiectivă într-o formă stabilă, abstractă, idealizată, pură.*

Aceasta nu este o definiţie a conceptului, ci un inventar de note.

Să ne referim acum la figurile geometrice. Subliniem: nu la noţiunile geometrice, ci la *figurile geometrice,* adică la *formele spaţiale,* care constituie obiectul de cercetare al geometrului. Aceasta înseamnă însă că nu este vorba nici de figura materială desenată sau construită din lemn, ci de *figura ideală* pe care o cercetează geometrul.

Să reluăm, rînd pe rînd, caracteristicile noţiunii (deşi nu în ordinea dată mai sus).

În primul rînd, figura geometrică, în sensul propriu al cuvîntului, este reflectarea unei *proprietăţi spaţiale* şi nu imaginea unui obiect schematizat, proprietate care, la rîndul ei, constă din îmbinarea unor însuşiri esenţiale suficiente pentru a deosebi figura respectivă de oricare altele. Într-o reprezentare intervin, în general, pe lîngă aspecte care ne interesează la un moment dat şi altele auxiliare. În figura cu care operează geometrul nu este luat în consideraţie decît grupul de însuşiri spaţiale strict determinate de definiţia figurii. Aceste însuşiri sînt de aceea şi esenţiale pentru figura respectivă.

Figura geometrică nu este un complex de însuşiri eterogene, cum se întîmplă de obicei cu reprezentările. Într-o reprezentare care reproduce mintal, mai mult sau mai puţin fidel, obiecte sau fenomene din realitate, se pot reflecta simultan însuşiri de culoare, formă, distanţă, densitate, greutate etc. Figura geometrică are o puritate pe care n-o întîlnim decît în sfera conceptelor. În intuitivitatea ei sînt considerate numai aspectele spaţiale, spaţiul pur (formă şi dimensiune) fără alte adausuri.

Figura geometrică, deşi reproduce forme ale obiectelor din realitate, nu le reproduce niciodată ca atare, asemenea unei fotografii, ci în mod idealizat. Cercul, sfera, cubul etc., cercetate de geometrie, sînt forme perfecte, ideale, nu simple reproduceri ale formelor unor obiecte concrete.

Scanned with OKEN Scanner

Figurile geometrice sînt, fără îndoială, entităţi abstracte şi nu obiecte materiale. Ele reprezintă, cum am văzut, însuşiri izolate, abstrase din complexul proprietăţilor materiale. În mod obiectiv nu există puncte, linii, suprafeţe etc. ca obiecte de sine stătătoare, ci doar ca proprietăţi spaţiale, abstrase şi idealizate mintal.

Figura geometrică este invariantă în cursul unei demonstraţii, după cum şi conceptele sînt invariante în cursul unui raţionament. Orice geometrie se caracterizează printr-un grup de transformări care lasă invariante anumite proprietăţi ale figurilor. Geometriei elementare îi corespunde grupul „deplasărilor" (translaţii, rotaţii, simetrii), care lasă figura neschimbată.

Această invarianţă nu se reduce la invarianţa conceptului pe care figura o exprimă, cum s-ar putea crede: îmi imaginez un triunghi, fac diverse raţionamente în legătură cu el, iar în cursul raţionamentelor conceptul rămîne acelaşi. Un concept nu poate fi supus unor operaţii spaţiale de rotire, translaţie, răsturnare, suprapunere etc. Or, figura geometrică este considerată a trece prin toate aceste încercări cu sens intuitiv, rămînînd totuşi invariantă.

H. Poincaré [1] pune în legătură naşterea geometriei în istoria gîndirii ştiinţifice cu existenţa obiectivă a unei anumite categorii de corpuri, şi anume a *corpurilor solide*. Ideile de egalitate, de invarianţă sînt concepte fundamentale ale oricărei geometrii, şi tocmai acestui fapt i se datoreşte rolul imens jucat de teoria grupurilor în dezvoltarea contemporană a geometriei. Într-o lume de fenomene permanent şi total deformabile, geometria nu s-ar fi născut. Ea n-ar fi avut nici un sens. Şi corpurile solide suferă mici variaţii în funcţie de temperatură, presiune etc.; dar aceste variaţii s-au dovedit a fi neglijabile între anumite limite. Figurile geometrice invariante nu sînt de aceea ficţiuni, ci reflectări *aproximativ* exacte ale formelor spaţiale, ale unor obiecte — corpurile solide — relativ stabile. Determinînd faptul că un vas are o formă cilindrică şi efectuînd apoi o serie de măsurători şi calcule nu pe vasul însuşi, ci pe o reproducere schematică, geometrică a acestuia, reproducere invariantă în cursul raţionamentului, există o probabilitate foarte redusă ca rezultatul măsurătorilor şi calculelor să nu mai poată fi aplicat ulterior vasului însuşi.

[1] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, p. 79.

E drept că noţiunea de *egalitate a figurilor* s-a lărgit. De la invarianţa figurii ca atare s-a trecut la invarianţa numai a unor anumite proprietăţi. În funcţie de proprietăţile care rămîn invariante în raport cu anumite grupuri de transformări se construiesc geometria euclidiană, afină, proiectivă, topologia. Dar modelul fundamental pentru făurirea geometriei l-au constituit fără îndoială corpurile solide, cu dimensiuni şi forme relativ constante.

Să trecem mai departe. Putem considera că figura geometrică reflectă o proprietate generală, cum e cazul noţiunilor?

Anumite precizări sînt necesare. Să presupunem că ni se cere să demonstrăm o teoremă referitoare la triunghiuri.

Vom începe prin a construi un triunghi oarecare. Acest triunghi este *oarecare* în sensul că vom evita forme privilegiate (isoscel, echilateral, dreptunghi). Dar el are totuşi o *formă anumită*, anumite dimensiuni ale laturilor şi unghiurilor. Putem neglija aceste aspecte particulare, dar aceasta nu înseamnă că ele nu există. Triunghiul — figură geometrică, triunghiul perceput sau reprezentat (şi nu triunghiul-noţiune) — nu poate să nu aibă o anumită formă proprie, anumite dimensiuni determinate şi determinabile. Acest lucru este evident. Triunghiul-figură constituie pentru geometru ceea ce este, de pildă, pentru chimist apa-substanţă, adică obiectul concret care serveşte pentru cercetare. Apa se află în eprubetă, a fost procurată de la cişmea, are o anumită temperatură etc. Ea este o realitate, cu un complex de calităţi dintre care numai unele — cele comune apei oriunde s-ar găsi —, deci cele generale, îl interesează.

Geometrul poate face abstracţie de dimensiunile laturilor şi unghiurilor şi să se ocupe de triunghi în general (poligon cu trei laturi). Dar *figura* de care se ocupă nu poate să nu aibă anumite dimensiuni şi deci o formă particulară.

Cu toate acestea, triunghiul-figură, deşi perfect determinat şi jucînd în cercetarea geometrului, cum spuneam, rolul de obiect concret în raport cu triunghiul noţiune, *rămîne totuşi o proprietate generală dacă ne referim la obiectele materiale*. Un număr indefinit de obiecte materiale poate avea această formă (nu forma de triunghi în general, ci forma particulară a triunghiului respectiv). Şi aceasta pentru că triunghiul-figură nu este, el însuşi, un obiect material, ci doar formă, proprietate spaţială, a unor obiecte materiale reflectată ca atare în mintea noastră.

Scanned with OKEN Scanner

Din toate acestea rezultă cu toată evidența că *figura geometrică* posedă toate proprietățile conceptului.

Și, totuși, ea se deosebește de conceptul propriu-zis printr-o însușire esențială.

Figura geometrică, deși este o abstracție, deși posedă calități conceptuale — esențialitate, generalitate, puritate, idealitate, invarianță —, nu pierde prin aceste însușiri *intuitivitatea*, în esență faptul de a fi *reflectarea intuitivă a unor proprietăți spațiale: întinderea* (inclusiv dimensiunile) *și forma*. Un concept nu are întindere, nu are formă, pentru că, prin definiție, nu are caractere spațiale și, în genere, intuitive.

„Deosebirea esențială dintre reprezentare și noțiune constă, în primul rînd, în aceea că cea dintîi este reproducerea intuitivă în conștiință, cu mai multă sau mai puțină claritate, a contemplării vii, senzoriale a obiectelor, pe cînd noțiunea este redarea generalizată în gîndire a unor conexiuni și relații determinate între obiecte și însușirile lor“ [1].

Aceste caractere conceptuale sînt dobîndite de figură fără ca aceasta să-și piardă total intuitivitatea ei. Mai mult, faptul cel mai surprinzător relevat de o analiză mai atentă este acela că toate notele indicate mai sus, pe care ne-am obișnuit să le considerăm proprii numai conceptelor, *devin proprietăți ale unei structuri intuitive*. În figura geometrică, calitățile conceptuale nu sînt doar asociate din afară, prin faptul că imaginea este solidară cu conceptul corespunzător. *Însăși figura, pentru a putea deveni o verigă într-un raționament geometric, dobîndește aceste calități.* Îmbinarea de note esențiale, care formează conținutul conceptului și care, în cazul acestuia, este o îmbinare abstractă, neintuitivă devine pentru figura geometrică o îmbinare, tot abstractă, întrucît nu este vorba de un obiect material, dar *o îmbinare de însușiri esențiale date intuitiv*.

Triunghiul-figură care-mi servește pentru o demonstrație este, evident, o îmbinare de însușiri: trei laturi, trei unghiuri îmbinate, *încheiate* (în sens intuitiv) într-un anumit fel caracteristic *formei* cunoscute a triunghiului. Dar, spre deosebire de reprezentările obișnuite, *toate, absolut toate* aceste elemente, ca și modul lor de îmbinare, sînt esențiale, strict necesare figurii. Nu există elemente care aparțin, din punct de vedere geometric, figurii și care să poată fi schimbate fără a se modifica

[1] *Logica*, sub red. lui D. P. Gorski și P. V. Tavaneț, Edit. științifică, București, 1957, p. 39.

figura. Figura rămîne invariantă numai la schimbări care nu se referă la structura ei internă, ci la relaţiile ei externe cu ambianţa, adică la *deplasări*. Chipul unui om ne poate apărea mai şters sau mai viu, într-o lumină sau alta, cu mină bună sau cu mină proastă şi, totuşi, nu vom susţine că este de fiecare dată chipul altui om; modificările intervenite nu sînt esenţiale. Nici nuanţa de lumină în care chipul ne apare, nici dimensiunea chipului, nici expresia feţii, deşi fac parte integrantă din reprezentare, nu sînt esenţiale pentru chipul respectiv. Triunghiului însă — triunghiul figură geometrică, repetăm — nu-i aparţin decît elemente a căror modificare schimbă figura însăşi.

Puritatea, idealitatea sînt şi ele calităţi ale *figurii,* ale figurii cercetate efectiv de gîndirea geometrului.

Într-un raţionament ca acesta: „Toate lichidele iau forma vasului în care se află; apa este un lichid; apa ia forma vasului în care se află", „apa" în *calitate de concept,* nu posedă decît notele esenţiale corespunzătoare. Conceptul este o reflectare idealizată, purificată a lichidului respectiv. Într-o demonstraţie în care, de pildă, înscriem un triunghi într-un cerc, idealitatea şi puritatea (omogenitatea perfectă) sînt atribute ale figurilor înseşi.

Aceste figuri reflectă intuitiv spaţiul pur. Laturile sînt segmente de drepte ideale, perfecte. Cercul este un cerc ideal, perfect. Figurile capătă aceste calităţi fără a-şi pierde structura intuitivă, şi anume *spaţialitatea:* întinderea (inclusiv dimensiunile) şi forma.

Figura este generală în însăşi intuitivitatea ei. O infinitate de obiecte materiale pot avea forma şi dimensiunile respective, de pildă formă circulară sau paralelipipedică, sau, mai exact, *pot tinde* spre această formă ca spre o limită ideală.

Acelaşi lucru, după cum am arătat mai sus, şi în privinţa invarianţei: figura geometrică este absolut invariantă, dar nu numai prin conceptul corespunzător, care rămîne invariant în cursul unui raţionament, ci în însăşi structura ei intuitivă, atunci cînd este supusă unor transformări, şi ele cu sens intuitiv; rotaţii, translaţii, răsturnări etc.

Toate aceste considerente ne determină să conchidem că figurile geometrice, în sensul propriu al cuvîntului, sînt entităţi mintale, forme de gîndire care nu se pot reduce nici la noţiuni şi nici la reprezentări. Noi le-am numit *concepte figurale*. Ele posedă caracteristicile conceptelor şi în acelaşi timp sînt reflectări, intuitive ale formelor spaţiale obiective.

Scanned with OKEN Scanner

În teoria gîndirii susţinem adeseori, şi pe drept cuvînt, că deşi noţiunile formează elementul caracteristic al gîndirii umane, al gîndirii logice, superioare, reprezentările continuă să joace un rol foarte important. Acest lucru este perfect adevărat. Ceea ce nu trebuie însă să uităm este faptul că între abstracţii şi reprezentări demarcaţia este departe de a fi riguroasă.

Cînd o teorie este elaborată şi structurată într-o formă logică, demonstraţia capătă într-adevăr un caracter preponderent conceptual. Necesitatea obiectivă ia forma necesităţii abstracte, logice. Expunerea teoriei apelează la stringenţa logică, şi ea dobîndeşte astfel un caracter mai mult sau mai puţin axiomatic, în funcţie de domeniul la care se referă.

Dar investigaţia însăşi, activitatea vie, creatoare a minţii cercetătorului, activitate de căutare febrilă trecînd permanent de la faptele concrete la gîndirea abstractă şi înapoi, de la experimentele materiale la experimentele ideale, mentale, utilizează într-o largă măsură în afară de conceptele propriu-zise, deplin cristalizate logic şi o gamă variată de *imagini-abstracţii* mai mult sau mai puţin impregnate senzorial, al căror rol este extrem de important în gîndirea creatoare. Prin natura dublă a acestora este posibilă menţinerea corectitudinii ştiinţifice în toate verigile investigaţiei, fără sacrificarea bogăţiei concretului, de a cărui prezenţă gîndirea creatoare nu se poate lipsi.

Avînd în vedere aceste considerente, este necesar să examinăm întîi cîteva aspecte ale relaţiilor dintre imagine şi concept în activitatea gîndirii, ceea ce ne va permite să determinăm cu mai multă precizie natura imaginilor-abstracţii. Pe această bază vom trece la analiza conceptelor figurale ale geometriei, care reprezintă o varietate — poate cea mai interesantă — a imaginilor-abstracţii.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL VIII-lea

CU PRIVIRE LA RELAȚIILE DINTRE CONCEPTE ȘI IMAGINILE SENZORIALE ÎN PROCESUL GÎNDIRII

Problema relaţiilor dintre concept şi imagine, şi în genere problema rolului imaginilor în gîndire, se discută de multă vreme. Este cunoscut rolul atribuit de Taine imaginilor în gîndire. „Ceea ce observaţia distinge, în fond, la cel care gîndeşte, în afară de senzaţii, sînt diferitele tipuri de imagini, primitive sau consecutive, înzestrate cu anumite tendinţe, şi care sînt modificate în evoluţia lor de concursul sau antagonismul altor imagini simultane sau alăturate. După cum corpul viu este un polipier de celule mutual dependente, tot aşa şi spiritul activ (agissant) este un polipier de imagini mutual dependente, iar unitatea, la unul ca şi la celălalt, nu reprezintă decît o armonie şi un efect“ [1].

Psihologii şcolii de la Würzburg, sub influenţa lui Brentano şi a lui Husserl, au susţinut un punct de vedere opus.

F. Brentano, în a sa *Psychologie vom empirischen Standpunkt* 1874 susţinuse teza că gîndirea este, în esenţă, *o activitate,* conţinutul gîndit fiind un fapt secundar: gîndirea este, în esenţă, orientare, direcţie, intenţie. Ceea ce importă este, funcţiunea, actul de a gîndi şi nu conţinutul gîndit.

E. Husserl a reluat, după cum se ştie, acest punct de vedere. El distingea *a)* conţinutul mental sau imaginea, *b)* intenţia, *c)* obiectul intenţiei. Esenţialul în gîndire îl constituie, după Husserl, ca şi după Brentano, intenţia sau raportul intenţional. Intenţia formează cadrul şi semnificaţia oricărui fapt de conştiinţă. Intuiţia îi conferă plenitudinea prin concretul pe care-l aduce. Totuşi, imaginea rămîne secundară. Diferite imagini pot

[1] H. Taine, *De l'intelligence*, Paris, Hachette, p. 123—124.

avea același sens și, de fapt, imaginile nici nu sînt strict necesare pentru apariția sensului. Ceea ce importă este *semnificația*, iar înțelegerea constă în dezvăluirea semnificației printr-un act psihic, printr-un *act intențional*.

Inspirate de aceste idei, un număr de cercetări au fost desfășurate la începutul secolului nostru, cu scopul de a stabili rolul imaginii în procesul gîndirii. Metoda folosită a fost în special aceea a *introspecției experimentale*.

Au mers pe această cale un grup de psihologi de la Universitatea din Würzburg (începînd din 1901), Binet (începînd din 1903), psihologul american R. Woodworth etc.

Procedeul de cercetare constă, în esență, în a cere subiectului să rezolve anumite probleme nu prea complicate, dar care cer un efort de gîndire, pentru a permite o soluționare rapidă și pentru a nu încărca prea mult memoria. După rezolvare, subiectul trebuie să relateze cele ce-și amintește.

Au fost folosite probleme ca: explicarea unor aforisme paradoxale, asortarea unor proverbe avînd aceeași semnificație etc. Concluzia reprezentanților școlii de la Würzburg (Marbe, Külpe, Ach, Watt, Messer, Bühler), a lui Binet, ca și a altora [1] — Cordes (1901), Taylor (1906), Koffka (1912), Spearmann (1923) etc. —, este aceea că gîndirea, în esența ei, se desfășoară sub forma unor stări de conștiință pure, fără imagini intuitive sau verbale.

Marbe notează, în afară de cazurile în care gîndirea cuprinde senzații și imagini, și alte cazuri în care ea se exprimă sub forma unor „atitudini de conștiință": diverse fenomene intelectuale (de exemplu comparații), fenomene de credință (certitudine, adeziune, aprobare, îndoială etc.), acțiuni (căutare, stare de tensiune etc.), stări afective (agreabil, dezagreabil, neliniște etc.).

Külpe constată rolul îndeplinit de ceea ce se numește în limba germană *Aufgabe* (consemn, temă, sarcină) în desfășurarea procesului de gîndire. El ajunge la concluzia existenței unor stări de conștiință în cursul operațiilor de gîndire, neîntovărășite de imagini.

Watt, folosind metoda asociației dirijate (să se găsească un concept subordonat sau supraordonat, o parte a unui întreg etc.), ajunge la concluzia că imaginea nu este unicul element al gîndirii, nici cel mai important. Watt notează existența

---

[1] Cf. R. S. Woodworth, *Psychologie expérimentale*, Paris, P.U.F., 1949, p. 1 062.

Scanned with OKEN Scanner

unor *tendințe* și „stări inefabile". „Stările inefabile" sînt sentimente de direcție, de semnificație. Conștiința semnificației apare înaintea cuvîntului sau a imaginii.

Ach vorbește de *Bewusstheit,* stare complexă, de asemenea inefabilă și totuși perfect determinată, uneori rapidă ca o străfulgerare, fără expresie verbală sau intuitivă. Imaginile care însoțesc uneori această „știință" nu sînt decît niște semne, dar nu esențialul fenomenului de gîndire. În afară de *Bewusstheit,* Ach mai distinge și alte stări de conștiință, fără imagini. Acestea sînt *tendințele reproductive* — fapte mnemonice, fenomene de perseverație — și *tendințele determinante* — elementele directoare ale cursului gîndirii.

Pentru Bühler, gîndirea este un fenomen inițial, ireductibil al vieții psihice. Imaginea nu este decît un subprodus. Există, după Bühler, trei modalități de gîndire: conștiința regulii (Regelbewusstsein), conștiința raportului (Beziehungsbewusstsein) și intenția. În toate acestea, imaginile nu joacă, după Bühler, un rol esențial. Cum e posibilă gîndirea fără imagini ? Datorită unui gen de „cunoaștere nemijlocită" (unmittelbares Wissen) în interiorul căreia „intențiile pure" realizează anumite raporturi între ele și ne dau conștiința unei organizări, a unei ordini. Această idee a „ordinii" în structura gîndirii este importantă la Bühler. Este vorba de raportarea la o ordine ideală, categorială, structurată logic [1].

Începînd din 1903, A. Binet, în Franța, face cercetări analoge. Folosind introspecția experimentală, el ajunge la aceeași concluzie ca și psihologii de la Würzburg : imaginile, atît cele intuitive cît și cele verbale, pot lipsi în procesul de gîndire. În ce constă gîndirea fără imagini după Binet ? Ea este foarte greu de descris și de analizat. Ea îi apare subiectului în introspecție ca un sentiment specific, ireductibil. „Dar oricît de greu ne-ar fi să ne reprezentăm o gîndire fără ajutorul cuvintelor și al imaginilor — scrie Alfred Binet —, ea există totuși, ea constituie, dacă am vrea s-o definim prin funcțiunea ei, o forță directoare, organizatoare, pe care aș compara-o — ceea ce nu e decît o metaforă — cu forța vitală care, dirijînd proprietățile fizico-chimice, modelează forma ființelor și conduce evoluția

[1] K. Bühler, *Tatsachen und Probleme zu einer Psychologie der Denkvorgänge, Über Gedanken,* în „Archiv f.d. ges. Psychologie", IX (1908), p. 297—365.

lor, asemenea unui lucrător invizibil pe care nu-l putem cunoaşte decît prin opera sa materială“ [1].

În concluziile sale referindu-se la relaţiile dintre gîndire şi imagine, Binet scrie : „Noi am văzut, de asemenea, că procesul imaginativ (l'imagerie) este mult mai sărac decît gîndirea; gîndirea, pe de o parte, interpretează imaginea, care este adesea informă, *indefinită ;* pe de altă parte, gîndirea este adeseori în contradicţie cu imaginea şi totdeauna mai completă decît imaginea şi uneori ea se formează şi se desfăşoară fără ajutorul nici unei imagini apreciabile... În sfîrşit, şi acesta este faptul capital... : întreaga logică a gîndirii scapă procesului imaginativ“ [2].

Din această scurtă relatare [3] ne putem face o idee de ansamblu asupra rezultatelor obţinute prin folosirea introspecţiei experimentale în cercetarea gîndirii, în special în ceea ce priveşte relaţiile dintre concept şi imagine.

Trebuie să relevăm în primul rînd inconsistenţa metodei folosite. Încă din 1907, W. Wundt a formulat la adresa ei o serie de critici severe. După W. Wundt, introspecţia experimentală calcă toate regulele de bază ale cercetării experimentale. Nici o observaţie riguroasă nu se poate realiza prin această repliere a conştiinţei asupra ei însăşi. O asemenea observaţie nu are mai multă valoare decît observaţiile curente, nepregătite, necontrolate, din cauza cursului fluid şi imperceptibil al procesului de gîndire. Este imposibilă repetarea fenomenului etc. [4].

Semnificativ este că Wundt a căzut el însuşi în acelaşi păcat, utilizînd aceeaşi metodă şi ajungînd la aceleaşi rezultate ca şi psihologii de la Würzburg.

De fapt cercetările psihologilor de la Würzburg şi ale celorlalţi care au apelat exclusiv la introspecţia experimentală au suferit toate de viciul fundamental al subiectivismului. Psihologii sovietici (Teplov, Rubinstein etc.) au criticat cu severitate introspecţionismul şi au dovedit deplin legătura sa strînsă cu concepţia idealistă, caracterul său neştiinţific. Nici o expli-

---

[1] Alfred Binet, *L'étudé expérimentale de l'intelligence*, Paris, Schleicher, 1903, p. 108.

[2] *Ibidem*, p. 308—309.

[3] O expunere sistematică a cercetărilor şcolii de la Würzburg se găseşte în cartea lui Albert Burloud, *La pensée d'après les recherches expérimentales de H. J. Watt, de Messer et de Bühler*, Paris, F. Alcan, 1927.

[4] W. Wundt, *Psychologische Studien*, 1907, 3, p. 301—360.

Scanned with OKEN Scanner

cație psihologică nu se poate realiza dacă ne mărginim strict la domeniul subiectivității. Dacă viața psihică este reflectarea subiectivă a realității obiective, dacă ea este un rezultat al activității creierului, atunci nici un fel de fenomen psihic nu poate fi explicat științific, cauzal, în limitele subiectivității. Fenomenele psihice pot fi descrise, putem dezvălui și anumite legități interne ale domeniului subiectiv, dar întreruperea lanțului cauzal la hotarele subiectivității lasă totul în suspensie și ne oferă o imagine incompletă, inconsistentă a vieții psihice.

„Trebuie să facem distincție între autoobservare — scrie S. L. Rubinștein —, ca observare îndreptată spre sine, spre autocunoaștere, și introspecția propriu-zisă, ca falsă interpretare a autoobservării. Esența introspecționismului și a autoobservării introspecționiste, ca și tarele lor, nu își au originea în faptul orientării cunoașterii spre subiectul însuși. Nu trebuie să fie negată posibilitatea și necesitatea autocunoașteri, a cunoașterii de sine în scopul autocontrolului. Orientarea spre sine a introspecției nu este o trăsătură principală, fundamentală, determinantă, ci derivată. Sensul introspecției este afirmarea ideii că psihicul se reflectă în sine însuși : psihicul este o lume închisă a conștiinței „pure", izolate de lumea materială ; este spiritul care se cunoaște nemijlocit pe sine însuși, prin sine însuși, ocolind orice mijlocire materială" [1].

Cea mai bună dovadă a justeții acestui punct de vedere o constituie rezultatele obținute pe calea respectivă. Care este bilanțul numeroaselor cercetări efectuate prin „introspecția experimentală" asupra procesului gîndirii ? Chiar și foarte sumara trecere în revistă făcută de noi mai sus, unde ne-am străduit în mod real să extragem aspectele mai bine conturate, ne arată valoarea rezultatelor obținute. Ce este gîndirea în esența ei? O stare „inefabilă", „intenție", „tendință". Așadar, în fond, în afară de faptul că gîndirea este un proces psihic *orientat*, introspecția experimentală nu ne spune nimic. Mecanismele intime ale gîndirii, specificul îmbinărilor dintre analiză și sinteză, progresul prin contradicții și salturi, variatele înlănțuiri ale asociațiilor complexe, formele de abstractizare, apoi dependența cursului gîndirii de dinamica motivațiilor etc. etc., nici unul dintre aceste aspecte centrale nu este relevat prin introspecția experimentală.

Și — ceea ce este mai grav — eroare fundamentală : eliminarea limbajului și a imaginilor intuitive! Evident, dacă elimi-

[1] S. L. Rubinstein, *Existență și conștiință*, p. 83.

năm raportarea la obiect, dacă eliminăm limbajul şi imaginile, dacă eliminăm motivaţia ca fenomene eterogene, nu rămîne decît o stare „inefabilă", insesizabilă, inexprimabilă, adică nimic. Sau, cel mult, ceea ce uneori a căpătat „droit de cîté" din partea introspecţioniştilor — un ansamblu de stări afective, care, de fapt, nu sînt „gîndire" : sentimente de tensiune, de relaxare, de ezitare, de „iluminare" etc.

De aici nu rezultă că limbajul şi imaginile sînt gîndirea însăşi. Problema nu poate fi rezolvată decît de pe poziţiile materialismului dialectic, aplicînd teoria pavlovistă a semnalizării.

Gîndirea este *cunoaştere* — reflectare subiectivă a realităţii obiective —, şi, prin faptul că este cunoaştere, este şi *activitate.* Din punct de vedere fiziologic, întreaga cunoaştere este expresia unei *activităţi de semnalizare a creierului.* Semnalizarea nu poate fi concepută în afara relaţiilor organism-mediu. Senzaţiile, percepţiile, reprezentările sînt semnale subiective ale relaţiilor obiective dintre organism şi mediu.

Psihologii introspecţionişti s-au lovit şi ei de fenomenul semnalizării, de faptul că în cunoaştere intervin întotdeauna *semnificaţii.* Dar ei au rupt semnificaţia, pe de o parte, de obiectul semnificat şi, pe de altă parte, de factorul semnalizator, de semnal. Ei au cultivat ideea inadecvenţei semnalului la obiectul semnificat şi astfel au putut să deducă teza independenţei semnificaţiei de ambele laturi materiale. Pentru Husserl, a gîndi înseamnă a opera cu semnificaţii pure. La fel şi pentru Watt, Bühler etc., semnificaţia există în stare pură înaintea expresiei ei materiale, înaintea cuvîntului sau a imaginii.

Dacă revenim la cadrul real al fenomenelor obiective, al relaţiilor materiale dintre organism şi mediu, este foarţe greu de înţeles ce semnificaţie poate avea o „semnificaţie" care nu se exprimă prin nimic (deoarece apare înaintea expresiei) şi care nu se raportează la nimic.

Gîndirea nu se reduce la un ansamblu de reacţii musculare şi kinestezii, ca în concepţia behavioriştilor, şi nici la un „polipier" de imagini, ca în concepţia lui Taine. Dar, dacă nu se reduce la aceste fenomene, nu înseamnă că gîndirea poate exista în afara acestor fenomene şi independent de ele, şi în genere în afara unui proces material şi fiziologic de semnalizare. Gîndirea nu constă într-o entitate metafizică adăugată din afară acestor fenomene. Care este atunci relaţia dintre gîndire şi ansamblul mijloacelor senzoriale de care se serveşte ? Numai dacă vom considera aceste mijloace senzoriale ca *semnalizări ale*

Scanned with OKEN Scanner

realității obiective lucrurile se vor lămuri și vom scăpa de impasul spre care subiectiviștii împing problema.

Nici semnalele verbale și nici celelalte fenomene senzoriale nu epuizează gîndirea dacă le privim în mod static și independent de realitatea obiectivă.

Cunoașterea, în genere, constă într-un proces activ de reconstituire mintală, subiectivă a diverselor aspecte sub care se prezintă realitatea obiectivă, datorită activității semnalizatoare a creierului.

Elementele de reflectare subiectivă — senzațiile — nu se asociază, ca în concepția vechiului asociaționism, după legi pur interne, intramentale, pe baza unor fenomene de atracție, de coeziune. Modul de grupare al senzațiilor în percepții este dictat, prin intermediul legilor semnalizării (și deci al relațiilor organism-mediu), de realitatea însăși.

Acestei forme de reflectare i se adaugă, în cunoașterea umană, o altă treaptă, superioară, produs al vieții sociale: semnalizarea prin mijloace verbale. Aceste mijloace verbale reprezintă, arată Pavlov, semnale de ordinul al doilea, adică semnale ale semnalelor. „Ele reprezintă — spune mai departe Pavlov — o abstractizare a realității, permițînd generalizări, fapt care constituie *gîndirea noastră superioară specific umană*, care dă naștere la început unui empirism general, iar în cele din urmă științei, reprezentînd acea armă supremă cu ajutorul căreia omul se orientează în lumea înconjurătoare și în el însuși“ [1].

Gîndirea nu mai are, în felul acesta, nimic misterios. Ea este rezultatul activității de semnalizare a creierului, ca și întreaga cunoaștere, dar *a unei activități de semnalizare care poartă pecetea vieții sociale a omului.*

Dacă și gîndirea și limbajul exprimă activitatea semnalizatoare a creierului, în ce constă deosebirea dintre ele? Limbajul reprezintă, în funcțiunea sa originară, *un proces de comunicare între oameni.* Aceasta înseamnă că, strict vorbind, limbajul este un vehicul interuman care transportă informații deja descoperite despre realitatea obiectivă. Văd o mașină apropiindu-se și spun interlocutorului meu: „Vine mașina“. Am folosit un sistem de semnale prin care am transmis informația altei persoane. N-am aflat însă nimic peste ceea ce știam dinainte (în cazul acesta din percepții) despre realitatea obiectivă. Sistemul de

[1] I. P. Pavlov, *Experiența a douăzeci de ani în studiul activității nervoase superioare a animalelor*, Edit. Acad. R.P.R., 1953, p. 529.

semnale nu mi-a servit ca să depăşesc cunoştinţele deja dobîndite, ci doar să transmit cele constatate altei persoane.

Merg însă mai departe şi mă întreb : „Cine se află în maşina care se apropie ? Este amicul meu X ? La ce oră trece el, de obicei, pe aici ?“. Mă uit la ceas. E ora 10. Şi-mi răspund : „Trebuie să fie amicul meu. E ora la care trece el de obicei pe aici cu maşina“. Şi în cazul acesta a intrat în funcţiune activitatea semnalizatoare a creierului. Dar aceste semnale n-au reprodus doar ceea ce pe o cale oarecare aflasem deja. Ele mi-a permis să aflu ceva nou, să reconstitui mintal fenomene a căror cunoaştere directă nu e posibilă în momentul respectiv. *Semnalele de ordinul al doilea s-au dovedit capabile ca, în afară de simpla semnalizare interumană, să servească şi altui scop extrem de important: adîncirea cunoştinţelor, lărgirea cunoştinţelor despre realitatea obiectivă dincolo de ceea ce obţinem direct prin reflectarea senzorială.*

Gîndirea este deci tot o activitate în care se exprimă semnalizarea realităţii obiective. Dar este vorba de o semnalizare utilizată într-un mod specific. Semnalele sînt combinate, în funcţie de cunoştinţele şi de experienţa anterioară a omului, în aşa fel încît să se obţină ca rezultat o informaţie nouă.

Ceea ce ne interesează însă acum în mod special nu este problema gîndirii ca atare, ci problema relaţiilor dintre gîndire şi semnale, ca să putem ajunge apoi la relaţiile între gîndire şi imaginile intuitive.

Or, din cele de mai sus rezultă că, dacă gîndirea nu se poate reduce la un polipier de imagini (senzoriale sau verbale), ea nu poate fi considerată nici o entitate metafizică existînd independent de asemenea semnale.

Gîndirea este însăşi activitatea de cunoaştere, de reflectare a realităţii obiective, realizată cu ajutorul acestor semnale.

Semnalele şi semnalizarea realizată prin ele fac parte din activitatea prin care se realizează gîndirea însăşi, căci fără ele gîndirea nu mai este nimic. Dar nu interesează numai excitanţii, semnalele ca atare (care, de altfel, desprinse de rolul lor, îşi pierd calitatea de semnal), ci *dinamica* lor, înlănţuirea lor, *combinarea lor activă* şi, dacă vreţi, creatoare, în aşa fel încît să se obţină o informaţie mai profundă, mai bogată despre realitatea obiectivă. Combinarea semnalelor nu se poate izola de semnalele înseşi nu numai pentru că astfel s-ar ajunge la o himeră, dar şi pentru că rezultatul combinaţiei depinde de compoziţia ei, respectiv de semnale şi de ceea ce semnalizează.

Scanned with OKEN Scanner

Nu e suficient să vorbim de semnale și de asocierea lor, în sensul atomist, mecanicist al asociaționiștilor, ca să înțelegem cursul proceselor de gîndire. Dacă vedem un șir de vehicule în mișcare, nu e suficient că știm că vehiculul *A* trage vehiculul *B*, vehiculul *B* trage vehiculul *C* pentru a explica traseul urmat. Traseul depinde de ținta care trebuie atinsă, de drumurile existente, de eventuala existență a unor șine, de pante, obstacole etc.

Cursul urmat de gîndire în rezolvarea unei probleme nu poate fi explicat prin simpla înlățuire a unor semnale și nici numai de datele problemei. El depinde, în afară de datele problemei, și de forma în care acestea se prezintă, de experiența și de cunoștințele anterioare ale persoanei, de traseele fixate dinainte prin automatizare, de scopurile persoanei, de motivele care o determină să se ocupe de problemă etc. Toate acestea la un loc, inclusiv mijloacele verbale folosite, creează o *rezultantă* care este tocmai *direcția principală* urmată de procesul gîndirii în rezolvarea problemei.

„Introspecția experimentală" i-a dus uneori pe filozofii subiectiviști la descoperirea acestui *caracter orientat* al proceselor de gîndire. Dar, făcînd abstracție de contextul real în care procesele de gîndire se desfășoară, ei nu s-au ales decît cu un ecou firav, cu o umbră inconsistentă și n-au ajuns să dezvăluie conceptul științific în plenitudinea sa.

★

Obiecțiile împotriva separației nete dintre semn și semnificație în particular, dintre concept și imagine n-au întîrziat să apară.

Hoernlé scria: „O imagine aduce întotdeauna cu ea o relație cu ceva care este altceva decît ea însăși... Conștiința noastră a imaginii implică conștiința noastră (mai mult sau mai puțin explicită) a semnificației sale și imaginile de care se ocupă psihologia nu sînt semne pure lipsite de semnificație" [1].

H. Delacroix scria : „Conceptul include posibilitatea și cerința semnului, lumea gîndirii, posibilitatea și cerința unui sistem de semne capabile să exprime noțiunile și relațiile" [2]. Și în altă parte : „Se pare deci că, în toate cazurile, gîndirea operează

[1] R.F.A. Hoernlé, *Image, idea and meaning*, *Mind*, 1907, p. 70—100. Cf. I. Meyerson, *Les images*, în G. Dumas, *Traité de Psychologie*, vol. II.

[2] Henri Delacroix, *Le langage et la pensée*, Paris, Alcan 1924, p. 105.

asupra unui dat, asupra unui lucru, asupra unei scheme, asupra unui semn. Noi nu sesizăm niciodată virtualitatea pură fără un început de realizare, potenţialitatea (le pouvoir) pură fără un început de exercitare, fără mişcare. Este adevărat că puterea de abreviere a gîndirfi este extraordinară şi că un nimic este adeseori suficient. Noi ajungem ca un singur cuvînt să cuprindă dezvoltări întregi. De unde iluzia celor care cred că nu este nimic... Gîndirea nu este niciodată «pură»..." [1].

Asemenea încercări de a apropia conceptul şi imaginea nu ne satisfac. Aceasta, în primul rînd, pentru că opinia autorilor nu se încadrează într-o explicaţie ştiinţifică a activităţii gîndirii ca reflectare a realităţii obiective. În al doilea rînd şi ca urmare a acestui fapt, pentru că apropierea se face prin reducerea imaginii la funcţiunea de expresie sensibilă a semnificaţiei preexistente.

H. Delacroix îşi precizează în felul următor concepţia asupra relaţiilor dintre gîndire şi imagine : „Imaginea presupune spiritul şi este departe de a-l explica ; departe de a realiza înţelegerea, ea o presupune. Imaginile senzoriale şi imaginile verbale se bazează deci pe un joc de raporturi, pe un sistem de relaţii tranzitive. Aceste imagini nu sînt decît aspectul lor substantiv" [2].

Sintetizînd acest punct de vedere I. Meyerson scrie : „Dacă ea (imaginea) este un instrument spiritual, aceasta se întîmplă pentru că ea este în serviciul spiritului. Ea presupune spiritul, presupune înţelegerea, dar nu le explică pe acestea. Ea este fragmentară, accidentală şi oarecum arbitrară. Ea reprezintă fragmente, momente ale activităţii mentale, ea jalonează această activitate... În spatele ei se află spiritul întreg..." [3].

Aşadar, dacă imaginea nu trebuie izgonită din activitatea gîndirii pentru că nu poate fi izgonită, ea este redusă la rolul de adjuvant, de jalon care marchează doar traseul urmat de activitatea mintală. În felul acesta revenim, deşi pe o cale ocolită, la concepţia würzburgheză.

Un pas mai departe îl constituie analiza făcută de Albert Spaier în cartea sa *La pensée concrète*. Poziţia filozofică pe care se situează autorul este foarte confuză. Referindu-se la filozofia lui Leibniz, Spaier scria : „...Mai bine decît toate celelalte (concepţii filozofice), ea ne arată că problema noastră psihologică

---

[1] H. Delacroix, *op. cit.*, p. 393—394, 395.
[2] *Ibidem*, p. 386.
[3] I. Meyerson, *op. cit.*, p. 577.

angajează întreaga metafizică și că singura soluție lipsită de contradicții interne pe care am întîlnit-o pînă aici este un idealism radical, care consimte să absoarbă fără reticențe simțurile în gîndire, considerînd diferența dintre acestea nu ca fundamentală, ci ca rezidînd într-o simplă diferență de claritate și distincție" [1].

Pentru ca la p. 162 să citim : „Este sigur că modul în care o mare parte dintre imaginile noastre ni se prezintă, ne obligă să le atribuim o înlănțuire cauzală prin intermediul universului fizic" [2]. Ceea ce ar denota cel puțin o anumită „sensibilizare" pentru concepția materialistă.

Caracterul confuz al filozofiei lui Spaier l-a împiedicat să treacă dincolo de o descriere fenomenologică a relațiilor dintre abstract și concret în procesul gîndirii. Merită însă atenție efortul său de a combate teza unei opoziții radicale dintre aceste aspecte ale gîndirii, recurgînd la un mare număr de argumente și la un variat material faptic.

Teza sa de bază este aceea că există o legătură indisolubilă între toate formele de cunoaștere, de la percepții și emoții elementare pînă la cele mai abstracte noțiuni. Peste tot avem de-a face cu un fenomen de simbolizare. Aceasta înseamnă, pe de o parte, că chiar cele mai simple date ale simțurilor au o semnificație, au deci, după Spaier, o natură conceptuală, și, de pe altă parte, chiar cele mai abstracte noțiuni se raportează într-un fel sau altul la elemente senzoriale.

Referindu-se la unele idei ale lui Pierre Villey, autorul celebrei lucrări *Le monde des aveugles*, Spaier scria : „Singurul lucru pe care am vrea să-l adăugăm este că și „datele simple ale simțurilor" de care vorbește d. Villey sînt înzestrate cu o semnificație. „Punctele" din care se compun literele alfabetului lui Braille sînt percepții *definite* prin relieful lor, prin mica lor dimensiune, prin clasa de impresii spațiate căreia îi aparțin, prin forma lor și prin serviciile pe care le pot face : aceste puncte sînt deja concepte sensibile. Și dacă ne imaginăm cel mai vag, cel mai indistinct contact, el este ceea ce se desemnează la adult ca fiind „un contact vag și indistinct" : el este un concept ; și la copil, chiar la sugar, acest contact dobîndește o anumită calitate, este, cu alte cuvinte, un concept ; ca orice ima-

[1] Albert Spaier, *La pensée concrète. Essai sur le symbolisme intellectuel*, Paris, Alcan, 1927, p. 29.
[2] *Ibidem*, p. 162.

gine, el este o imagine conceptuală. Cel mai simplu dat sensibil nu este un pur „element sensibil", pentru că se definește și se clasează prin însești calitățile sale sensibile" [1].

Pe de altă parte, gîndirea „simbolizează întotdeauna fie fenomene, fie raporturi între conținuturi singulare fie în sfîrșit vaste sisteme de relații...

În același timp, explicită sau implicită, intuitivă sau discursivă, exprimată deplin sau simplă aluzie, ea posedă întotdeuna o anumită denotație concretă, care constituie punctul său de plecare și de care nu se poate rupe complet fără a-și pierde întreaga semnificație și rațiune de a exista" [2].

Nu-l putem urma pe Spaier în încercarea sa de a extinde conceptul la întregul domeniu al cunoașterii. Conceptul și-ar pierde astfel rolul său propriu în activitatea de cunoaștere a gîndirii și s-ar dizolva complet într-o masă informă de informații. Chiar exemplele pe care le dă ne conving de injustețea punctului său de vedere. „Cel mai simplu contact" nu este un concept, pentru că nu are la bază, neapărat, o generalizare prin intermediul practicii sociale. El dobîndește foarte devreme o semnificație printr-un proces de condiționare, dar în cadrul a ceea ce Pavlov a numit „primul sistem de semnalizare". Totuși, cu aceste rezerve — fără îndoială foarte importante —, trebuie să fim de acord cu fenomenul conceptualizării treptate, în ontogeneză, a imaginilor senzoriale. Aceasta, cum spuneam, nu în sensul vag al dobîndirii de semnificații ci în sensul mai special și mai riguros al raportării obiectelor pe care aceste imagini le reflectă la *clase* dezvăluite, delimitate prin practica socială.

Dar Spaier nu reduce pur și simplu imaginile la concepte. Privind problema din unghiul opus, el admite — în opoziție cu psihologii de la Würzburg — și necesitatea de a se avea în vedere ce anume „denotă" conceptul, raportarea sa implicită sau explicită la un ansamblu de fenomene concrete.

Ceea ce merită atenție în concepția sa este în special faptul că unificarea diverselor aspecte ale cunoașterii, și în special ale gîndirii, se face pe baza simbolizării. Astfel, el s-a apropiat de explicația materialistă a cunoașterii prin raportarea la fenomenul fundamental al semnalizării, dar n-a ajuns și n-a putut ajunge pînă la ea. Pentru aceasta ar fi trebuit să se situeze ferm

---

[1] A. Spaier, *op. cit.*, p. 100—101.
[2] *Ibidem*, p. 283.

pe poziția filozofiei materialiste și să dispună de întregul sistem de cunoștințe fiziologice al pavlovismului.

Simbolizarea nu înseamnă încă *semnalizare* în sensul concepției materialiste a lui I. P. Pavlov și poate ajunge chiar la semnificația opusă (cum s-a întîmplat la Helmholtz).

Semnalizarea, în concepția materialistă, nu înseamnă prezența unei relații întîmplătoare, arbitrare, între un semn și un fenomen oarecare, iar senzațiile, percepțiile, reprezentările etc. nu sînt simple anunțuri despre apariția unor fenomene cu care aceste imagini nu întrețin decît relații exterioare și întîmplătoare. Semnalizarea, ca mecanism de prim ordin în procesul adoptării superioare a organismelor la mediu, implică stabilirea unor conexiuni de importanță vitală, sancționate de activitatea practică. Senzațiile,percepțiile, reprezentările etc. îndeplinesc funcțiunea de semnalizare subiectivă în măsura în care reproduc, reflectă adecvat, în baza unor conexiuni esențiale, vitale realitatea obiectivă.

În fiziologia și psihologia sovietică, această teză a fost profund și larg dezvoltată. Originile explicației materialiste a mecanismului și rolului imaginilor subiective se găsesc încă în lucrările lui I. M. Secenov.

În opoziție cu opiniile unei serii de cercetători idealiști din vremea sa, Secenov ajunge la concluzia că între imaginea perceptivă și cea mnemonică (reprezentarea) nu există nici o deosebire de esență atît în ce privește conținutul, oglindirea realității, cît și în ceea ce privește mecanismul, baza reflexă.

„Din punctul de vedere al esenței procesului — scria I. M. Secenov —, acesta este un act tot atît de real de excitare a aparatelor nervoase centrale ca în orice formațiune psihică puternică provocată de o influență externă reală, care acționează în acel moment asupra organelor de simț... Și, astfel, repet : *între impresia reală cu consecințele sale și amintirea acestei impresii nu există, în fond, nici cea mai mică deosebire din punctul de vedere al procesului.* Este vorba de același reflex psihic cu același conținut psihic, deosebit numai în privința excitanților“ [1].

Se știe că I. M. Secenov a dezvoltat concepția — revoluționară pentru epoca sa și care s-a dovedit extrem de rodnică — după care întreaga activitate psihică este produsul activității reflexe a creierului. Diferitele fenomene psihice, între acestea

[1] И. М. Сеченов, *Избранные философские и психологические произведения*. Огиз, 1947, p. 146.

și reprezentările, trebuie considerate ca fiind în fond constituite de verigile medii, corticale, ale reflexelor. Faptul că, spre deosebire de reflexele pur fiziologice, în cazul fenomenelor psihice a treia verigă nu este întotdeauna manifestă, cum se întîmplă frecvent în cazul reprezentărilor, se explică prin intervenția inhibiției centrale, descoperită și studiată de Secenov.

Momentele principale ale concepției materialiste a lui Secenov asupra reprezentărilor, din cele arătate pînă aici, sînt deci: a) reprezentările și percepțiile nu sînt decît oglindiri ale obiectelor reale ; b) reprezentările sînt produsul activității reflexe a creierului, apărute, ca și celelalte reflexe, sub acțiunea unui stimul extern. Dar Secenov merge mai departe. El înțelege și deosebirea calitativă dintre reprezentări și percepții, deosebire care constă în faptul că *reprezentările dobîndesc un caracter generalizat*. „...Toate impresiile izolate care ne vin de la obiectele și evenimentele cele mai obișnuite care constituie mediul nostru de fiecare zi — spune el — se contopesc, ca să zicem așa, în rezultate medii și, firește, cu atît mai complet cu cît formațiile care se contopesc prezintă mai puține particularități distinctive, adică cu cît acestea sînt mai apropiate ca natură (de exemplu contopirea teiului, a stejarului în reprezentarea copacului) sau cu cît a fost percepția lor mai superficială și mai puțin diferențiată“ [1].

Concepția lui I. M. Secenov a fost ridicată pe o treaptă superioară de teoria semnalizării a lui I. P. Pavlov.

Semnalizarea, în concepția lui I. P. Pavlov, se raportează la relațiile materiale fundamentale dintre organism și mediu. Ea este în primul rînd o funcție de adaptare, dar nu ca o supunere pasivă din partea organismului, ci în sensul asigurării unor reacții suple și eficiente la variațiile mediului. De aceea semnalizarea, în concepția pavloviană, implică cu necesitate concordanța imaginilor cu realitatea obiectivă, fidelitatea reflectării realității în aceste imagini.

Pe de altă parte, atît teoria leninistă a reflectării, cît și concepția pavloviană a celor două sisteme de semnalizare, susținînd și fundamentînd corelația dintre cele două trepte ale cunoașterii, nu șterg deosebirile calitative dintre ele, așa cum se întîmplă la Spaier. Relațiile dintre imaginea intuitivă și concept își găsesc explicația deplină numai în cadrul acestor concepții. Percepția și reprezentarea — imagini aparținînd pri-

[1] I. M. Secenov, *op. cit.*, p. 440.

mului sistem de semnalizare — oferă o reflectare directă a realității obiective în primul rînd pe baza experienței proprii a individului.

Cuvîntul este însă „un semnal al semnalelor". Conceptul pe care-l exprimă constituie o reflectare mijlocită a realității obiective pe baza practicii sociale. Cuvîntul, servind ca semnalizare interumană, trebuie să exprime ceea ce-i apare societății (și nu doar unui individ izolat) ca fiind general, esențial într-o categorie de lucruri; altfel înțelegerea între oameni pe baza limbajului n-ar fi posibilă. În felul acesta se ajunge la o reflectare a generalului din lucruri, incomparabil mai profundă și mai riguroasă decît se poate obține pe baza practicii individuale, izolate. „Excitanții care intră în acest sistem — scrie A.N. Leontiev — reprezintă influențe care nu sînt exercitate direct de însușirile obiectelor din lumea înconjurătoare, de legăturile și relațiile dintre ele, ci de acțiunile acestor însușiri așa cum sînt reflectate, fixate în sunetele sau în semnele grafice ale limbii.

Astfel, excitanții din cadrul celui de-al doilea sistem de semnalizare nu sînt pur și simplu excitanți condiționați de gradul doi. Ei se deosebesc de excitanții condiționați din primul sistem de semnalizare prin aceea că reprezintă, într-o formă materială capabilă să acționeze asupra omului, însușirile și relațiile dintre obiecte, generalizate și abstractizate. De aceea acești excitanți formează pentru om un sistem special al realității. Aceasta este realitatea cunoștințelor elaborate de societate, a reprezentărilor despre lume, exprimate în cuvinte. Aceasta este realitatea *conștiinței sociale*" [1].

Între cele două sisteme de semnalizare ale creierului uman se stabilesc anumite relații specifice, de care trebuie să ținem seama ori de cîte ori ne propunem să explicăm obiectiv dinamica diferitelor modalități de reflectare a realității.

Reflectarea sub formă de imagini concrete este, evident, filogenetic și ontogenetic mai veche. Ea este, în principiu, posibilă și în absența unei reflectări conceptuale, abstractizate, ceea ce se întîmplă întotdeauna la animalele capabile de senzații sau la copii înainte de apariția limbajului.

Al doilea sistem de semnalizare nu este însă posibil decît pe baza primului sistem. Reflectarea conceptuală presupune formarea în scoarța cerebrală a unor vaste sisteme de legături

[1] A. N. Leontiev, *Învățarea ca problemă a psihologiei*, în „Analele rom.-sov.", 1957, nr. 4, p. 78.

temporare, datorită cărora cuvîntul devine un substitut al diverselor imagini particulare în care un obiect sau mai multe obiecte din aceeaşi clasă s-au reflectat. Această sistematizare de legături nervoase, exprimată în concept, se mulează întotdeauna în tiparele practicii sociale. Semnificaţia cuvîntului, adică aria fenomenelor obiective la care se raportează cuvîntul, nu se stabileşte de către individ, ci de practica socială. Ea exprimă cristalizarea unei generalizări, a unei legităţi dezvăluite de practica socială.

Dacă lucrurile stau astfel înseamnă că : a) conceptul nu poate exista ca un act pur, „inefabil", ci întotdeauna exprimat, adică prin intermediul unui semnal (în speţă cel verbal, kinestezic sau sonor) ; b) conceptul trebuie să menţină legătura, oricît de complexe şi de ocolite ar fi căile, cu „primul sistem de semnalizare", cu cunoaşterea directă a realităţii prin imagini senzoriale. Conceptul nu se reduce nici la excitantul care serveşte ca semnal (kinestezic sau sonor), nici la o imagine sau un „polipier" de imagini intuitive.

Conceptul se bazează pe această unitate dinamică, formată sub influenţa societăţii, a unui vast sistem de legături temporare între cuvîntul-semnal şi varietatea modalităţilor particulare în care obiectele din clasa dată i-au apărut individului.

De aceea cel de-al doilea sistem de semnalizare nu se clădeşte doar pe baza primului sistem. Într-un anumit sens, al doilea sistem de semnalizare îl include pe primul, îl înglobează pe primul. Aceasta nu înseamnă că cuvîntul, în utilizarea sa, evocă neapărat o imagine anumită. După cum a arătat I. P. Pavlov, al doilea sistem de semnalizare „îl ţine în surdină" pe primul, îi inhibă activitatea pentru a nu fi deranjată a sa proprie. Dar această trecere a primului sistem pe planul al doilea nu înseamnă totala întrerupere a relaţiilor cu el. Cuvîntul îşi trage seva din contactul permanent cu sistemele de legături care au fixat experienţa senzorială anterioară a individului.

În cadrul celui de-al doilea sistem de semnalizare se stabilesc, de asemenea, vaste şi variate sisteme de legături temporare care tind să se automatizeze treptat. Se formează unităţi lingvistice sub formă de propoziţii şi fraze mai mult sau mai puţin automatizate. Se constituie forme generalizate de exprimare, structuri gramaticale şi topice mai mult sau mai puţin fixate prin uzaj, în care cuvintele intră ca variabile. Toate acestea permit utilizarea liberă a lanţurilor verbale fără a fi nevoie să se evoce permanent imaginile senzoriale corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Conceptele se constituie în sisteme ierarhice, între care se stabilesc variate raporturi de sub-, supra și coordonare și care sisteme reflectă, de fapt, sisteme ierarhice de legitate din realitatea obiectivă. Legile gîndirii logice, în care se reflectă de asemenea, pe baza practici sociale, anumite relații obiective fundamentale dintre fenomenele realității în desfășurarea lor, asigură cursul corect al gîndirii, al utilizării corecte a semnalelor verbale în cunoașterea mijlocită a realității.

În felul acesta, cel de-al doilea sistem de semnalizare pare să se constituie într-un sistem autonom. Se creează iluzia independenței gîndirii de realitatea obiectivă, de practică, de cunoașterea senzorială. Se creează iluzia că gîndirea conține în ea însăși toate sursele informațiilor cu care operează și toate mijloacele de a-și verifica concluziile. Această iluzie este unul dintre izvoarele gnoseologice ale idealismului.

În realitate însă, „mandatul" gîndirii autonome este temporar și limitat. Așa cum spuneam, fiind un rezultat al activității celui de-al doilea sistem de semnalizare, gîndirea, chiar cea mai abstractă, pentru a fi eficientă, este obligată să păstreze contactul cu realitatea obiectivă prin intermediul primului sistem de semnalizare care i-a servit ca fundament, oricît de complicate ar fi căile acestor relații.

Pe de altă parte, cel de-al doilea sistem de semnalizare, cristalizînd o vastă experiență socială, oferă posibilitatea unei cunoașterii mai profunde și mai ample a realității obiective. Din această cauză, cel de-al doilea sistem „ține sub controlul său", cum arată Pavlov, semnalele primului sistem. Acesta este un alt aspect important al relațiilor despre care vorbim.

Senzațiile, percepțiile, reprezentările noastre nu-și pot păstra „puritatea" senzorială. Ele nu rămîn simple reflectări nemijlocite ale realității. De fapt, toate aceste imagini sînt influențate în structura lor internă, ca și în modul lor de asociere, de generalizările și abstractizările realizate de către etajul superior.

De aici opinia falsă susținută de o serie de psihologi (dintre care unii au fost citați de noi mai sus) că imaginile nu sînt decît simbolizări ale conceptelor.

★

Teoria pavlovistă a celor două sisteme de semnalizare și a interdependenței dintre ele a făcut posibilă cercetarea științifică a variatelor și complexelor relații dintre concept și ima-

Scanned with OKEN Scanner

ginea senzorială, dintre abstract şi intuitiv în activitatea gîndirii. „Întrepătrunderea dintre intuitiv şi generalizat în reprezentări — scrie B. G. Ananiev — constituie principala particularitate ca verigă a trecerii dialectice de la senzaţie la gîndire, care are drept substrat material interacţiunea dintre primul şi al doilea sistem de semnalizare în activitatea scoarţei marilor emisfere cerebrale ale omului“ [1].

Psihologii sovietici, bizuindu-se pe teoria leninistă a reflectării, au relevat unitatea contradictorie care există între reprezentări şi concepte. „Unitatea dintre gîndire şi reprezentare în procesul dezvoltării cunoaşterii realităţii are un caracter contradictoriu dialectic“, scrie B. G. Ananiev [2]. Dezvoltînd această idee, Ananiev se referă în continuare la V. I. Lenin. „Pe de o parte — spune el — gîndirea poate fi, trebuie să fie luată din reprezentări, după cum arată V. I. Lenin, în măsura în care ea oglindeşte particularul, dar pe de altă parte „coincidenţa gîndirii cu obiectul este un *proces*. Gîndirea (=omul) nu trebuie să-şi reprezinte adevărul sub forma unui repaus mort, sub forma unui tablou (chip) (şters), fără tendinţă, fără mişcare, asemenea unui geniu, unui număr, unui gînd abstract“ (Lenin)“ [3].

În opoziţie cu concepţia simplistă care separă în mod mecanic imaginea de concept (şi care separaţie se bazează pe teza idealistă a independenţei conştiinţei faţă de realitatea obiectivă), psihologia materialistă, ştiinţifică recunoaşte şi cercetează relaţiile reciproce dintre aceste două modalităţi de reflectare a realităţii. „Orice proces de gîndire se desfăşoară prin generalizări — scrie S. L. Rubinstein. Acestea se exprimă în noţiuni, care reprezintă conţinutul specific al gîndirii. Orice proces de gîndire... are ca rezultat, într-o măsură mai mică sau mai mare, noţiuni... În procesul real de gîndire însă, noţiunile nu apar izolate ; ele formează o unitate cu momentele de reflectare intuitivă, cu care se intrică, şi cu cuvîntul care, ca formă de existenţă a noţiunii, este, în acelaşi timp, o imagine acustică sau optică“ [4].

---

[1] Б. Г. Ананьев, *Проблема представления в советской психологической науке*, în *Философские записки*, т. V, Изд. АН СССР. Moscova-Leningrad, 1950, p. 68.

[2] B. G. Ananiev, *op. cit.*, p. 67.

[3] B. G. Ananiev, *op. cit.*, p. 67. Citatul din Lenin redat de Ananiev a fost reprodus de noi după V. I. Lenin, *Caiete filozofice*, Bucureşti, E.S.P.L.P., 1960, p. 161.

[4] С. Л. Рубинштейн, Основы общей психологии, Moscova 1946 p. 348.

Imaginile intuitive îndeplinesc, ca și conceptele, „o funcțiune semantică — după cum arată S. L. Rubinstein „imaginea, ca imagine a unui obiect, are un conținut semantic. Orice imagine, percepută sau reprezentată, are o anumită semnificație care se exprimă printr-un cuvînt : ea desemnează un obiect... Acest conținut semantic este numitorul comun pentru imagine și noțiune“ [1].

În calitate de componente ale procesului de gîndire, imaginile intuitive suferă influența acestui proces. Însăși modificările suferite de reprezentări sînt o dovadă a rolului activ pe care reprezentările îl joacă în procesul gîndirii, aceste modificări fiind subordonate caracteristicilor gîndirii ca proces de reflectare generalizată și abstractizată a realității. „Prin pătrunderea imaginii în gîndire și prin îndeplinirea unei funcțiuni semantice — scrie mai departe S. L. Rubinstein —, ea însăși se intelectualizează. Prin funcțiunea pe care o îndeplinește în gîndire, prin semnificația ei generalizată, al cărei purtător senzorial este, se modifică însuși conținutul senzorial : acesta este supus unor anumite retușări. Pe primul plan trec acele trăsături care sînt legate de semnificație iar celelalte, neesențiale, accidentale trec în planul al doilea, devin mai palide, se pierd“ [2].

Psihologul sovietic V. N. Sergheevicev, bizuindu-se pe rezultatele unor cercetări experimentale privitoare la influența excitanților verbali asupra reprezentărilor vizuale, scrie : „Datorită cuvîntului, elementele senzoriale percepute ale obiectului studiat sînt diferențiate, înregistrate și dobîndesc un anumit sens. Pe această bază, reprezentarea dobîndește precizie, claritate, stabilitatea necesară și, în același timp, un înalt grad de mobilitate și activitate, adică posibilitatea de a restabili în mod conștient imaginea pentru rezolvarea problemei“ [3].

Cercetările lui F. N. Șemeakin și A. I. Kolodnaia s-au ocupat în mod special de reprezentările topografice, ajungînd la concluzia influenței exercitate de semnificația verbală asupra formării acestor reprezentări [4].

După F. N. Șemeakin reprezentările topografice apar în două forme principale, care constituie, în același timp, niveluri deosebite în dezvoltarea reprezentărilor : a) forma mintală de

---

[1] S. L. Rubinstein, *op. cit.*, p. 349.
[2] *Ibidem*, p. 350.
[3] V. N. Sergheevicev, *Formarea și modificarea reprezentărilor vizuale* în „Analele rom.-sov., seria psih.-ped., 1953, nr. 1, p. 34.
[4] B. G. Ananiev, *op. cit.*, p. 90—91.

Scanned with OKEN Scanner

„hartă-deplasare", b) forma mintală de „hartă-viziune". Prima formă este redarea itinerarului, a drumului străbătut etapă cu etapă. O asemenea reprezentare este mai concretă, transpune direct experienţa practică a individului în efectuarea drumului.

„Harta-viziune" este o formă superioară de reprezentare spaţială, sintetică, cu înţelegerea ansamblului relaţiilor reciproce dintre diferitele puncte ale spaţiului într-o regiune anumită. Şemeakin emite ipoteza, extrem de importantă, după care această trecere la o reprezentare sintetică generalizată a spaţiului se realizează cu participarea limbajului.

Ananiev citează un fapt care constituie o confirmare a ipotezei lui Şemeakin. A. I. Kolodnaia a arătat că, în urma unor leziuni profunde ale lobului parietal, se observă un sindrom al tulburărilor spaţiale primare, care determină tulburarea ambelor forme ale reprezentărilor topografice descrise de F. N. Şemeakin. În schimb, Kolodnaia constată că în urma unor leziuni profunde ale lobului temporal apar perturbări numai ale formei superioare de reprezentări topografice. Astfel Kolodnaia conchide că în cazul reprezentărilor spaţiale de tipul hărţii-viziune este necesară integritatea funcţiilor verbale. „Aceste cercetări — arată B. G. Ananiev — confirmă ipoteza că la baza reprezentărilor stă interacţiunea dintre primul şi al doilea sistem de semnalizare" [1].

Aşadar, ca urmare a interdependenţei complexe dintre cele două sisteme de semnalizare ale creierului uman, imaginile intuitive şi conceptele se condiţionează şi se influenţează reciproc. Esenţial este faptul că nu este vorba de cuplări, contopiri sau retuşări mecanice pe baza doar a unor influenţe intramentale, ci de *modificări subordonate funcţiunilor specifice ale gîndirii ca proces de cunoaştere activă a realităţii obiective.*

Imaginile intuitive apar pe primul plan, aşa cum arată şi S. L. Rubinstein, ori de cîte ori procesul gîndirii întîmpină dificultăţi. Dar nu-i revine în genere gîndirii rolul de a rezolva dificultăţile întîmpinate de om în activitatea sa, adică de a *rezolva problemele întîlnite?* [2] Imaginile pot fi trecute şi sînt trecute pe planul al doilea atunci cînd raţionamentul nu face decît *să reconstituie* într-o formă fundată logic o soluţie deja găsită, adică atunci cînd ne propunem să demonstrăm ceea ce, printr-un şir întreg de tatonări, am găsit deja. În procesul gîndirii con-

[1] B. G. Ananiev, *op. cit.*, p. 91.
[2] Ne referim, bineînţeles, aici la planul cunoaşterii.

structive însă, în care are loc o căutare efectivă, printr-un șir de restructurări succesive a ipotezelor și soluțiilor parțiale, reprezentările joacă un rol important. Dar nu este vorba de simple duplicate ale obiectelor din realitate. Asemenea duplicate ar aduce cu ele un balast greu de vehiculat. Între concepte, pe de o parte, și reprezentări, pe de altă parte, joncțiunea ar fi greu de realizat. *Reprezentările care se pun în serviciul gîndirii dobîndesc, într-o măsură mai mică sau mai mare, caractere conceptuale.* Ele se simplifică, se schematizează, se purifică și, așa cum arată Sergheevicev, se precizează, se limpezesc, se stabilizează (ca structură internă), dobîndesc un grad de mobilitate (ca relații externe) care le fac apte a intra în angrenajul extrem de suplu al gîndirii. „Ca rezultat al acestei prelucrări a conținutului intuitiv al imaginii — spune S. L. Rubinstein — se ajunge la o întreagă ierarhie de reprezentări din ce în ce mai generalizate și mai schematice; acestea reproduc, pe de o parte, percepția în individualitatea ei, iar pe de altă parte tind spre noțiuni. Reprezentarea are astfel tendința de a deveni noțiune, de a reda prin singular generalul, prin fenomen esența, prin imagine conceptul“ [1].

Datorită acestei interdependențe interne dintre concept și reprezentare în fluxul gîndirii, conceputul decupează parcă din structura eterogenă a imaginii senzoriale elementele intuitive esențiale care corespund exigențelor sale. Produsul acestei acțiuni selective nu mai este o reprezentare propriu-zisă, întotdeauna impregnată de aspecte senzoriale eterogene (oricît de transparentă și schematică ar fi), ci o formație mixtă conceptualo-intuitivă.

Aceste formații mixte, pe care le vom numi convențional imagini-abstracții, nu pot fi sesizate direct, introspectiv, așa cum putem deveni conștienți de reprezentările înseși. Ele nu pot fi decît urmărite indirect în dinamica procesului mintal avînd în vedere cursul însuși al acestui proces.

Imaginile-abstracții joacă, după părerea noastră, un rol de prim ordin în gîndirea creatoare. Conceptele figurale ale geometriei fac parte din clasa acestor entități mintale.

---

[1] S. L. Rubinștein, *op. cit.*, p. 358.

CAPITOLUL AL IX-lea

IMAGINILE-ABSTRACȚII ȘI CONCEPTELE FIGURALE

Să încercăm, în continuare, să precizăm natura acestor formațiuni mintale și rolul lor în procesul gîndirii.

Prin structura lor, imaginile-abstracții îndeplinesc o dublă funcțiune. Ele contribuie la menținerea legăturii dintre țesătura abstractă, conceptuală a gîndirii și inepuizabila bogăție a concretului. În același timp, aceste imagini-abstracții mijlocesc controlul cunoștințelor teoretice deja cristalizate asupra utilizării informațiilor dobîndite direct de la realitatea obiectivă.

Imaginile abstracții joacă un rol important în gîndirea științifică. Ele nu se reduc, după cum spuneam, nici la reprezentări, nici la concepte. Ele țin atît de domeniul conceptual cît și de cel al intuitivului. Imaginile — abstracții, așa cum le înțelegem noi, sînt constituite din acele elemente ale reprezentărilor pe care sistemul conceptual le selecționează, potrivit exigențelor sale și le structurează în formațiuni relativ stabile. În mod practic, aceste formațiuni rămîn impregnate de elemente senzoriale diverse și ne apar ca reprezentări mai mult sau mai puțin schematizate. Numai sub influența rețelei conceptuale ele se detașează tinzînd spre idealitatea, puritatea, esențialitatea conceptelor și integrîndu-se în fluxul procesului de gîndire. Se pot cita cu ușurință nenumărate exemple.

Să urmărim, de pildă, acest pasaj din Pavlov în care se comentează rezultatele unor experiențe (este vorba de cercetările referitoare la iradierea și concentrarea proceselor nervoase în cortex): „Sensul experienței este evident. Deoarece punctele cutanate reprezintă proiecția punctelor corespunzătoare din scoarța cerebrală, reiese din experiența prezentată, ca și în toate celelalte identice cu ea, că inhibiția produsă de

excitația de la locul nr. 0 se răspîndește din punctul cortical corespunzător al punctelor vecine într-o măsură cu atît mai mică, cu cît aceste puncte se găsesc situate mai departe de punctul unde se produce inhibiția, neputînd fi de loc apreciată pe punctele mai depărtate. Prin urmare, ne găsim în fața unei iradiații a proceselor de inhibiție pornite de la punctul respectiv în masa emisferelor cerebrale" [1].

Pavlov își propune să urmărească reacțiile animalului declanșate de aplicarea stimulului în diverse puncte ale pielii. Ceea ce se petrece în cortex nu este văzut, nu este perceput direct. Fenomenele corticale nu pot fi stabilite decît printr-un proces mintal, prin raționament (ulterior, după cum se știe, pe cale electroencelafografică, aceste explicații au fost confirmate prin înregistrare directă). Dar este acest raționament al lui Pavlov numai o construcție conceptuală?

Inhibiția este în acest raționament un concept. Punctele corticale sînt concepte. Iradierea este un concept. Și, cu toate acestea, în structura raționamentului respectiv, în desfășurarea gîndirii active, creatoare a omului de știință, toate aceste concepte nu sînt abstracții pure. Pavlov caută o corelație între ceea ce se întîmplă în afară — reacțiile la diversele stimulări ale pielii — și ceea ce s-ar putea întîmpla în cortex. În acest raționament al lui I. P. Pavlov, inhibiția nu este nici doar reprezentată, nici doar gîndită abstract (ca într-un silogism constituit). Pavlov nu are în vedere toate modificările biochimice, electrice care constituie inhibiția și ansamblul concret al celulelor corticale în care se desfășoară. El abstrage un aspect — fenomenul de frînare pe care-l concepe simplificat, idealizat, conceptualizat. În același timp însă, el vede *mintal*, el își *imaginează* aceeași inhibiție ca pe un fluid care se deplasează spațial. În felul acesta el are *imaginea* fluidului care nu se propagă instantaneu, ci cuprinde *treptat* mereu alte puncte ale cortexului. Înseși aceste puncte sînt imagini-abstracții. De fapt e vorba de celule corticale. În raționamentele respective însă, un singur aspect interesează: distribuția spațială. Aceste *puncte* sînt concepte, sînt abstracții care păstrează totuși elemente intuitive (poziția reciprocă, relația cu punctele cutanate, poziția pe cortex), elemente *care joacă un rol activ, esențial, în desfășurarea raționamentului.*

[1] I. P. Pavlov, *Prelegeri despre activitatea emisferelor cerebrale*, Edit. Academiei R.P.R., 1951, p. 128.

Prezența imaginilor-abstracții este necesară în orice experiment mintal. Șanțul perfect lustruit al lui Galileu, pe care bila va aluneca la infinit în virtutea unui impuls inițial, este în fond o abstracție, întrucît purifică, idealizează, simplifică la extrem fenomenele. Dar acest șanț nu este mai puțin o *imagine intuitivă* supusă mintal unor modificări de poziție, unor deplasări etc. Odată principiul inerției stabilit, putem utiliza legea respectivă conceptual, fără intervenția unei imagini, dar în eforturile de a o găsi savantul nu s-a putut dispensa de imagine.

Liftul din celebra experiență a lui Einstein este și el produsul unei abstracții științifice, controlat riguros de un sistem conceptual. Nu numai cîmpul gravitațional este eliminat, dar și toate atributele concrete, inerente unei asemenea încăperi (ca, de pildă, materialul din care este constituită), afară de ceea ce este prevăzut teoretic de sensul experienței. Ceea ce rămîne nu este un sistem pur de concepte, ci un ansamblu de reprezentări din care sistemul conceptual reține și utilizează numai elementele intuitive necesare. „În calitate de corp de referință ne gîndim la o ladă spațioasă de forma unei camere; în această încăpere se află un observator prevăzut cu aparate. Acesta nu are, firește, greutate. El trebuie să se țină de podea cu ajutorul unei sfori, dacă nu vrea să zboare spre plafon la cea mai ușoară izbire de podea. De capul lăzii, la mijloc, este prins un cîrlig prevăzut cu o frînghie de care o ființă, pentru noi indiferent care, începe să tragă cu o forță constantă etc. etc.“ [1].

Aceste reprezentări nu se înlănțuie la întîmplare, nici nu reproduc doar — direct — experiența anterioară. În același timp însă, ele nu sînt, ca în concepția lui Delacroix sau Meyerson, simple jaloane care marchează, care „substantivizează“ cursul procesului ideativ. Ele *fac parte integrantă din procesul gîndirii creatoare,* ele fac parte din substanța însăși a experimentului mintal, a raționamentului „plauzibil“ care caută, încearcă, combină, presupune.

Dar participarea la raționament nu se face prin întregul complex senzorial, ci doar prin unele aspecte intuitive, selecționate, purificate, sintetizate și controlate conceptual. Esențial este faptul că gîndirea creatoare, constructivă, nu se poate dispensa de aceste imagini, imagini-abstracții special adaptate prin procesul de conceptualizare la care au fost supuse, pentru a se integra organic într-un proces ideativ, într-un flux de idei

[1] A. Einstein, *Über die Spezielle...* p. 45.

direcționat logic. Aportul lor este aportul complexului inepuizabil *al concretului*, deși un concret rafinat, stilizat, rarefiat. Figurile geometrice din experimentul mintal mai sus citat, al lui Polya, îndeplinesc același rol. Ele oferă gîndirii cercetătorului o priză asupra *obiectului*, asupra structurii complexe și multiple care constituie obiectul, în cazul respectiv, numai sub raportul aspectelor spațiale.

Aceste imagini-abstracții reprezintă formațiuni mixte conceptual-intuitive care nu se relevă decît în *dinamica* procesului mintal. Ele nu sînt reprezentările însăși de care ne servim, întrucît aceste reprezentări aduc în general, așa cum am arătat, și o serie întreagă de elemente senzoriale, eterogene. În raționamentul lui Pavlov, fluidul care se propagă capătă în *reprezentare* aspectul unei substanțe întrucîtva asemănătoare cu un lichid foarte slab colorat ce se deplasează în unde. În experimentul mintal al lui Einstein ne imaginăm o cameră, o *încăpere*, un *cîrlig*, o *frînghie* etc. Toate acestea, oricît de vagi, de transparente, ar fi în reprezentare, nu pot să nu fie însoțite de anumite atribute senzoriale (cum ar fi coloritul, dimensiunile relative, aspectul materialului din care sînt confecționate), aspecte senzoriale eterogene, străine domeniului de legitate considerat, care în raționament nu ocupă nici un loc. Dar aceasta nu înseamnă că nici un atribut intuitiv nu intervine în acest raționament. Situarea persoanei în *interiorul liftului, presiunea podelei, deplasarea obiectelor* în aceeași încăpere etc. etc. sînt elemente intuitive care în raționament sînt utilizate. Aceste elemente intuitive nu sînt delimitate de ansamblul atributelor senzoriale decît de normele conceptelor respective. Ele capătă, tind să capete într-o anumită măsură, așa cum spuneam, calități conceptuale de puritate, stabilitate, generalitate, esențialitate etc. sub influența însăși a conceptelor corespunzătoare. Totuși, aceste formațiuni nu sînt concepte pure, întrucît în raționament, în experimentul mintal, ele sînt supuse unor operații de natură intuitivă: atracții, respingeri, deplasări, îmbinări etc., care în domeniul conceptelor nu au sens.

Cu aceasta ajungem la un domeniu extrem de important al științei contemporane, pe care psihologia gîndirii nu-l poate ocoli. E vorba de teoria *modelelor*.

A. A. Zinoviev și I. I. Revzin definesc *modelul* în felul următor: „Fie *X* o mulțime de judecăți care descriu (fixează) relațiile dintre elementele unor obiecte complexe *A* și *B*. Prin elemente ale obiectelor complexe avem în vedere diversele com-

ponente structurale sau proprietăţi, relaţiile şi legăturile lor, etapele consecutive ale unui proces etc.

Judecăţile *X* pot fi judecăţi despre identitatea unor ecuaţii matematice care descriu obiectele *A* şi *B*, despre corespondenţa elementelor lor, despre coeficienţii lor de asemănare etc. Fie, mai departe, *Y* o mulţime de judecăţi care se obţin prin studiul lui *A* şi care sînt distincte de judecăţile *X*. Aceste judecăţi pot fi rezultatul observării lui A, fixarea unor rezultate experimentale sau concluzia unor raţionamente. În sfîrşit, fie *Z* o mulţime de judecăţi referitoare la *B*, de asemenea distincte de *X*. Dacă *Z* se deduce din conjuncţia lui *X* şi *Y* după regulile logicii atunci *A* este un model pentru obiectul *B*, iar *B* este originalul modelului *A*“ [1].

Ceea ce înseamnă — exprimat mai puţin riguros, dar mai simplu — că *A* poate fi considerat ca un model (reproducere simplificată) a lui *B*, atunci cînd putem obţine anumite cunoştinţe despre *B* prin simpla cercetare a lui *A*, pornind de la existenţa unor relaţii determinate între *A* şi *B*.

Reprezentările omului de ştiinţă joacă, în general, rolul unor asemenea modele. Adeseori, în ştiinţă modelul este construit în mod conştient, intenţionat de către cercetător, care are în vedere atît izomorfismul fundamental între *A* şi *B*, cît şi limita validităţii pentru *A* a rezultatelor obţinute din cercetarea lui *B*. Profilul unei elice se poate cerceta în încăperi special construite, în care se produc curenţi de aer cu o viteză foarte mare. Pentru determinarea efectelor imponderabilităţii asupra organismului, subiectul poate fi instalat într-o încăpere supusă un timp scurt căderii libere etc.

Modelele nu sînt întotdeauna obiecte concrete. „Sînt posibile cazuri, notează aceiaşi autori (foarte frecvente în fizica teoretică) cînd un model de acest fel este un obiect imaginat, adică reprezentările şi cunoştinţele cercetătorului sînt suficiente pentru a dezvolta un anumit sistem de judecăţi...“ [2].

Se poate întîmpla ca cercetătorul care lucrează cu astfel de reprezentări-modele să nu fie conştient de rolul de model al acestora, chiar să nu-şi dea seama că abstracţiile cu care operează sînt grevate de imagini care pot strecura clandestin elemente necontrolate, putînd deci determina rezultate eronate.

---

[1] A. A. Zinoviev şi I. I. Revzin, *Modelul logic ca mijloc al investigaţiei ştiinţifice*, în „Voprosî filosofii“, 1960, nr. 1, trad. rom., p. 102.
[2] *Ibidem*, p. 106.

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă necesitatea aprofundării acestei probleme foarte importante pentru teoria gîndirii.

În mod necesar, modelul fiind numai o reproducere simplificată, lasă de o parte unele aspecte proprii, specifice, ale originalului, care sînt presupuse neimportante. Pe de altă parte, modelul însuși poate aduce cu sine alte proprietăți, străine de cele originale, care și ele sînt presupuse ca fiind neimportante. Între original și model trebuie să existe o structură comună, trebuie să existe un anumit grad de izomorfism. Succesul investigației lui *B* prin intermediul lui *A* depinde de gradul de echivalență al celor două sisteme și în același timp de siguranța cu care se poate face delimitarea structurii comune de proprietățile necomune ale lui *B* și *A*.

În cazul imaginilor-abstracții, problema se pune la fel. Reprezentările utilizate ca modele aduc cu ele, pe calea asociațiilor, diverse aspecte concrete, străine domeniului considerat, necomune între *B* și *A* (din punctul de vedere al investigației).

Această imixtiune poate avea loc uneori numai din cauză că cercetătorul neavizat raționează asupra unui *model*, convins fiind că raționează asupra obiectului însuși al investigației. Asemenea erori sînt însă corigibile pe loc, într-o măsură mai mică sau mai mare, în funcție de perspicacitatea cercetătorului. Alteori însă, și acesta este cazul care prezintă cel mai mare interes pentru istoria științelor, aproximația nu poate fi depășită decît printr-un progres obiectiv, general, al cunoștințelor în domeniul respectiv.

★

Există diverse modalități de utilizare a reprezentărilor în gîndirea științifică, în raport cu relațiile dintre concept și structura intuitivă și deci o diversitate de tipuri de imagini-abstracții.

Cînd geograful încearcă să-și explice formarea unei depresiuni, aspectul luat de cursul unei ape, apariția unor lanțuri muntoase, el raționează apelînd la reprezentări. Dar, evident, nu e vorba de simpla evocare a unor imagini formate în experiența anterioară. Reprezentările cu care operează mintal, deși practic sînt imagini foarte apropiate de aspectul concret al obiectelor (munți, rîuri, fenomene de surpare, de eroziune etc.), sînt totuși controlate noțional.

Imaginile sale mintale sînt modele simplificate în raport cu imaginile percepției, dar simplificate cu accentuarea esențialului în baza unei reglementări conceptuale.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, componenta intuitivă reproduce mai mult sau mai puţin fidel aspectul concret al obiectului pe care-l reflectă. Imaginea mintală a muntelui sau a rîului de care se serveşte geograful îi este furnizată de percepţiile anterioare.

Există însă şi alte modalităţi de utilizare a imaginilor în gîndire. Modelul atomic al lui Rutherford, de pildă, în care atomul este conceput ca un minuscul sistem solar, nu s-a obţinut prin schematizarea unei imagini intuitive a atomului. O asemenea imagine directă nu exista. Modelul intuitiv era o construcţie mintală, realizată pe baza unor cunoştinţe teoretice privitoare la structura materiei. Imaginea ca atare era sugerată din cu totul alt domeniu, de o sferă de fenomene situată la cu totul altă scară. În esenţă era vorba de o analogie, dar evident de o analogie a cărei bază o constituiau, cum spuneam, anumite cunoştinţe teoretice. Această analogie era corectată în sensul că atracţia exercitată de particula centrală asupra particulelor-satelit nu se exercita prin forţa gravitaţiei, ci printr-o forţă electrostatică.

Spre deosebire de primul tip de imagini-abstracţii care provin din reprezentări directe ale obiectelor cercetate, în cazul al doilea modelul este în întregime construit mintal. Cu toate acestea, se presupune şi aici că aspectele intuitive ale modelului reproduc, cel puţin în parte, anumite aspecte intuitiv-concrete ale fenomenului real. Orbitele electronilor, aşa cum apar în modelul planetar, reprezintă (în ipoteza respectivă) traiectorii reale, avînd o distanţă determinată faţă de centru pe care particulele se mişcă în mod real cu o viteză determinată.

Există însă imagini-abstracţii în care această regulă nu mai funcţionează. Reprezentările grafice ale funcţiilor $s = vt$ sau $s = \frac{1}{2} at^2$ — în primul caz o dreaptă, în al doilea caz o parabolă — constituie figuri care nu mai reproduc simplificat, schematizat fenomene obiective. Dreapta şi parabola care se obţin nu sînt traiectorii ale unor mobile. Aceste figuri redau într-o imagine intuitivă o *relaţie abstractă* ca atare, o relaţie între abstracţii: variaţia spaţiului în funcţie de timp. Cînd prezinţi cuiva, care nu are cunoştinţe teoretice, schema atomului sub forma modelului planetar, omul acesta îşi poate forma o idee aproximativă asupra felului în care se mişcă electronii în jurul nucleului. Cînd prezinţi cuiva diagrama mişcării uniforme sau a mişcării uniform accelerate, acesta nu-şi poate face nici o idee

asupra fenomenului obiectiv, dacă nu cunoaște codul acestei transcripții, dacă nu cunoaște formulele, noțiunile care intră în joc, tehnica reprezentării grafice.

Iată, așadar, trei tipuri de relații între concept și imaginea-model, trei procedee datorită cărora imaginea intuitivă este pregătită pentru a servi ca model în cercetarea unui fapt obiectiv.

În primul caz, imaginea este *furnizată de obiectul însuși*, simplificată, schematizată sub influența conceptului științific corespunzător. În al doilea caz, *imaginea este împrumutată dintr-un alt domeniu de legitate*, pe baza unei corespondențe stabilite între acestea și domeniul propriu. În al treilea caz, *imaginea este pe de-a întregul construită* în baza abstracțiilor elaborate, prin intermediul unui cod de figurare.

În toate aceste cazuri, imaginile intuitive care servesc ca modele aduc cu sine elemente care, în mod evident, au un caracter accesoriu și sînt neglijate, cum ar fi, de pildă, culoarea cernelii cu care se trasează curbele. Dar în afară de aceasta modelul însuși poate păstra în structura sa internă reziduuri care nu pot fi eliminate, pentru că nivelul cunoștințelor științifice nu permite circumscrierea lor netă. În același timp, modelul poate omite aspecte esențiale, structurale ale originalului, din aceleași motive.

Gradul de viabilitate a imaginilor-abstracții, gradul de viabilitate al modelelor mintale în genere, ca elemente structurale ale investigației științifice, este deci, în ultimă instanță, expresia directă a *gradului de separabilitate* al domeniului de legitate respectiv.

Dacă proprietățile studiate formează un domeniu deplin separabil, atunci, luîndu-se toate măsurile de prevedere, modelul poate fi tot atît de bine utilizat ca și originalul (în cazul că acesta nu este accesibil sau este mai puțin accesibil). Legitățile care guvernează aceste proprietăți nu sînt interdependente cu alte legități de care depind celelalte proprietăți ale modelului și originalului. Acesta este fără îndoială cazul numerelor. Copilul învață să numere și să socotească la fel de bine pe chibrituri, pe bile sau pe semne desenate. Dacă însă e vorba de proprietăți aparținînd unor domenii de legitate numai relativ separabile, atunci, bineînțeles, modelul utilizat va trebui perfecționat prin aproximări succesive.

Să revenim la raționamentul lui Pavlov citat mai sus privitor la iradierea inhibiției.

Pavlov abstractizează fenomenul inhibiţiei, reducîndu-l la imaginea simplificată a unui fluid. Pornind de la această reprezentare, el poate presupune, prin analogie cu un lichid oarecare, că inhibiţia se va revărsa, se va propaga în diferite direcţii, iar timpul care va trece pînă cînd fiecare celulă va fi cuprinsă de inhibiţie va fi în funcţie de distanţa la care celula este situată în raport cu centrul de propagare.

Are acest raţionament rigurozitatea unui raţionament matematic? Evident că nu. E posibil ca lucrurile să se petreacă astfel, dar nu e sigur înaintea unei noi verificări experimentale.

De ce aceasta? Pentru motivul că în realitate fenomenele sînt mult mai complexe. Prin abstractizare, noi am reţinut un aspect sau un mănunchi de aspecte şi am neglijat celelalte. Inhibiţia în propagarea ei poate fi în funcţie nu numai de distanţă. Ea este în fond expresia unor modificări biochimice foarte complexe. Inhibiţia poate fi dependentă (şi este într-adevăr) de starea celulelor nervoase, de influenţa unor stări anterioare, de gradul de excitabilitate al unor alte zone, de prezenţa unor căi funcţionale dinainte formate, de starea organismului în ansamblu etc. etc. Toate acestea înseamnă că imaginea-abstracţie la care Pavlov a apelat în raţionamentul de mai sus este provizorie. De fapt el a fost nevoit să efectueze nenumărate cercetări experimentale pentru a descoperi comportarea inhibiţiei în diferite condiţii.

Izolarea mintală a fenomenului din complexul real a avut o valoare limitată. Proprietăţile sale sînt, de fapt, corelate cu un număr imens de alte fenomene materiale a căror ignorare împiedică completa dezvăluire a acestor proprietăţi.

Nu putem discuta despre inhibiţie, nu putem stabili proprietăţile inhibiţiei sau chiar ale excitaţiei şi inhibiţiei luate împreună avînd în vedere numai aceste procese nervoase. Domeniul de fapte care să prezinte o suficientă întindere pentru a ne permite să stabilim proprietăţi ale inhibiţiei fără să fim nevoiţi să depăşim limitele domeniului este mult mai larg. Nici chiar întregul domeniu al fenomenelor fiziologice nu este suficient. Trebuie să trecem dincolo de limitele organismului, să ne referim la stimuli, la *forţa stimulilor*, deci la fenomene fizice, la succesiunea stimulilor şi la alte relaţii între stimuli, la condiţiile de viaţă etc. etc. După cum se ştie, I. Pavlov tocmai în acest fel a procedat pentru a ajunge la rezultate ştiinţifice riguroase.

Scanned with OKEN Scanner

★

Care este situația figurilor cu care operează geometrul? Într-o anumită măsură, ele aparțin primului tip de imagini-abstracții relevat: figura geometrică, ca imagine senzorială, este reproducerea simplificată a formei unui obiect real.

Există însă o deosebire importantă, care rezultă din tot ce s-a arătat pînă aici.

Să ne imaginăm o problemă oarecare, simplă. Dispun de un teren în formă de pătrat (fig. 7). Urmează să construiesc în mijloc un bazin circular, așa fel încît aria bazinului și aria porțiunii de teren rămase să fie egale. Întrebare : care va fi lungimea unei alei care va duce de la un colț al terenului la bazin îndreptată spre centrul acestuia? Practic cum procedez? Nu mă apuc, firește, să fac diverse încercări pe teren. Măsor latura pătratului (=a), desenez pătratul pe hîrtie, desenez în interior un cerc și încerc să găsesc relația dintre latura pătratului și rază. Aria pătratului fiind egală cu a^2, aria cercului va fi egală cu $\frac{a^2}{2}$. Deci $\frac{a^2}{2} = \pi r^2$, de unde $r = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}$. Figura îmi arată că lungimea aleii se află scăzînd raza cercului din jumătatea diagonalei, deci $\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{\sqrt{2\pi}} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$. Odată calculele efectuate, eu cunosc cu precizie lungimea acestei alei. După ce l-am aflat pe a sau după ce mi-a fost comunicat eu nu mai am nevoie să mă ocup de terenul însuși pe care se va efectua construcția. Tot calculul îl pot face la mine, în cameră. *Desenul de pe foaia de hîrtie reprezintă modelul acestei construcții* și eu voi raționa pe model, ceea ce este evident mult mai comod. Pentru determinarea lungimii aleii nu interesează despre ce pămînt e vorba, nu interesează din ce va fi făcut bazinul, ce rezistență va avea materialul etc. etc., ci o singură informație : dimensiunea unei laturi.

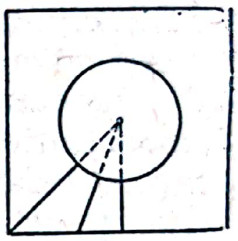


Fig. 7

Modelul meu are și el o existență materială : am tras niște linii în creion pe o foaie de hîrtie. Grafitul și foaia de hîrtie au și ele o serie de proprietăți, după cum au și pămîntul pe care voi face bazinul, materialul din care îl voi realiza etc. Ceea ce este însă caracteristic pentru acest model, spre deosebire de alte

modele materiale, este faptul că am nu numai dreptul, ci și obligația să mă dezinteresez total în raționamentul meu de toate aceste proprietăți. Dacă în raționamentul meu se va strecura cea mai slabă informație privitoare la calitățile grafitului sau ale cimentului, atunci voi apuca pe o cale greșită.

Să mergem mai departe. Se presupune că întrebarea finală este formulată în felul următor: să se găsească aleea de cea mai scurtă lungime care duce de la marginea terenului la bazin și să se găsească această lungime.

Și această problemă poate fi rezolvată apelînd exclusiv la model, cu toate că nu mai dispun de niște formule gata făcute. Trasez cîteva segmente și-mi dau seama intuitiv că e vorba de o perpendiculară dusă din centru pe una din laturi. Dacă vreau să am *certitudinea* soluției trebuie să încadrez rezultatul într-o demonstrație, într-un raționament deductiv, ceea ce este foarte simplu, deoarece, perpendiculara fiind drumul cel mai scurt de la un punct la o dreaptă (teoremă demonstrată) și raza fiind constantă (conform definiției cercului), segmentul minim (aleea) va fi o porțiune a perpendicularei.

În prima parte a operației raționamentul „plauzibil" investigator a constat într-o experimentare efectivă, realizată însă pe modelul meu și nu pe teren. În partea a doua am transpus totul sub forma unui lanț deductiv, bizuindu-mă pe adevăruri deja stabilite.

Rezultatul nu mai are nevoie, în cazul dat, să fie confirmat de noi măsurători pe teren. Certitudinea lui s-a obținut pe cale deductivă, utilizînd numai modelul grafic și cunoștințele geometrice.

Ce este deosebit aici față de alte cazuri în care folosim procedeul modelării? Deosebirea esențială, după cum am arătat, constă în faptul că am și obligația și posibilitatea ca în raționamentul meu să ignorez total ceea ce nu ține de domeniul stabilit, și anume de *proprietățile spațiale*.

În alte cazuri de apelare la un model există un coeficient mai mic sau mai mare de incertitudine (care se elimină treptat prin experimentări succesive) depinzînd de incertitudinea (și uneori de imposibilitatea) delimitării a ceea ce aparține structurii comune și a ceea ce este propriu originalului și modelului.

Modelul atomic al lui Rutherford nu explica decît parțial rezultatele cercetărilor pentru că, așa cum era conceput (sistem planetar reglat de forțe electrostatice), ignora o proprietate esențială a originalului (atomul real), și anume discontinuitatea emi-

Scanned with OKEN Scanner

siunilor de energie. Modelul lui Bohr (1913) aducea o corectare esențială: electronii nu se pot deplasa decît pe anumite orbite de formă eliptică, numite *stabile* sau *cuantice*. Numai în trecerea bruscă de la o orbită la alta a unui electron ia naștere o radiație electromagnetică. Modelul este, ulterior, din nou modificat de către Sommerfeld, pentru a fi și mai bine adaptat datelor experimentale : la fiecare nivel sînt posibile mai multe traiectorii pe care pot circula electronii. Astfel se explică faptul că un spectroscop sensibil relevă o structură mai fină a liniilor spectrale (liniile de hidrogen sînt formate de fapt din mai multe linii foarte apropiate) ș.a.m.d.

Asemenea corectări succesive sînt greu de imaginat în utilizarea *modelului grafic* la rezolvarea problemelor de geometrie. Dacă există dificultăți în rezolvarea problemei, acestea nu țin în nici un caz de ignorarea influenței unor proprietăți obiective, ci doar de complexitatea internă a domeniului, a datelor geometrice înseși.

Structura care este comună originalului și modelului se poate desprinde, se poate, în acest caz detașa net, fără nici un fel de rezerve, ea fiind *formată dintr-un ansamblu de proprietăți spațiale pure.*

Or, de fapt, geometrul are în vedere și cercetează efectiv tocmai această structură comună. Și în alte domenii cercetătorul are în vedere structura comună, dar el se ocupă practic de model, pentru că, fiind vorba de un ansamblu de proprietăți de natură diversă (forțe, mase, viteze etc.), el nu poate studia fenomenul obiectiv decît într-o structură concretă.

„Lucrul — subliniază N. F. Ovcinnikov — se dovedește a nu fi un simplu ansamblu de însușiri, ci o anumită unitate structurală stabilă, care îi determină însușirile. Înseși însușirile se prezintă pînă la urmă ca reieșind din structura lucrului și căpătîndu-și explicația în această structură“ [1].

Proprietățile geometrice au însă această calitate sui-generis că pot fi detașate mintal de celelalte proprietăți ale obiectului concret, deoarece formează un domeniu de legitate relativ închis.

Și în cazul altor modele mintale, structura comună constituită din aceea ce noi am numit imagini-abstracții, are o natură mixtă sub forma unei îmbinări de elemente intuitive reglate conceptual. Dar în aceste cazuri, *formația mixtă nu are ea*

[1] N. F. Ovcinnikov, *Calitate și însușire*, în „Voprosî filosofii“, 1960, nr. 6, p. 152.

însăşi puritatea conceptului, deoarece ea este intricată în fiecare din cele două domenii de legitate prin elementele sale constitutive. Viabilitatea acestei formaţii mixte conceptual-intuitive în care se exprimă structura comună a originalului şi modelului depinde, după cum am văzut, de separabilitatea domeniului respectiv de legitate.

Reprezentarea inhibiţiei sub forma unei *substanţe* care se deplasează în spaţiu traversînd celulele cortexului presupune existenţa unei structuri comune între inhibiţia reală şi substanţa respectivă. Acest *ceva* comun are *încă* proprietăţi intuitive, un fluid care traversează celulele, dar tinzînd spre o simplitate conceptuală, ceva care intuitiv păstrează numai *fluiditatea şi capacitatea de deplasare.*

Putem prezice toate proprietăţile inhibiţiei pornind de la acest model? Se înţelege că nu, aşa cum am arătat mai sus, pentru că proprietăţile inhibiţiei formează un domeniu de legitate interdependent cu alte domenii de legitate.

Un model, oricît de complex, nu va izbuti să reproducă decît parţial aceste proprietăţi, riscînd însă, pe de altă parte, să introducă în ceea ce considerăm a fi structura comună propriile sale legităţi. De aceea structura comună, care justifică modelarea, nu este decît o formaţiune conceptualo-intuitivă hibridă şi instabilă. Fluidul care se deplasează nu este decît o imagine provizorie care se cere corectată şi îmbogăţită. Modelul planetar al atomului nu reprezintă decît tot o formaţie provizorie. Ea se redescompune în elementele conceptuale şi intuitive din care este formată, pentru a permite o mai bună ajustare reciprocă în funcţie de noile cunoştinţe dobîndite.

În cazul figurilor geometrice însă, lucrurile se schimbă. Domeniul de legitate al proprietăţilor spaţiului este un domeniu relativ închis (în concepţia newtoniană a spaţiului). Pentru a determina în problema noastră lungimea aleii, putem lucra în condiţii perfecte pe modelul grafic, mult mai uşor de manipulat decît construcţia materială a bazinului. Proprietăţile spaţiale care intervin sînt complet izolabile şi de celelalte proprietăţi materiale ale bazinului şi terenului şi de celelalte proprietăţi materiale ale foii de hîrtie şi cernelii care au servit pentru desen. Ceea ce interesează este numai spaţiul, iar acest spaţiu poate fi reflectat pe cale mintală, sub formă pură, fără sacrificarea, fără omiterea unor interdependenţe legice.

De aceea, structura comună între original şi model nu mai este din acest punct de vedere, o formaţie conceptualo-intuitivă

Scanned with OKEN Scanner

hibridă și instabilă ca în celelalte cazuri, ci o formație conceptualo-intuitivă *stabilă*, în care elementele intuitive au dobîndit toate proprietățile conceptului, fără a pierde proprietățile intuitive, în speță cele spațiale. *Această structură comună, obiectivă, dintre original și model se reflectă mintal sub forma conceptelor figurale ale geometriei.*

Imaginile-abstracții de care ne servim în fizică chimie, biologie etc. nu sînt suficiente pentru a permite realizarea întregii investigații sub formă mintală.

Imaginile-abstracții cu care experimentăm mintal în aceste domenii închid în sine germenii propriei lor pieiri. Imaginea simplificată, purificată prin abstractizare, nu mai oferă cercetătorului decît un aspect redus, sărăcit, al fenomenului respectiv. Acest fenomen, în mod obiectiv, întreține cu celelalte fenomene relații infinit mai complexe. Bogăția interdependențelor concrete este inepuizabilă, și cercetătorul este nevoit să revină neîncetat la concretul obiectiv pentru a-și îmbogăți cunoștințele și a găsi explicații satisfăcătoare fenomenelor studiate. Și totuși — acesta este unul din aspectele cele mai importante ale naturii dialectice a gîndirii — el nu poate gîndi un fenomen decît schematizîndu-l, simplificîndu-l, purificîndu-l. Gîndirea conceptuală nu poate opera cu blocuri concrete nediscernate. Gîndirea tinde spre concret, dar un concret reconstituit, prin sinteză, din abstracții obținute la rîndul lor pe calea analizei riguroase a datelor realității. Această opoziție abstract-concret din gîndire ar fi cu totul sterilă, ar duce la anihilarea reciprocă a celor două laturi, dacă nu am recurge neîncetat la izvoarele realității obiective.

Geometria însă, și matematica în ansamblu, ocupă un loc aparte. Detașarea mintală a spațiului din complexul fenomenelor obiective nu duce la sufocarea imaginilor respective, pentru motivul, de atîtea ori subliniat aici, că proprietățile spațiale, spre deosebire de alte proprietăți materiale, sînt, în limitele experienței curente, independente de celelalte fenomene ale realității. Imaginea spațială își păstrează integral calitățile de obiect de cercetare, chiar după abstractizarea ei, după detașarea ei mintală din complexul fenomenelor materiale. Ceea ce se va cerceta va fi spațiul pur, dar ceea ce se obține prin cercetarea respectivă va fi oricînd aplicabil realității obiective. Desprinderea, abstractizarea nu ucid, nu distrug în mod artificial legăturile fenomenului cercetat cu alte fenomene, pentru simplul motiv că aceste legături nu există în limitele admise. Geometrul

închis în camera sa poate construi o întreagă ştiinţă a proprietăţilor spaţiale, fără teama că realitatea îl va contrazice (în limitele concepţiei newtoniene a spaţiului absolut).

Ceea ce este inerent figurii geometrice din sfera intuitivului este numai spaţialitatea. Faptul că figura materializată apelează la hîrtie şi creion, faptul că figura reprezentată cere un contur reproducînd şi el imaginea senzorială a urmei de creion sau cerneală, aceasta se întîmplă nu pentru că există o interdependenţă obiectivă între proprietăţile figurii geometrice şi proprietăţile materiale ale hîrtiei şi grafitului. Spaţiul pur poate fi numai gîndit. Perceperea sau reprezentarea formei spaţiale cer un suport obiectiv care să sensibilizeze spaţiul, să-l facă apt de a acţiona ca stimul asupra analizatorilor. Dar în raţionamentul geometric figura nu pătrunde cu aceste accesorii. Intuitivitatea ei există, dar constă numai din spaţiu pur. Dacă ne întrebăm ce efect vom obţine alăturînd roşu de verde, cele două culori, roşu şi verde, pot juca în întrebarea noastră rolul de imagini-abstracţii. Cele două culori pot fi gîndite ca fenomene pure, abstrase din complexul material căruia îi aparţin. Un decorator încercînd să-şi imagineze o îmbinare optimă de culori a unui interior îşi poate reprezenta suprafeţele colorate în „stare pură", independent de substanţele materiale din care se realizează culorile. Dacă însă ne întrebăm: „Ce vom obţine dacă vom amesteca roşu cu verde?", atunci lucrurile se schimbă. Pentru a răspunde la această întrebare e necesar să reintegrăm proprietăţile respective în unitatea concretă a obiectului. Trebuie să combinăm substanţe colorate pentru a afla ce se va obţine efectiv. E posibil să se obţină o combinaţie chimică a cărei culoare să nu poată fi prevăzută, ţinînd seama numai de cele două culori iniţiale. Aşadar, unificarea conceptului cu imaginea în culoarea abstractizată este numai parţială şi provizorie. Conceptul lasă în afară relaţii ale proprietăţii respective cu alte proprietăţi (chimice în exemplul nostru), care se pot dovedi importante la un moment dat.

Or, în cazul figurii geometrice, acest lucru nu se întîmplă. Dacă un exagon regulat este înscris într-un cerc, atunci latura exagonului este indiscutabil egală cu raza cercului. Răspunsul la această problemă se obţine fără a lua în consideraţie nici un fel de alte proprietăţi decît cele geometrice.

Reprezentarea senzorială a figurii geometrice (imaginea desenului) nu subînţelege numai un concept propriu-zis, ci şi această formaţie intermediară care serveşte, de fapt, ca obiect specific al raţionamentului geometric, conceptul figural.

Scanned with OKEN Scanner

În această formație, structura intuitivă dobîndește ea însăși toate atributele conceptului, se conceptualizează ea însăși, integral, fără rezerve, fără aderențe reziduale, ca în alte domenii. De aici rezultă această consecință extrem de importantă: figura geometrică, deși păstrează proprietăți intuitive, spațiale, poate fi inclusă integral într-un raționament logic riguros, într-un raționament demonstrativ.

Pe de altă parte, trecerea de la figura geometrică (imagine conceptualizată) la conceptul geometric pur se face de asemenea fără nici un fel de pierderi, ceea ce, după cum am văzut, nu se întîmplă în alte domenii. Astfel, întregul ansamblu de cunoștințe geometrice obținut, în primă instanță, operînd cu imagini abstractizate poate fi, în principiu, reconstituit într-o formă pur conceptuală, deductivă, axiomatică.

Gradul de axiomatizare a unei științe este expresia directă a măsurii în care ansamblul respectiv de fenomene poate constitui un domeniu de legitate autonom.

Or, lucrul acesta este adevărat pentru raporturile cantitative și (în cadrul concepției newtoniene a spațiului), pentru proprietățile spațiale.

În alte domenii, structura deductivă și axiomatizarea nu s-au putut realiza decît parțial.

„Așadar, în prezent — scrie A. S. Esenin-Volpin — fac parte din științele deductive matematica, precum și unele capitole ale logicii și fizicii (în particular mecanica) strîns legate de matematică. În fizică însă, dezvoltarea acestei metode are o importanță secundară, servind în mare măsură scopului de a o apropia de matematică.

Incercările de a aplica metoda axiomatică în biologie nu urmăresc să construiască știința în ansamblul ei, ci doar să rezolve anumite probleme particulare sau să dezvolte anumite capitole ale acestei științe“ [1].

★

Așadar, rezumînd:

Imaginile senzoriale de care se servește geometrul îndeplinesc rolul de modele mintale. Ca și în cazul altor modele mintale, raționamentul nu are însă în vedere întregul complex de proprietăți, ci numai ceea ce formează, din punctul de vedere

[1] A. S. Esenin-Volpin, *Despre metoda axiomatică*, în „Voprosî filosofii“, 1959, nr. 7, p. 122.

al investigației, structura comună între original și model. Ca și în cazul altor modele mintale, structura comună este reflectată în gîndire ca o formație mixtă conceptualo-intuitivă (ceea ce am numit mai sus imagine-abstracție).

În general, imaginile-abstracții sînt formații hibride, mai mult sau mai puțin instabile, în funcție de gradul de interdependență al domeniului respectiv de legitate cu alte domenii de legitate.

În cazul figurilor geometrice, datorită faptului că proprietățile spațiale constituie un domeniu de legitate relativ închis, aceste formații mixte au un caracter stabil. Proprietățile spațiale se conceptualizează integral, fără a-și pierde prin aceasta intuitivitatea. Aceste formații mixte stabile, conceptele figurale, nu tind numai spre calitățile conceptuale, ci le dobîndesc efectiv. Modelul geometric reprezintă astfel modelul perfect (în limitele concepției newtoniene a spațiului). El permite studierea proprietăților obiective ale spațiului apelînd numai la imaginea mintală. Rezultatul obținut va fi riguros valabil pentru original. Fuziunea completă între intuitiv și abstract, conceptualizarea integrală a proprietăților spațiale reflectate intuitiv fac posibil ca verificarea practică să fie înlocuită cu raționamentul demonstrativ de tip matematic (bineînțeles, repetăm, în limitele concepției newtoniene a spațiului).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL X-lea

CONCEPTUL ŞI CONCEPTUL FIGURAL

Proprietăţile specifice ale conceptelor figurale utilizate în geometrie determină şi o altă consecinţă importantă referitoare la relaţiile dintre general şi particular în raţionamentul geometric. Să presupunem că vrem să demonstrăm una din teoremele triunghiului, de pildă, concurenţa medianelor. Pentru aceasta vom utiliza un triunghi oarecare. Dar acest triunghi *oarecare,* construit sau imaginat, nu este *oarecare* decît din punctul de vedere al geometrului. În mod obiectiv, el este o imagine perfect determinată.

Nu putem desena un triunghi în general, după cum nu putem întîlni în realitatea obiectivă un cal în *general,* un om în *general,* o bucată de fier în *general.* Generalul există numai în concret şi prin concret. Şi, după cum chimistul, pentru a studia proprietăţile fierului, nu pune în eprubetă o bucată de fier „în general", ci o bucată de fier foarte concretă, o anumită bucată de fier, avînd anumite dimensiuni, o anumită formă, o anumită greutate, tot aşa nici geometrul, pentru a studia proprietăţile triunghiurilor nu construieşte un triunghi în general, ci un *anumit* triunghi. Triunghiul acesta *particular* este obiectul cercetărilor sale pentru descoperirea proprietăţilor generale ale triunghiurilor. Că el îşi alege uneori o figură pe care o numeşte *oarecare,* sau alteori un caz *privilegiat,* aceasta nu schimbă cu nimic situaţia. Triunghiul „oarecare" pe care-l construieşte nu e mai puţin particular decît orice alt triunghi. El are dimensiuni determinate. Laturile triunghiului construit nu sînt elastice, nu sînt variabile, nu sînt lipsite de măsură. „Oarecare" înseamnă numai că au fost evitate triunghiuri posedînd relaţii generalizabile numai pentru o *specie* şi nu pentru toate triun-

Scanned with OKEN Scanner

ghiurile. Operînd cu un triunghi din specia respectivă (de exemplu, isoscel, echilateral, dreptunghi), geometrul ar putea fi indus în eroare și condus să generalizeze relațiile găsite pentru toate triunghiurile.

Dar și chimistul și geometrul — studiind primul un obiect concret, celălalt o figură particulară — au în vedere nu concretul și particularul, ci generalul și esențialul pe care concretul și particularul le poartă în sine. Triunghiul cu laturile de 5, 6, 7 cm este studiat ca un triunghi *oarecare,* ceea ce înseamnă că aceste dimensiuni particulare nu vor fi avute în vedere în raționament, ci numai ceea ce ține de *conceptul de triunghi, de definiția triunghiului* (sau uneori, o anumită specie de triunghi, dar tot în generalitatea notelor ei). Chimistul, cercetînd bucata de fier, nu va avea în vedere forma, dimensiunile, greutatea, ci numai ceea ce este caracteristic, esențial, pentru fier în general.

Dar între cele două investigații rămîne o deosebire importantă. Geometrul poate generaliza proprietățile descoperite experimentînd numai cu *un singur triunghi*, cu convingerea fermă că rezultatele sale sînt necesare, valabile indiscutabil pentru toate triunghiurile. Chimistul trebuie să fie mai precaut. El trebuie să-și verifice de mai multe ori rezultatele pentru a se convinge că acestea nu au fost determinate de condiții, pentru el în momentul respectiv întîmplătoare, condiții de temperatură, de presiune, de puritate a substanței, de influența unor eventuale cîmpuri electrice sau magnetice. Numai variind sistematic condițiile chimistul va ajunge, treptat, să degajeze cea ce este cu adevărat general, permanent, exprimînd în mod esențial proprietățile fierului. Dar chiar și aceste proprietăți fizice sau chimice pot fi, la un moment dat, alterate, modificate de modificări în structura internă a atomului. Chimistul va emite mai frecvent judecăți constatative, iar judecățile sale de necesitate vor avea nevoie de indicarea unei serii întregi de rezerve referitoare la condițiile de lucru.

De unde provine această deosebire în modul de generalizare și, mai profund, în modul de fundare a *necesității*?

Ea provine mai ales din deosebirile dintre obiectul de cercetare al geometrului și obiectul de cercetare al chimistului. Figura geometrică este o imagine *integral conceptualizată,* și aceasta ca urmare a separabilității relativ totale a domeniului. În consecință, chiar aspectele strict particulare, proprii figurii geometrice (cum sînt dimensiunile laturilor și ale unghiurilor),

Scanned with OKEN Scanner

ţin şi ele integral de domeniul abstracţiei, de domeniul reflectării conceptualizate. Din această cauză, delimitarea dintre general şi particular în figură nu se face prin aproximaţii succesive (ca în cazul în care trebuie să luăm în consideraţie treptat diferite influenţe obiective), ci dintr-o dată, în mod absolut. Tot ceea ce ţine de figură este în acelaşi timp sub controlul integral al reflectării conceptuale. Nu mai este deci necesară confruntarea mai multor figuri pentru degajarea generalului. Figura geometrică beneficiază de ierarhia strictă, de delimitările stricte, pe bază de definiţie, care există în domeniul conceptelor. Surprizele rezultînd din pătrunderea în domeniul cercetat a unor influenţe eterogene sau din apariţia unor efecte imprevizibile prin combinarea particulară a unor condiţii sînt excluse.

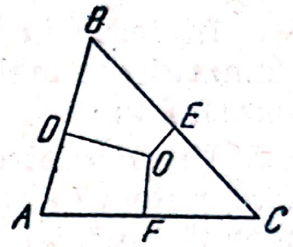


Fig. 8

Să analizăm exemplul concret al teoremei : *„Într-un triunghi, mediatoarele sînt concurente“* (fig. 8). Să presupunem demonstrat faptul că mediatoarele $\overline{DO}$ şi FO nu pot fi paralele şi că deci se vor întîlni într-un punct, punctul O. Urmează să demonstrăm că şi cea de-a treia mediatoare EO' va trece prin acelaşi punct (O' se confundă cu O). Pentru aceasta ne bazăm pe proprietăţile cunoscute ale mediatoarelor ca locuri geometrice :

$$\overline{OA} = \overline{OC}$$
$$\overline{OB} = \overline{OA}$$

(toate punctele mediatoarei unui segment sînt egal depărtate de extremităţile segmentului).

În consecinţă, comparînd cele două egalităţi, obţinem

$$OB = OC$$

Aşadar, punctul O se va afla şi pe cea de-a treia mediatoare (pentru că toate punctele egal depărtate de extremităţile segmentului sînt situate pe mediatoare).

În tot acest raţionament ne-am sprijinit pe figură. Mai mult, noi am manevrat *imagini*. Am construit segmente, am comparat distanţe, am avut în vedere extremităţi de segmente, concurenţa lor, situarea unui punct pe o dreaptă. Toate acestea au format la un loc o imagine spaţială, o anumită imagine spaţială.

Dar în acelaşi timp ne-am putut permite să *ignorăm* complet o serie întreagă de aspecte particulare ale figurii (dimensiunile laturilor, ale unghiurilor, distanţele reale de la punctul de intersecţie la laturi şi vîrfuri etc). şi să ajungem la o concluzie adevărată pentru *orice triunghi.*

De ce aceasta? Pentru că manevrînd imagini am manevrat în acest caz concepte (concepte figurale), semnificaţia imaginilor fiind integral dictată aici de concepte.

În ierarhia entităţilor spaţiale, o figură geometrică are numărul cel mai mare de determinări. O mai strictă determinare nu mai este posibilă.

Unele dintre aceste aspecte particularizante pot fi *neglijate,* putem face abstracţie de ele, dar astfel ajungem să părăsim planul intuiţiei şi să ne situăm în cel pur conceptual. Conceptul de triunghi, triunghiul în general, este un concept propriu-zis. El este o verigă a unei ierarhii conceptuale. Conceptul mai larg este cel de poligon. Triunghiul însuşi comportă o serie de varietăţi (concepte subordonate): triunghi isoscel, echilateral etc. Şi acestea din urmă sînt concepte pure, pentru că sînt varietăţi de triunghiuri în general. La baza ierarhiei se află triunghiul determinat, figura geometrică. Cu el pătrundem în domeniul entităţilor intuitive integral determinate, asemenea obiectelor concrete, dar, şi acesta este fenomenul esenţial, fără a-l fi părăsit pe cel al abstracţiilor.

În această imagine-concept care este figura geometrică, noi putem opera delimitarea strictă, riguroasă, fără rezerve, a datelor, aşa cum putem proceda numai în domeniul conceptual. *Putem delimita strict ceea ce ţine de notele generale ale triunghiurilor, de notele particulare, individualizante, ale figurii cu care operăm.* Utilizînd un triunghi particular putem avea în vedere numai ceea ce este indicat în definiţia triunghiului în general.

Datorită acestui fapt, fenomenul constatat poate fi integrat într-o structură logică riguroasă, cu omiterea strictă a aspectelor particularizante. Necesitatea relaţiei respective, dovedită prin raportarea la teoreme, definiţii şi axiome (adevăruri certe), se află la baza certitudinii generalizării. Dacă imaginile cu care se operează nu sînt concepte figurale, ci imagini-abstracţii obişnuite, atunci delimitarea faţă de aspectele particulare nu se poate face decît prin experimentări (mintale, dar şi practice, succesive) din cauza intricării domeniilor de legitate.

Scanned with OKEN Scanner

Şi chimistul, după cum spuneam, cercetînd o bucată de fier, poate avea în vedere numai ceea ce ţine de fier în general. Dar, spre deosebire de geometru, el lucrează cu un obiect material de a cărui reflectare conceptuală integrală ştiinţa se apropie doar treptat, asimptotic. El are nevoie de o serie întreagă de verificări pentru a se convinge pe deplin de generalitatea rezultatelor sale.

Geometrul nu mai are nevoie de astfel de verificări. Triunghiul unic care i-a servit ca obiect de cercetare îi este suficient pentru a se convinge de generalitatea rezultatelor. Această figură-concept lasă să se vadă, fără echivoc, distincţiile dintre diferitele grade de determinare.

S-ar putea vorbi şi în cazul conceptelor figurale de *conţinut* şi *sferă*, aşa cum vorbim în cazul conceptelor propriu-zise? Conţinutul conceptului este constituit de notele esenţiale ale obiectelor la care conceptul respectiv se referă.

După cum rezultă din cele expuse pînă aici, figura geometrică îmbină într-o structură intuitivă un ansamblu de proprietăţi spaţiale, proprietăţi care toate sînt esenţiale pentru figura respectivă. Paralela pe care am făcut-o între concept şi conceptul-figural se poate continua deci şi în această privinţă. Conceptul figural posedă un *conţinut*, adică se caracterizează printr-o îmbinare de proprietăţi esenţiale. Ceea ce este însă specific este faptul că acest conţinut, deşi tot o îmbinare *abstractă*, ca în orice concept, este totuşi, în acelaşi timp, şi *intuitiv*. Îmbinarea este abstractă pentru că atît elementele ei, cît şi modul lor de asociere sînt abstracte. Segmentele care formează un triunghi sînt entităţi abstracte, ideale, îmbinarea lor este abstractă, ideală. Şi totuşi triunghiul, aşa cum am arătat şi pînă acum, nu-şi pierde intuitivitatea prin această idealizare. Conţinutul conceptului figural are deci această calitate sui-generis de a fi redat în *imaginea însăşi* a figurii.

Conceptul figural are de aceea şi o *sferă*: totalitatea obiectelor care posedă forma şi dimensiunile respective. Adeseori, propunîndu-ne să stabilim dacă un obiect aparţine sau nu sferei unei noţiuni, este necesar să apelăm la o analiză dificilă, întrucît proprietăţile esenţiale sînt ascunse şi nu sînt evidente în fenomenalitatea obiectului. Confruntarea se face între un grup de note, definitorii pentru conceptul respectiv, şi un ansamblu concret, din care însuşirile respective trebuie dezvăluite, scoase

la suprafaţă prin analiză. De aceea o simplă confruntare intuitivă nu va fi de obicei suficientă.

Intuitiv, balena corespunde mai bine cu clasa peştilor decît cu cea a mamiferelor. Celui care vede sodiul pentru prima oară, oricîte cunoştinţe ar avea despre metale în general, îi este imposibil să constate direct apartenenţa sodiului la această clasă de corpuri. Faptul însă că un obiect oarecare posedă, de pildă, forma unui anumit triunghi, rezultă dintr-o confruntare directă, intuitivă.

★

Distingem în logică *concepte abstracte* şi *concepte concrete*, bineînţeles în sens relativ, deoarece toate conceptele sînt prin natura lor reflectări abstracte. Conceptele abstracte sînt cele prin intermediul notelor cărora este gîndită o proprietate a unui obiect sau o relaţie dintre obiecte.

Conceptele concrete sînt cele prin intermediul notelor cărora este gîndit obiectul ca atare.

Cu care din aceste categorii corespunde conceptul figural? S-ar părea că din moment ce conceptul figural este, spre deosebire de conceptele obişnuite, *intuitiv prin structura* sa, el trebuie să fie mai apropiat de clasa conceptelor concrete. O observaţie mai atentă relevă însă acest fapt, în aparenţă paradoxal : *conceptele figurale tocmai din cauza intuitivităţii lor corespund clasei conceptelor abstracte !* Explicaţia este simplă : conceptele figurale, aşa cum am arătat, nu reproduc obiecte simplificate, schematizate. Ele reflectă *proprietăţi*, şi anume proprietăţi spaţiale. În intuitivitatea lor absolut simplă, aceste concepte nu pot reconstitui niciodată un *ansamblu* de proprietăţi de natură diversă, propriu unui obiect. Acest lucru este posibil fie în reprezentare, fie printr-o îmbinare abstractă propriu-zis conceptuală.

★

O reprezentare este o realitate mintală actuală. Ea este trăită nemijlocit ca atare, ca imagine senzorială. Un concept nu-şi poate dovedi existenţa decît în dinamica activităţii mintale. Simpla enunţare a unui termen nu înseamnă încă actualizarea conceptului respectiv. Conceptul este, din punct de vedere psihologic, o realitate mintală potenţială care se actualizează pe măsura utilizării lui în judecăţi şi raţionamente. Bogăţia conceptului, forţa conceptului stau în esenţialitatea şi în ge-

Scanned with OKEN Scanner

neralitatea sa ca formă de reflectare a realităţii obiective. Esenţialitatea conceptului se dezvăluie, se actualizează în ansamblul judecăţilor în care el intră ca subiect. Predicatele acestor judecăţi posibile formează conţinutul conceptului. Generalitatea conceptului se dezvăluie în judecăţi în care el intră ca predicat. Subiectele acestor judecăţi reprezintă sfera conceptului. Din punctul de vedere al teoriei activităţii nervoase superioare, această bogăţie a conceptului, pe care o putem constata experimental prin polivalenţa utilizării corecte a termenului, se bazează pe un vast sistem de legături nervoase temporare, formate în ontogeneză, sub influenţa permanentă a societăţii.

Ce este specific în actul acesta de constatare a apartenenţei unui obiect la o anumită clasă, în cazul formelor geometrice ?

Şi în *constatarea* faptului că un *obiect* este un acid, de pildă, şi în constatarea faptului că un obiect este un paralelipiped, conceptul trebuie să existe virtual. Pe baza sa, acţiunile noastre cu obiectele respective devin acţiuni categoriale. În ambele cazuri, reprezentările joacă un anumit rol în actul de identificare.

Deosebirea stă numai în faptul că o dată paralelipipedul identificat (inclusiv dimensiunile), tot ceea ce urmează să mai cunoaştem despre calităţile spaţiale ale obiectului respectiv poate fi stabilit cercetînd numai forma spaţială însăşi (desenată, reprezentată). Ceea ce înseamnă că actul de identificare geometrică a unui obiect ne introduce total, fără reziduuri, într-un domeniu de legitate independent. Constatarea faptului că o substanţă este din punct de vedere chimic un acid (prin faptul, de pildă, că înroşeşte hîrtia albastră de turnesol) nu ne dispensează de cercetări ulterioare pe substanţa însăşi, pentru a-i stabili şi alte proprietăţi chimice. Putem raţiona pe un model (de pildă referindu-ne la un alt acid cunoscut), dar rezultatele nu vor fi riguroase. Aciditatea nu este o proprietate care, odată identificată, să poată fi desprinsă într-o structură conceptualo-intuitivă din complexul celorlalte însuşiri, pentru a face obiectul unei investigaţii ştiinţifice complete. Proprietatea de formă paralelipipedică poate fi însă total abstrasă şi studiată independent, pe diverse modele (concrete sau reprezentate) fără riscul ignorării unor interdependenţe. Specificul actului mintal de identificare geometrică a unui obiect constă deci în aceasta : separabilitatea domeniului spaţial fiind relativ totală, actul de identificare constituie nu numai o izolare provizorie a unei proprietăţi, într-o

structură conceptualo-intuitivă, incomplet amalgamată şi provizorie, ci un act de separare relativ completă a unei structuri omogene conceptualo-intuitive „pure", care permite o investigare ştiinţifică riguroasă şi fără rezerve.

Aceeaşi idee poate fi şi altfel exprimată. În studiul proprietăţilor geometrice ale unui obiect, după ce am aflat un număr suficient de date, mă pot dispensa apoi de a mă referi la obiectul însuşi, toate celelalte proprietăţi spaţiale le voi afla numai pe baza primelor date obţinute.

În investigarea unui obiect sub raportul proprietăţilor chimice, de pildă, niciodată (la nivelul actual al chimiei) nu voi putea afirma : dispun de suficiente date. Nu trebuie să mă mai ocup de obiect. Restul voi afla prin experiment mintal. (În ambele cazuri ne-am referit la raţionamentul investigator).

Aceste *prime date* se constituie, în cazul proprietăţilor spaţiale, într-o structură conceptualo-intuitivă *completă,* independentă, detaşabilă de obiect ca o dublură a sa ideală : conceptul figural.

Judecata geometrică de identificare, *punînd în relaţie* obiectul cu o anumită figură geometrică (concept figural), reprezintă în acelaşi timp un act de separare, nu provizorie ca în celelalte domenii, ci relativ totală şi completă, permiţînd desfăşurarea ulterioară a raţionamentului în cadrul unui domeniu de legitate închis.

★

În raţionamentul geometric găsim nu numai concepte cu o structură intuitivă, ci şi operaţii cu aceste entităţi, avînd şi ele aceeaşi structură mixtă conceptualo-intuitivă.

Asemenea operaţii sînt : translaţiile, rotaţiile, inversarea. Prin aceste operaţii, figura geometrică este deplasată în spaţiu, în aşa fel încît să păstrăm o corespondenţă biunivocă între punctele figurii originale şi punctele figurii transformate. Şi în alte domenii aşa cum spuneam, raţionamentul experimental apelează la reprezentarea schematică, simplificată a unor transformări. Ne imaginăm de exemplu operaţia de aşezare a unei bolte pe stîlpi de susţinere. Dar această operaţie este o operaţie mixtă conceptualo-intuitivă, în care elementele intuitive nu sînt integral absorbite şi controlate de forma conceptuală, de unde existenţa unui grad oarecare de incertitudine (dacă e vorba de o acţiune inedită) înaintea verificării practice. În geometrie,

Scanned with OKEN Scanner

operaţiile înseşi sînt integral conceptualizate, au un sens ideal şi de aici şi certitudinea rezultatelor.

Iată, de pildă, teorema : *„În două cercuri egale sau în acelaşi cerc, la arce egale corespund coarde egale şi reciproc, la coarde egale corespund arce egale“ (fig. 9).*

Demonstraţie : facem cercurile O şi O' să coincidă (suprapunem cercul O peste cercul O') şi printr-o mişcare de rotaţie adecvată facem să coincidă şi A cu A'. Deoarece *arcele sînt egale,* iar cercurile coincid, atunci şi B va coincide cu B'. În consecinţă, segmentul $\overline{AB}$ va coincide cu segmentul $\overline{A'B'}$. Ele vor fi egale.

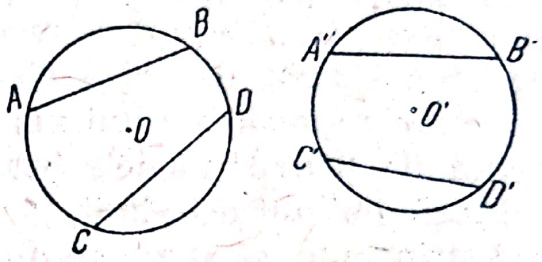


Fig. 9

În acest raţionament nu am utilizat concepte pure ci *imagini* şi *operaţii* avînd şi ele un sens intuitiv. Cercul O' a fost desprins de la locul său, mutat, suprapus peste O, rotit. S-a constatat perfecta suprapunere a arcelor inclusiv a extremităţilor lor, perfecta suprapunere a coardelor. Înainte ca raţionamentul să fi luat forma demonstrativă de mai sus, el a avut forma raţionamentului constructiv, investigator, ca răspuns la întrebarea: dacă arcele sînt egale, coardele sînt *întotdeauna* egale în cercuri egale? Rezultatul operaţiilor efectuate a fost constatarea congruenţei coardelor.

Aceste operaţii sînt, bineînţeles, ideale, ca şi figurile respective. Ele sînt integral controlate conceptual. Ele sînt operaţii care au ca obiect spaţiul „pur“ reflectat în formă ideală în mintea noastră. Cu aceste operaţii nu părăsim absolut deloc domeniul de legitate fixat. De aici, ca urmare a actului de abstractizare extremă, „mişcările“ geometriei sînt de fapt pseudomişcări, sînt mişcări *atemporale !* Timpul, ca şi toate celelalte proprietăţi ale materiei, rămîne la poarta de intrare (spre deosebire de conceptul de mişcare din mecanică, unde timpul este luat în consideraţie).

Între „elementele“ cu care operează geometria (punctele, dreptele, planele) există anumite „relaţii“ : „a aparţine“, „între“, „a fi congruent“, „paralel“, „continuu“. Nici aceste relaţii în axiomatica lui Hilbert (e vorba de axiomatica geometriei euclidiene) nu sînt definite direct. Nici acestor relaţii nu li se asociază direct un sens intuitiv. Dar, aşa cum am spus, *nu pentru*

că aceste concepte sînt incapabile de o semnificaţie intuitivă, ci pentru ca în structura raţionamentului demonstrativ să putem opera cu concepte perfect determinate, lipsite de echivoc. Însă în gîndirea geometrică vie, investigatoare, toate aceste relaţii sînt de fapt nu formaţii conceptuale pure, ci formaţii conceptualo-intuitive în structura cărora se reţine din imagine numai ceea ce este reflectare spaţială pură. În demonstraţia de mai sus, situarea punctelor pe drepte şi pe cercuri, congruenţa, continuitatea etc. intervin în mod real cu sensul lor intuitiv, dar deplin purificat de orice elemente nespaţiale. Faptul că din structura raţionamentului noi putem desprinde o canava logică aplicabilă şi altor modele intuitive nu înseamnă decît că tiparul logic obţinut a trebuit, pentru a satisface exigenţele deducţiei stringente, să sacrifice din precizia indicaţiilor sale în ceea ce priveşte aspectele intuitive.

Din punctul de vedere al psihologului însă, această canava logică nu poate constitui o realitate mintală de sine stătătoare. Ea reprezintă numai o *faţetă a fenomenului psihologic, o faţetă a gîndirii geometrice*. Sensul detaşării sale din complexul fenomenului real este numai acela de a pune în evidenţă coherenţa interioară a raţionamentului, adică de a înlocui verificarea practică necesară în alte domenii cu o verificare constînd în perfecta asamblare a verigilor, suficientă în domeniul matematicii. Această verificare a stringenţii logice, prin stoarcerea raţionamentului de orice conţinut intuitiv, şi pe care o numim metoda axiomatică, nu este toată matematica, toată geometria (şi după cum am văzut ea nu este, de fapt realizabilă în întregime conform teoremelor lui Gödel).

„Ideea geometricului — scrie Gonseth — îşi are sursa sa în intuitiv. Dar sfera sa de existenţă specifică este cuprinsă între prima axiomatizare, care îi conferea un chip abstract în raport cu latura intuitivă a cunoaşterii noastre, şi a doua axiomatizare, care o face să joace rolul unui concret în raport cu latura „pur“ logică. Dincoace şi dincolo ea nu există încă sau nu mai există. În acest dublu rol se epuizează existenţa geometricului, în acest dublu chip se relevă adevăratul său caracter“ [1].

[1] F. Gonseth, *Les mathématiques et la réalité*, Paris, Alcan, 1936, p. 86.

Pentru psiholog, acest „chip" dublu al entităţilor geometrice, faptul de a fi formaţii concepto-figurale, este de un deosebit interes.

Axiomatizarea nu a putut să elimine, să ignoreze, „relaţiile" mai sus citate, cu toate că ele, în *semnificaţia lor internă*, exprimă nu relaţii *interconceptuale* (cum ar fi subordinarea, coordinarea etc. etc.), ci relaţii interfigurale ! Un concept nu se poate afla pe altul, nu se poate afla între alte două etc.

Pentru a nu jena suita logică a raţionamentului, relaţiile acestea intuitive au fost prinse şi încadrate de axiome, unde ne facem că nu ştim despre ce este vorba.

Faptul, de pildă, că prin două puncte nu poate trece decît o singură dreaptă nu se poate demonstra. Acest fapt îl constatăm direct, *intuitiv* (dar bineînţeles că punctele, dreptele şi relaţia de apartenenţă sînt intuiţii-abstracţii !). Altă motivare nu avem pentru faptul de a nu fi susţinut contrariul. În acest caz vom da afirmaţiei caracterul de adevăr indiscutabil şi îl vom denumi axiomă.

La fel şi pentru mişcările spaţiului. Translaţia, rotaţia, inversarea intră în structura raţionamentului în calitate de concepte. În axiomatica lui Hilbert, ele nu sînt concepte „primare", ci entităţi derivate, definite, pornind de la relaţia de congruenţă şi de la axiomele respective. În actul real de utilizare a acestor concepte însă, ele intervin ca reflectări idealizate ale unor operaţii concrete, reflectări idealizate în care sensul intuitiv se păstrează. În exemplul nostru de mai sus, transportul cercului O' peste cercul O este un act mintal necesar, care intră ca verigă în structura raţionamentului, îi influenţează cursul şi nu un element extrageometric, auxiliar, cum ar fi culoarea grafitului cu care s-a trasat cercul pe hîrtie. În mod formal, urmărind numai jaloanele constituite de faţetele pur conceptuale, congruenţa poate fi postulată ca o entitate primară. În cursul real şi complex al gîndirii însă, congruenţa presupune ea însăşi mişcarea, deplasarea şi suprapunerea figurilor. Cum se procedează în expunerea axiomatică? Se afirmă că în cazul în care două segmente, respectiv două figuri, sînt congruente (congruenţa nu se defineşte) vom considera că una dintre figuri a fost obţinută prin *deplasarea* celeilalte.

Scanned with OKEN Scanner

S-a definit deci deplasarea pe baza congruenței, iar congruența este dată ca un fapt primar, nedescris. *Dar ideea de congruență o generează pe cea de deplasare numai pentru că congruența însăși n-are, în fond, absolut nici un sens dacă ideea de deplasare (în genere) nu este implicată în ea.* Aranjarea conceptelor în suita axiomatică folosește mecanismul formal al logicii, gata pregătit de practica milenară a umanității, pentru ca prin coherența realizată să obțină o determinare riguroasă a utilizării conceptelor respective.

Dar două figuri nu pot fi *gîndite* ca fiind congruente decît dacă sînt gîndite în același timp și ca separate în spațiu și ca unificate pînă la confundare. Trăsătura de unire este mișcarea însăși! Ceea ce înseamnă că dacă sub raport formal putem trece, indiferent, de la congruență la deplasare sau de la deplasare la congruență, sau ne putem ocupa numai de congruență, sub raport psihologic, considerînd gîndirea în desfășurarea ei reală, trebuie să ținem seama și de rădăcinile practice, intuitive ale acestei noțiuni pentru a-i explica locul și rolul în fluxul raționamentului.

Dacă în loc să vorbim de puncte, drepte și plane, în loc să vorbim de „a fi situat pe", „între", „congruent" etc. am folosi numai notații ca : *a, b, A, B,* α, β etc., am putea încă reproduce toată axiomatica (pornind de la axiome), legăturile dintre aceste simboluri fiind obișnuitele legături logice. Totul s-ar transforma într-o rețea de relații logice. Dar aceasta este geometria ? Aceasta este numai *harta interdependențelor logice* pe care geometrul le-a folosit, nu geometria însăși, nu reflectarea în mintea cercetătorului a proprietăților spațiale în generalitatea și esențialitatea lor. Pentru a fi vorba de geometrie trebuie să ne referim din nou la „puncte", „drepte", „plane", la „între", „a fi situat" etc., adică la *conceptele figurale* despre care am vorbit.

De unde provine iluzia că geometria poate fi redusă la axiomatică, la o rețea logică ? Ea provine, cum spuneam, din faptul că în cazul geometriei, în concepția newtoniană a spațiului, rețeaua logică pare singură suficientă pentru a duce de la axiome la toate teoremele pe care le cuprinde. Și ea pare singură suficientă, pentru că geometria fiind un domeniu integral (relativ) separabil, entitățile intuitive se conceptualizează integral.

Scanned with OKEN Scanner

Dar dacă vrem să înţelegem de ce geometrul a ales aceste axiome şi nu altele, de ce a ales aceste combinaţii, aceste înlănţuiri şi nu altele, dacă vrem să vedem cum se reflectă proprietăţile spaţiului în esenţialitatea şi generalitatea lor în teoremele geometrice, dacă vrem să ştim cum putem aplica aceste teoreme în practică, atunci reţeaua logică-formală ne apare drept ceea ce este: numai o *parte componentă* a procesului de cunoaştere, mijlocul prin care practica socială cristalizată asigură controlul intern riguros al desfăşurării corecte a raţionamentului.

Gîndirea geometrică în desfăşurarea ei reală nu operează cu abstracţii pure şi nici cu formaţii provizoriu amalgamate, ca în alte domenii de investigaţie, ci cu *concepte figurale,* cu entităţi în care structurile intuitive devin integral concepte, fără a-şi pierde intuitivitatea.

CAPITOLUL AL XI-lea

FORMA

Am văzut că figura geometrică posedă două caracteristici esenţiale : *forma* şi *dimensiunea* (la care s-ar mai putea adăuga şi *poziţia* în cazul în care figura este considerată în raport cu repere exterioare ei).

Geometria a început prin a fi, după cum s-a văzut, o ştiinţă experimentală, asemenea fizicii. Ea nu era despărţită de aritmetică, ci consta, ca şi aceasta, dintr-o culegere de reguli obţinute prin experienţă. Problemele de geometrie erau în acelaşi timp problemele de calcul [1].

Treptat însă geometria s-a transformat într-o teorie matematică autonomă, în ceea ce numim azi „geometria euclidiană", pentru că prima ei expunere sistematică, deductivă a fost dată în *Elementele* lui Euclid. Or, în cadrul acestei expuneri deductive proprietăţile figurilor geometrice, expuse sub formă de axiome şi teoreme, s-au dovedit independente de *dimensiunea absolută a figurilor*. Nici o teoremă a geometriei euclidiene nu-şi condiţionează limitele aplicabilităţii ei în funcţie de dimensiunile figurilor respective. O teoremă demonstrată pe un cerc este adevărată pentru orice cerc, indiferent de rază. O teoremă demonstrată pe un pătrat este adevărată pentru orice pătrat, indiferent de latură. O teoremă demonstrată pe un triunghi este necondiţionat adevărată pentru orice triunghi *asemenea cu el*. Foarte multe dintre teoremele referitoare la triunghi sînt adevărate pentru toate triunghiurile, indiferent de formă, de pildă teoremele concurenţei bisectoarelor, medianelor, mediatoarelor

[1] A. D. Aleksandrov, *Privire generală asupra matematicii*, în *Matematica...*, p. 30.

etc. Dar nu *toate* teoremele referitoare la triunghi sînt valabile pentru orice fel de triunghi. Există teoreme ale triunghiurilor isoscele, ale triunghiurilor echilaterale, ale triunghiurilor dreptunghice, care nu sînt adevărate decît pentru fiecare dintre aceste categorii de triunghiuri.

Unele teoreme ale geometriei euclidiene îşi păstrează valabilitatea chiar la schimbarea formei figurii (bineînţeles între anumite limite), altele însă îşi pierd această valabilitate. Dar cîtă vreme *forma unei figuri nu se schimbă,* indiferent de schimbările de poziţie şi de dimensiune, toate teoremele geometriei euclidiene rămîn valabile. Din punct de vedere matematic, geometria euclidiană este domeniul proprietăţilor care rămîn invariante în raport cu transformările grupului *Gs* al similitudinilor spaţiului.

Din punct de vedere psihologic, aceasta înseamnă că domeniul geometriei euclidiene este, în ultimă instanţă, domeniul formelor spaţiale, al formelor pure, în care facem abstracţie nu numai de natura obiectelor, dar şi de poziţia şi de mărimea absolută a figurii geometrice astfel obţinute.

Această desprindere a figurii geometrice de mărimea ei absolută joacă un rol extrem de important în trecerea istorică de la geometria experimentală, practică la geometria abstractă, teoretică, deductivă. Degajarea formei spaţiale pure reprezintă o a doua treaptă de generalizare, specifică geometriei.

Aceasta nu înseamnă că în teoremele geometriei elementare nu va mai fi vorba de distanţă, de mărimea unor segmente, de figuri egale (congruente), dar întotdeauna numai sub formă generală, fără particularizarea prin raportare la valori determinate.

De pildă, o teoremă ca aceasta: *două triunghiuri sînt egale dacă au cîte un unghi egal cuprins între laturi respectiv egale* implică invarianţa mărimii absolute a laturilor în cauză.

Dar proprietatea ca atare, exprimată în teoremă, nu este condiţionată de dimensiunea absolută a laturilor.

Geometria elementară euclidiană nu se opreşte niciodată la o formulare de genul acesta : *un triunghi cu laturile de 3, 4, 5 cm este un triunghi dreptunghic.* În cadrul geometriei euclidiene, aceasta reprezintă constatarea unui fenomen particular şi nu o teoremă. Acest fenomen particular poate fi justificat practic prin măsurători, dar poate fi dovedit şi teoretic prin încadrarea într-o teoremă propriu-zisă, celebra teoremă a lui Pitagora.

Scanned with OKEN Scanner

Dimensiunile intră în joc numai în două sensuri: constanța dimensiunilor și relațiile dintre dimensiuni (dimensiunile relative în cadrul figurii). Valoarea absolută a dimensiunilor se poate schimba cu condiția păstrării relațiilor dintre ele, fără ca prin aceasta vreuna dintre proprietățile geometrice ale figurii să fie alterată.

Aceasta este, evident, un stadiu superior față de metrica elementară, unde calculul însuși al dimensiunilor intră în joc. Ceea ce nu înseamnă că dimensiunea nu este un fapt geometric. Dar ea este caracteristica prin care se ajunge la particularizarea la extrem a figurii în cadrul domeniului de legitate al geometriei.

Înlănțuirea deductivă a teoremelor geometrice, expunerea lor axiomatică n-ar fi posibilă fără acest grad de abstractizare și generalizare prin care este eliminată dimensiunea absolută.

Din punct de vedere psihologic, aceasta înseamnă că figurile geometrice se bucură de proprietatea transponibilității : o figură spațială este echivalentă sub raportul proprietăților geometrice cu oricare alta având aceeași formă cu ea. Forma pură apare astfel ca o caracteristică spațială obiectivă, esențială a figurilor. Forma nu este, cum ar rezulta din concepția gestaltistă, o entitate metafizică, iar generalizarea proprietăților pentru figurile de aceeași formă nu reprezintă un act pur al spiritului organizator, ca urmare a unor legi date apriori. Generalitatea proprietăților geometrice ale figurilor având aceeași formă, este un fapt obiectiv, este o însușire esențială obiectivă a spațiului, descoperită pe baza practicii umane și reflectată în mintea omului.

După cum am arătat în paginile precedente, figura geometrică trebuie considerată ca un *concept figural*, ceea ce înseamnă, din punctul nostru de vedere, că ea dobîndește însușiri conceptuale fără a-și pierde pe deplin *intuitivitatea*. În această calitate, figura geometrică este inserată integral în lanțul raționamentelor, ca o entitate a gîndirii logice, abstracte.

Or, faptul acesta este favorizat de o condiție psihologică care ni se pare a fi în acest caz de mare importanță.

Figura spațială, pentru a putea deveni obiect al raționamentului geometric, pentru a-și putea dezvălui proprietățile generale inserabile într-un raționament geometric (adică deductiv, demonstrativ), trebuie să se detașeze de propria ei mărime absolută. Or, această generalizare se realizează în mod natural, pe baza legilor psihologice, prin însăși natura reprezentărilor

Scanned with OKEN Scanner

spaţiale. Reprezentările spaţiale, în special cele ale figurilor geometrice, nu sînt decît forme imaginate cu dimensiuni nedeterminate.

★

În trecerea de la figura geometrică, de la conceptul figural — imagine spaţială strict determinată şi totuşi integral controlată conceptual — la conceptul propriu-zis, trebuie să distingem această etapă intermediară care s-a dovedit extrem de importantă pentru geometria însăşi şi extrem de interesantă pentru psihologie.

Dacă omitem dimensiunile (ale laturilor, ale unghiurilor etc.), mai rămîne totuşi ceva din domeniul intuiţiei, şi anume *forma.*

Forma este o verigă de legătură între determinarea strictă a imaginii intuitive şi generalitatea conceptului. Să privim figurile de mai jos (fig. 10). Aceste figuri nu sînt identice. Ele diferă ca dimensiuni. Dar ele au totuşi ceva comun, ceva esenţial comun : forma. O infinitate de triunghiuri pot avea această formă. Ceea ce înseamnă că forma este o proprietate generală. Este însă forma un concept pur care are nevoie, pentru a putea fi ilustrat intuitiv, de anumite determinări în plus ? Putem răspunde fără a ezita : nu. Forma, deşi generală, este totuşi perfect intuitivă, *complet determinată sub raport intuitiv.*

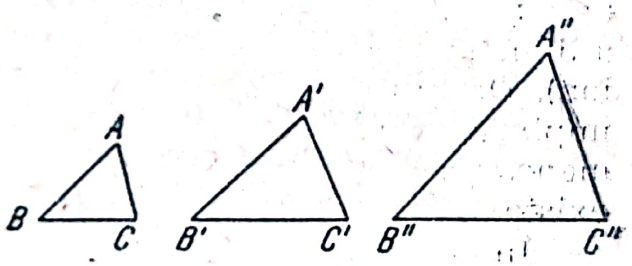


Fig. 10

Cum e posibil ca o imagine să fie strict determinată şi să rămînă totuşi infinit variabilă? S-ar părea că avem aici o contradicţie.

Explicaţia rezidă în mecanismul însuşi al formării imaginilor spaţiale.

Un triunghi *desenat,* materializat grafic, are nu numai o formă determinată, ci şi dimensiuni determinate. Altfel nu se poate. Dar un triunghi *reprezentat,* imaginat mintal? Să încercăm să ne imaginăm un triunghi. Dacă ni-l imaginăm efectiv atunci triunghiul va avea o formă strict determinată. Nu ne putem imagina un triunghi oarecare, putem doar gîndi ca noţiune un triunghi în care forma să nu fie particularizată.

Dar putem determina *dimensiunile reale* ale triunghiului *imaginat,* aşa cum putem determina, prin măsurare, dimensiunile reale ale triunghiului desenat ? La această întrebare nu putem răspunde decît experimental, imaginîndu-ne efectiv triunghiul. Şi răspunsul experimentului este categoric. În *reprezentare,* figura nu are dimensiuni determinate deşi are o *formă* perfect determinată. La prima impresie, faptul acesta pare paradoxal, ţinînd seama de experienţa noastră perceptivă şi practică, obişnuită. Obiectele imaginate s-ar părea că posedă o dimensiune proprie, asemenea obiectelor percepute. De fapt însă, atunci cînd ni se pare că obiectele reprezentate posedă o dimensiune determinată, aceasta se întîmplă pentru că semnificaţia imaginii este în funcţie de experienţa noastră directă cu obiectul respectiv. Imaginîndu-ne o carte, noi ne imaginăm un *obiect* foarte bine cunoscut practic dinainte, cunoaştere care implică şi dimensiunea. În percepţie, dimensiunea este dată *intuitiv, nemijlocit,* ca o calitate a obiectului, aşa cum sînt date şi culoarea sau greutatea (nu *măsura* — expresia numerică a dimensiunii —, care implică o raportare conştientă la un etalon). De fapt, această apreciere intuitivă, directă a dimensiunii implică o comparaţie, o raportare la alte obiecte, dar într-o asemenea măsură absorbită în actul percepţiei încît pare să nu existe.

În reprezentare, dimensiunea obiectului nu este implicată nemijlocit, intuitiv. Ea se adaugă din afară prin raportarea la experienţa anterioară a subiectului, prin *intermediul semnificaţiei.* Ceea ce din punct de vedere spaţial aparţine intuitiv figurii reprezentate este numai *forma.* Faptul acesta apare evident în cazul figurilor geometrice. Dimensiunile acestora sînt, practic, cu totul arbitrare. Aceste dimensiuni nu pot fi puse în legătură cu vreo semnificaţie practică proprie figurii. Rezultatul este că figurile geometrice *imaginate* au dimensiuni nedeterminate, deşi au *forme* perfect determinate.

Explicaţia, spuneam, rezidă în însuşi mecanismul formării imaginilor vizuale. După cum se ştie, dimensiunea imaginii retiniene a aceluiaşi obiect perceput variază invers proporţional cu distanţa la care se află situat obiectul. Ceea ce înseamnă că imaginea retiniană a unui obiect nu poate reţine şi transmite creierului o informaţie suficientă asupra dimensiunilor reale, constante ale obiectului. La imaginea retiniană se adaugă excitaţiile kinestezice ale muşchiului ciliar, ale muşchilor orbiculari, excitaţii care prin procesul de acomodare reflexă a anali-

Scanned with OKEN Scanner

zatorului vizual constituie o măsură a distanței la care se află obiectul. Dimensiunea obiectului este apreciată în funcție de dimensiunea imaginii retiniene, corijată de *factorul distanță*. Or, în cazul reprezentărilor, acest factor poate lipsi.

Imaginea mintală nu apare sub influența unui obiect prezent care să oblige acomodarea reflexă a ochiului. Imaginea mintală vizuală poate apărea ca avînd o formă strict determinată, dar o dimensiune nedeterminată. Reprezentarea figurii geometrice poate fi asociată arbitrar cu un obiect sau cu un desen și astfel să obțină, să împrumute, o dimensiune. Ea poate fi proiectată arbitrar — tot mintal — pe un ecran oarecare (un perete), așa cum proiectăm imaginile consecutive. Și după cum imaginile consecutive se prezintă cu dimensiuni variate în funcție de distanța ecranului pe care sînt proiectate, tot așa și reprezentările propriu-zise dobîndesc o dimensiune în funcție de această proiectare.

În sfîrșit, ne putem imagina figura geometrică într-un cadru anumit — o cameră, pe stradă etc. —, plasînd-o, mintal, arbitrar, într-un punct al acestui cadru la o anumită distanță de noi. În felul acesta, figura dobîndește o dimensiune.

Toate aceste procedee, în cazul figurilor geometrice, se obțin numai pe baza unui efort intenționat, pe care, în mod obișnuit nu-l facem pentru că nu avem nevoie să-l facem.

Dimensiunea imaginii geometrice în reprezentare nu este, în sine, determinată. Ea este variabilă și determinabilă numai prin raportarea ei la un cadru obiectiv.

Așadar, în procesul trecerii de la percepție la reprezentare se petrece acest fenomen interesant: figura geometrică se desprinde de dimensiunea ei și păstrează numai *forma,* ultima calitate care reflectă intuitiv aspectul concret al obiectului. Dimensiunea, dacă este necesară, trebuie adăugată din afară, *conceptual,* în funcție de datele problemei.

Faptul că fiziologic și psihologic se realizează acest clivaj natural între dimensiuni și forme are o importanță extrem de mare în cunoașterea realității obiective. Forma este una dintre particularitățile individualizante cele mai importante ale obiectelor. Forma obiectelor solide este caracteristica cea mai stabilă a unui obiect sau a unei specii de obiecte. Un scaun poate fi făcut din lemn, din metal, din material plastic. El poate fi minuscul sau foarte mare. Noi îl vom recunoaște după forma sa. Un măr poate fi galben, verde, roșu, mare sau mic. Noi îl vom recunoaște după forma sa. Chipul unui om poate fi reprodus de

Scanned with OKEN Scanner

o fotografie care nu mai păstrează nici coloritul, nici dimensiunile, ci doar forma, distribuţia relativă a elementelor spaţiale.

Modelul grafic pe care ne facem calculele geometrice referitoare la un teren nu păstrează din înfăţişarea concretă a obiectului decît forma sa. Forma, fiind într-o asemenea măsură proprie obiectelor, este legată în foarte multe cazuri de esenţialitatea lor. Traiectoria unui proiectil balistic este expresia unei legi de mişcare a proiectilului. Forma unui animal aparţinînd unei specii date este dependentă de particularităţi esenţiale ale organismului respectiv: tipul de relaţii cu mediul, modul de hrănire, de înmulţire, de mişcare.

Lumea solidelor de care sîntem înconjuraţi şi care sînt cele mai potrivite prin stabilitatea structurii lor de a servi drept obiecte de acţiune şi obiecte de cunoaştere este, mai ales, o lume de *forme stabile*.

Atît particularităţile cunoaşterii, cît şi cele ale acţiunii noastre s-au modelat în mare măsură după această categorie de realităţi obiective.

Pentru raţionamentul constructiv al geometrului, care experimentează mintal cu concepte figurale, această posibilitate oferită de specificul reprezentărilor de a detaşa forma de dimensiuni joacă un rol extrem de important. *Forma, care s-a dovedit o proprietate importantă şi adeseori esenţială a lucrurilor din realitatea obiectivă, pătrunde în structura şi dinamica raţionamentului geometric, cu intuitivitatea şi generalitatea ei. Dimensiunea, aparţinînd ea însăşi spaţiului, deci domeniului de legitate al geometriei, poate fi omisă integral în cadrul acestui domeniu, în aşa fel încît să nu jeneze generalitatea raţionamentului. Ea intră ca o variabilă dependentă de datele obiective şi se adaugă, de la caz la caz, cu rol particularizant, pentru a se realiza joncţiunea între rezultatele raţionamentului, cu generalitatea lor specifică, şi concretul datelor obiective — ceea ce înseamnă că, în cadrul domeniului de legitate al geometriei în ansamblu, formele constituie un subdomeniu, cu o legitate proprie.*

Din punctul de vedere al psihologiei raţionamentului geometric, problema perceperii şi reprezentării *FORMELOR ca elemente structurale ale conceptelor figurale*, prezintă o importanţă de prim ordin.

Scanned with OKEN Scanner

★

La începutul secolului nostru a luat naştere, în Germania, o şcoală psihologică care a pus *forma* în centrul concepţiei ei. Este aşa-numita „Gestaltpsychologie", avînd ca reprezentanţi de seamă pe M. Wertheimer, W. Köhler, K. Koffka şi K. Lewin.

Psihologia formei, ca şi alte concepţii analoge, a apărut ca o reacţie împotriva vechiului asociaţionism mecanicist, care încerca zadarnic să construiască toată viaţa psihică prin asocieri mecanice de „elemente", de „atomi psihici". În locul aglomerării de „elemente psihice", de senzaţii sau de imagini elementare, apar noţiuni noi, ca cea de *sinteză* la Wundt, la Paulhan, la Janet, de *tendinţă determinantă* la reprezentanţii şcolii de la Würzburg, de *structură* la Spranger sau la Dilthey.

În 1890, psihologul vienez Ch. von Ehrenfels publică memoriul intitulat *Über Gestaltqualitäten,* care a trecut întîi neobservat. Aici se vorbeşte pentru prima dată de calităţi ale formei. Conceptul de formă, de „Gestalt", sugerat de domeniul percepţiei, devine reprezentativ pentru orice totalitate, orice structură întîlnită în viaţa psihică. Ideea de bază a lui Ehrenfels este aceea că forma posedă o individualitate cu calităţi proprii. A rămas celebru exemplul său cu melodia, care nu poate fi redusă la o sumă de sunete: ea posedă o individualitate care ne permite s-o distingem chiar dacă intervin şi alte sunete străine. Mai mult: forma se poate păstra chiar dacă modificăm toate componentele, transpunînd melodia în altă tonalitate. Întregul posedă deci o individualitate în aceeaşi măsură ca şi elementele care-l compun.

Ehrenfels ajunge la ideea existenţei a două realităţi psihice: calităţile sensibile şi calităţile formale (Gestaltqualitäten), primele reprezentînd substratul celorlalte.

Dar cum se ajunge de la acestea la întreg? Cum, pe ce căi se realizează această structurare a elementelor într-un întreg avînd calităţi formale proprii ?

Nici Ehrenfels şi nici reprezentanţii şcolii de la Graz — Meinong, Benussi —, care l-au continuat, n-au putut da un răspuns satisfăcător la această întrebare. În acest moment intervine „teoria formei".

Nu putem explica trecerea de la elemente la întreguri structurale în viaţa psihică pentru simplul motiv că *primele nu există* sau cel puţin nu există ca realităţi primare, sună răspunsul şcolii configuraţioniste.

Scanned with OKEN Scanner

Faptele psihice sînt întotdeauna forme. Ele sînt unităţi, ansambluri structurale care se individualizează cu o pregnanţă mai mică sau mai mare în cîmpul spaţial şi temporal al percepţiilor şi reprezentărilor. Formele pot prezenta anumite *articulaţii interioare*. Aceasta nu înseamnă însă că ele se compun printr-o asamblare de elemente. Dimpotrivă, ceea ce putem desprinde ca articulaţii constitutive ale întregului este dependent de întreg, de locul şi de funcţiunea ce le revin în întreg. O parte dintr-un întreg este altceva decît aceeaşi parte izolată sau aparţinînd altui întreg. Ideea centrală a teoriei „Gestalt"-ului este deci aceea că în viaţa psihică structurile organizate, configuraţiile constituie realităţi primordiale, subordonate unor legi proprii, iar ceea ce am putea considera ca elemente, ca părţi constitutive nu sînt decît aspecte secundare, derivate.

Reprezentanţii şcolii formei au adăugat teoriei lor psihologice şi un „fundament" filozofic. Ei au considerat că „structurile organizate" ale vieţii psihice nu sînt decît expresia structurilor organizate ale proceselor fiziologice, care şi ele, la rîndul lor, aparţin în ultimă instanţă vastului sistem de structuri organizate ale lumii fizice [1].

Nu vom intra în analiza de detaliu a acestei concepţii filozofice. Aşa cum arată, pe bună dreptate, S. L. Rubinştein, concepţia gestaltistă îmbină strîns idealismul cu mecanicismul [2]. Reprezentanţii acestei şcoli definesc realitatea cunoscută ca un „cîmp senzorial fenomenal", ceea ce este, evident, o viziune idealistă. Pe de altă parte, comportarea omului este determinată în mod univoc, după ei, din afară înăuntru, de situaţia percepută, de modul în care percepţia situaţiei se structurează, independent de experienţa anterioară şi de orientarea conştiinţei. Actul individului nu este o expresie a personalităţii sale, a relaţiilor sale cu mediul, ci „o funcţie a situaţiei" din care derivă automat.

Sub acest raport, gestaltismul este o concepţie mecanicistă. După transplantarea şcolii gestaltiste în America, această latură a fost mult accentuată în special în lucrările lui Koffka [3], tinzîndu-se spre o apropiere de behaviorism. Spre deosebire de behaviorismul ortodox, care îşi propune să explice totul în

---

[1] W. Köhler, *Die physischen Gestalten in Ruhe und in stationären Zustand*, Braunsweig, 1920.

[2] S. L. Rubinstein, *op. cit.*, p. 95.

[3] K. Koffka, *Principles of Gestaltpsychologie*, New York, Harcourt, 1935.

Scanned with OKEN Scanner

termeni de stimuli-reacţie, gestaltiştii, credincioşi concepţiei lor asupra primatului „structurii", vor vorbi de *obiecte* şi de *acte*. Strînsa îmbinare dintre idealism şi mecanicism apare foarte clar la Koffka din modul în care defineşte mediul. El distinge mediul comportamental de mediul geografic, înţelegînd prin primul felul în care mediul îi apare subiectului, iar prin al doilea felul în care este descris de fizică. Un mediu *existent obiectiv* nu are loc aici, pentru că, în fond, viziunea este fenomenalistă. Afară de aceasta, însăşi opoziţia dintre mediul comportamental şi mediul fizic trădează esenţa idealistă a concepţiei. Reacţiile — actele subiectului — sînt determinate mecanic, în sens behaviorist, de mediul său comportamental. Dar cum poate fi definit acesta din urmă de către experimentator, cum poate fi el deosebit de mediul fizic? Prin intermediul reacţiilor, al actelor subiectului, prin confruntarea acestor reacţii între ele. Aşadar, individul reacţionează mecanic la un mediu, care însă nu este decît al său propriu, care nu este decît proiecţia sa proprie în afară! Fundamentul metodologic al unei atare concepţii nu este decît un cerc vicios. „Idealismul şi mecanicismul — scrie S. L. Rubinstein — se împletesc într-o unitate complexă — în concepţia gestaltistă — în forma lor cea mai rafinată şi de aceea deosebit de primejdioasă" [1].

Teoria „Gestalt"-ului a determinat efectuarea a numeroase experimente, în primul rînd în domeniul percepţiei, dar şi într-o serie întreagă de alte domenii ale psihologiei: memorie, gîndire, voinţă, activitate, afectivitate etc. În cadrul preocupărilor noastre ne interesează în special percepţia şi gîndirea. Cercetările au scos la iveală o serie de „legi de organizare" ale întregului cărora orice activitate psihică li s-ar supune. Aceste legi, ca şi faptele pe care se sprijină, sînt azi bine cunoscute şi nu le vom aminti decît în măsura în care interesează discuţia noastră referitoare la figurile geometrice.

Astfel s-a arătat că în cîmpul percepţiei există o tendinţă de structurare în funcţie de apropierea elementelor, de asemănarea formei sau coloritului acestor elemente. Există o tendinţă de structurare spre „forme închise". Totul este subordonat legii „bunei forme". Diversele părţi ale unei figuri tind să se unească în întreguri care reprezintă „forme bune", „forme tari", pregnante.

Gestaltiştii se ridică împotriva opiniei, foarte răspîndite, după care modul de organizare al unei figuri este dependent

[1] S. L. Rubinstein, *op. cit.*, p. 62.

de semnificaţia practică a figurii, de experienţa anterioară a individului. Organizarea întregului, ca şi modul de segregare a părţilor unui ansamblu, se supune unor legi generale, comune pentru om şi pentru animale, independente de personalitate, voinţă, orientarea preocupărilor, experienţă şi care sînt imanente figurii. Atunci cînd experienţa anterioară intră în conflict cu „legile de organizare", acestea din urmă ies învingătoare.

Vom cita cîteva exemple care ne vor servi la discuţia ulterioară. Iată, de pildă, acest exemplu al lui Köhler (fig. 11) [1].

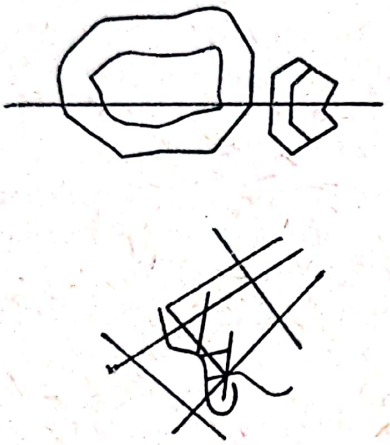


Fig. 11

Cifra 4 este fără îndoială o imagine foarte cunoscută. Cu toate acestea în figura de sus ea nu se distinge de loc. De ce? Pentru că părţile ei sînt absorbite de cele două figuri care reprezintă, fiecare în parte, „forme bune". Nu este vorba de o simplă mascare a imaginii cifrei 4 prin acoperirea sa cu un sistem de linii oarecare. În partea de jos, 4 iese bine în evidenţă, deşi astfel de linii există şi aceasta pentru că ele nu se constituie într-o „formă bună".

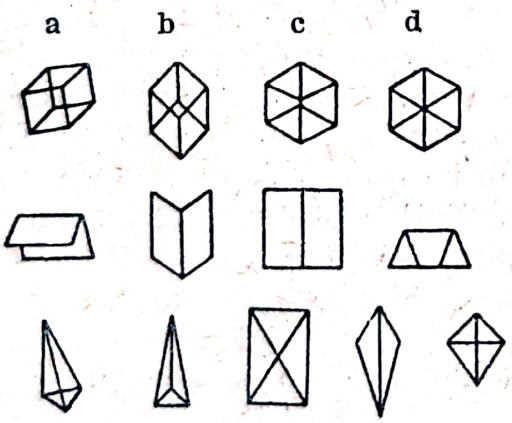


Fig.12

Iată alte exemple, studiate de Kopferman (fig. 12) [2]:

Figurile *a* vor fi văzute net ca solide, în timp ce figurile *d* ca plane ; figurile *b* şi *c* sînt nedecise. Totuşi, toate pot fi logic considerate, fie ca figuri în spaţiu, fie ca figuri plane.

Răspunsul este acesta : „Sînt văzute plane cele care devin prin aceasta *figuri mai bune* (simple, regulate); sînt văzute ca solide cele care devin prin aceasta figuri mai bune decît dacă ar fi văzute plane în aceste condiţii" [3].

---

[1] Cf. P. Guillaume, *La psychologie de la forme*, Flammarion, 1937, p. 73.

[2] *Ibidem*, p. 86.

[3] *Ibidem*.

Aşadar, nici interpretarea logică a figurii, nici familiaritatea ei (şi deci experienţa anterioară) nu pot explica, după gestaltişti, modul în care aceasta se structurează în percepţie. S-ar putea susţine, de pildă, că prima figură din rîndul al doilea sugerează o carte deschisă, de aceea este văzută în spaţiu. Dar acest lucru ar putea fi la fel de adevărat şi pentru a treia figură din rîndul al doilea, şi totuşi aici nu vedem o carte deschisă. Figura plană se constituie prin sine într-o formă bună şi nu este necesară restructurarea într-o imagine spaţială, aşa cum e necesar în prima figură din rîndul al doilea pentru a se obţine o „formă bună".

Viciul de bază al acestei argumentări nu este greu de sesizat. Şi aici avem un cerc vicios, ca şi în teoria generală a „mediului comportamental". De ce este văzută o figură într-un anumit fel, cu o anumită organizare internă, şi nu altfel? Gestaltiştii răspund invariabil: conform legii „bunei forme". Dar ce este „o formă bună"? Prin ce se caracterizează „o formă bună", după ce criterii o putem recunoaşte? Din expunerea teoriei nu reiese decît un singur răspuns: „o formă bună" este „o formă bună", adică o formă care se impune ca atare. O figură este percepută în conformitate cu legea formei bune, iar o formă bună este cea care este astfel percepută. Teoria gestaltistă nu poate ieşi din acest cerc vicios în care singură s-a închis. Fără să analizez această concepţie în ansamblul ei — scrie A. N. Leontiev —, mă voi limita numai la o singură observaţie: ceea ce psihologia structuralistă a transformat într-un postulat, noi considerăm drept *problemă* de cercetare. Din punctul de vedere al teoriei învăţării, aceasta înseamnă că, acolo unde structuralismul vede factorul învăţării, noi vedem produsul ei" [1].

Aceste fenomene de organizare, de structurare, de sistematizare există, fără îndoială, în cîmpul perceptiv şi în întreaga noastră viaţă psihică. Ele au un rol extrem de important în domeniul memoriei, al gîndirii, al afectivităţii, al activităţii, al personalităţii considerate ca întreg. *Dar ele nu sînt niciodată date de la început şi invariabile. Ele sînt produsul unui proces evolutiv, al interacţiunii complexe dintre organism şi mediu, ele sînt modalităţi de adaptare superioară a organismului la mediu şi — în ceea ce priveşte cunoaşterea, ca elemente ale reflectării adecvate a realităţii obiective — supuse unei perfecţionări continue.*

[1] A. N. Leontiev, *op. cit.*, p. 76.

Să considerăm numai exemplele citate mai sus. În primul exemplu, în care ne referim la cifra 4, s-ar părea că găsim un argument în favoarea independenţei şi superiorităţii formelor de organizare perceptivă în raport cu procesul adaptării prin învăţare. Dar aşa stau oare lucrurile? Imaginea cifrei 4 cedează într-adevăr, în complexul figurii, faţă de imaginea celor două desene care ies mai bine în evidenţă. S-ar părea că avem de confruntat o imagine familiară cu o imagine arbitrară, neîntîlnită, dar care beneficiază de legile abstracte ale organizării. În fond nu este aşa. Cifra 4 este într-adevăr o imagine familiară, dar totuşi o imagine care, din punct de vedere perceptiv, este *cu totul particulară*. Imaginile celor două desene însă — deşi noi în detaliile lor — fac parte, în aspectul lor general, dintr-o categorie vastă de imagini perceptive, larg sprijinite pe experienţa anterioară, *imagini care amintesc de obiecte prin forma lor închisă*. Aici conflictul real nu este între experienţa anterioară şi proprietăţile intrinseci ale unui „Gestalt", cum susţin psihologii respectivi, ci între *o experienţă anterioară, deşi veche, dar foarte limitată, particulară, şi o experienţă practică şi perceptivă mult mai veche şi mai generală*.

Gestaltiştii vorbesc ei înşişi de o lege a „formelor închise". De ce sînt „formele închise" în general mai bune decît formele deschise? Pentru gestaltişti, o asemenea întrebare este lipsită de sens. Pentru noi însă o astfel de întrebare cere un răspuns şi noi îl putem da: *pentru că „formele închise" sînt mult mai apropiate de imaginea obiectelor reale, consistente*, de imaginea solidelor cu care în mod curent acţionăm. La fel stau lucrurile şi cu celelalte legi: a „proximităţii", a „asemănării". Punctele apropiate tind să se grupeze împreună. De ce? Pentru că în mod curent punctele care formează imaginea unui obiect sînt între ele strîns apropiate, iar între obiecte deosebite există intervale mai mari sau mai mici. La fel şi pentru elementele asemănătoare: un obiect are în general o anumită culoare ş.a.m.d. *Dacă modul de structurare al imaginilor în percepţii n-ar corespunde cu structurile obiective, cu obiectele ca atare, atunci ne-am înşela la tot pasul*, cunoaşterea noastră ar fi extrem de nesigură şi acţiunile noastre asupra realităţii, ar fi sortite eşecului.

Dar dacă modul de structurare al imaginilor în percepţie trebuie să corespundă cu unităţile structurale existente obiectiv, cu obiectele, atunci este lipsit de sens să căutăm explicaţia în afara acestei concordanţe necesare, să căutăm „legi ale or-

ganizării" în afara relaţiilor organism-mediu. Necesitatea reperării şi diferenţierii obiectelor în cîmpul perceptiv duce la formarea a ceea ce noi am numi *deprinderi perceptive*, care treptat se consolidează, se perfecţionează prin verificări succesive, se *generalizează* şi se *autonomizează*, cum se întîmplă în atîtea sectoare ale vieţii psihice. Chiar dacă în cîmpul perceptiv nu apare obiectul concret ca atare, ci o imagine oarecare, mai mult sau mai puţin neprecisă, neobişnuită — un desen, o pată, o îngrămădire de nori etc. —, imaginea respectivă va fi văzută organizat, structurat, în virtutea acestor „legi ale formei", care *nu sînt altceva decît deprinderi perceptive*.

În exemplul din figura 12, lucrurile se petrec la fel. Figurile din grupul *a* apar ca solide pentru că solidele respective (un cub, o carte deschisă, un tetraedru) au un sens evident conferit de experienţa noastră anterioară, în timp ce ca figuri plane nu amintesc nimic. Figurile din grupul *d* ne mulţumesc şi ca figuri plane, din cauza simetriei lor, şi de aceea o reconstrucţie mintală sub formă de solide nu este necesară. Dar nu este simetria însăşi o lege „a bunei forme" imanentă structurilor perceptive şi independentă de experienţă? O asemenea ipoteză apare ca gratuită. Ea omite, ca şi în celelalte cazuri, o explicaţie ştiinţifică, cauzală. Simetria se descoperă, se învaţă în activitatea practică a copilului. Copilul descoperă simetria în obiectele din jur şi în înfăţişarea propriului său corp. Obiectul simetric e mai uşor de conceput, de confecţionat şi de manipulat.

Faptul că figurile din *b* şi *c* pot fi concepute fie ca figuri plane fie ca figuri în spaţiu se explică prin echilibrarea acestor două tendinţe. De fapt, afirmaţia lui Guillaume nu este adevărată, în ceea ce priveşte grupul *c*, decît pentru prima figură. Celelalte două apar ca plane. În celelalte cazuri din *b* şi *c* găsim figuri care, dacă le considerăm plane, deşi simetrice, sînt puţin obişnuite. În schimb sînt mai familiare ca desene plane ale unor figuri în spaţiu (văzute dintr-o perspectivă privilegiată, ceea ce le şi conferă aspectul lor incert).

Aşadar, în toate aceste cazuri este vorba în special de *deprinderi perceptive* dobîndite în activitatea practică şi de rezultatele interferenţelor dintre ele.

Rolul acestor deprinderi perceptive nu poate fi neglijat în predarea geometriei.

Înainte de formarea a ceea ce noi am numit *conceptele figurale*, adică înainte de subordonarea deplină a proprietăţilor

spaţiale percepute intuitiv faţă de concepte, imaginile formelor geometrice sînt supuse unui joc complex de forţe generate de ansamblul cîmpului perceptiv (forţe care, aşa cum am văzut, nu sînt imanente figurii, ci determinate de progresul mijloacelor perceptive, în ontogeneză).

Aşa cum se va vedea şi din rezultatele cercetărilor noastre experimentale, nu este posibil să putem explica diferitele etape care duc la constituirea conceptelor figurale în ontogeneză, în cadrul procesului instructiv-educativ, fără să ţinem seama şi de aceste tendinţe care iau naştere în cîmpul perceptiv.

Formaţiile conceptualo-figurale care se dezvoltă treptat, cum sînt punctul, dreapta, distanţa, sistemul de referinţe etc., sînt, înainte de stabilizarea lor deplină, formaţii mintale fragile care se descompun şi se deteriorează uşor sau care sînt uşor modificate în structura lor internă. Pentru copilul care trebuie să înveţe că distanţa de la un punct la o dreaptă este dată de o anumită construcţie invariantă (ortogonalitatea), va fi foarte greu să apere această construcţie — la începutul realizării ei — de jocul de forţe care ia naştere în structura cîmpului perceptiv. Figura se va dovedi multă vreme „sensibilă" la schimbările de cadru în care este plasată. Componentele intuitive ale formaţiei mixte conceptualo-intuitive — insuficient sudate, insuficient fuzionate cu cele abstracte, insuficient controlate de ele — răspund acestor forţe, intră în rezonanţă cu ele şi se coalizează cu ele într-un nou ansamblu structural.

★

Dat fiind că percepţia nu este un fenomen psihic izolat, ea este dependentă şi de o serie întreagă de alţi factori în afară de aceste deprinderi perceptive de care am vorbit mai sus.

E. Rignano, în critica făcută concepţiei gestaltiste, insistă asupra rolului trebuinţelor, al intereselor, al vieţii afective în segregarea structurilor percepute [1]. În ultimii ani, un mare număr de lucrări a fost consacrat studiului factorilor de personalitate în perceperea realităţii.

J. Piaget, acceptînd conceptul de structură pentru psihologie, aduce o serie de argumente bazate pe rezultate experimentale împotriva unei invarianţe a structurilor, a legilor de organizare în viaţa psihică, teză esenţială pentru gestaltism.

[1] E. Rignano. *Problèmes de psychologie et de morale*, Paris, Alcan, 1928, p. 279.

Citînd lucrările lui Brunswick, Cruikshank, Lambercier, Burzlaff, Beyrl, referitoare în special la constantele perceptive, Piaget dovedeşte caracterul evolutiv, în raport cu vîrsta, al organizărilor perceptive [1].

Nu vom intra în detaliile acestei discuţii, care nu ne interesează aici decît în măsura în care este legată de problema figurilor geometrice.

Soluţia ştiinţifică a problemelor deschise de „teoria formei" a fost dată de cercetările lui I. P. Pavlov şi ale şcolii sale. „Pentru noi — scrie Pavlov — problema este limpede: noi vedem clar că datorită asociaţiei se formează «structura» şi nu «structura» formează asociaţia, pentru că această din urmă afirmaţie este absurdă... Luaţi, de pildă, stereotipul dinamic. Noi folosim excitanţii noştri într-o anumită ordine. Ei s-au legat într-o structură, într-un sistem, şi acest lucru l-am realizat pe baza asociaţiilor. Cum să negăm un fapt atît de evident ?" [2].

Obiectul percepţiei se relevă a fi în realitate un excitant complex. Diferitele elemente ale obiectului, acţionînd simultan sau succesiv (ca în fenomenele sonore) asupra analizatorilor, determină formarea unor reflexe condiţionate nu la fiecare component în parte, ci la totalitatea componentelor într-o ordine dată. Aceeaşi stimuli prezentaţi izolat sau prezentaţi toţi, dar într-o altă ordine, nu vor declanşa reflexul condiţionat.

„Cum trebuie înţelese aceste fapte ? — se întreabă Pavlov. În ce fel un complex alcătuit din aceeaşi excitanţi care acţionează, prin urmare, asupra aceloraşi celule din scoarţă, putea să se prezinte în mod prelungit şi în aceeaşi perioadă de timp drept un excitant diferit, care producea în aceste celule fie un proces de excitaţie, fie unul de inhibiţie ? Care ar putea fi temeiul acţiunii sale diferite? După cum ne arată faptele, temeiul său nu poate fi decît activitatea de sinteză a celulelor excitabile. În condiţiile respective, celulele urmau să se lege, să formeze o unitate complexă, aşa cum o vedem în faptul constant de formare a reflexelor condiţionate. În acest caz se produce în mod inevitabil o influenţă reciprocă a celulelor excitabile, aşa cum se manifestă în mod evident în cazul complexului simultan de excitanţi. În cazul complexului succesiv, această acţiune reciprocă trebuie să fie mai complexă.

---

[1] Vezi J. Piaget, *La psychologie de l'intelligence*, Paris, A. Colin, 1947, p. 74—82.

[2] Павловские среды т. II. Изд. Акад. Наук СССР Москва - Ленинград, 1949, p. 46—47.

În acest caz, fiecare celulă antrenată în complex acționează în alt mod asupra celulei excitate după ea, în funcție de modul în care ea însăși a fost influențată de celula excitată înaintea ei. Prin urmare, ordinea aceloraşi excitanți și pauzele dintre ei urmează să fie factorii care determină rezultatul definitiv al excitației care urma să dea un efect global cantitativ (și s-ar putea și unul calitativ) de pe urma întregului excitant complex" [1].

Esențiale în această concepție sînt, pentru problema noastră următoarele idei:

1. Percepția obiectului ca *întreg* este determinată *obiectiv* de simultaneitatea sau succesiunea obiectivă, reală a elementelor, a însușirilor proprii obiectului. Obiectul este perceput unitar pentru că în mod obiectiv formează o unitate.

2. Structura în percepție a imaginii obiectului, determinată de structura sa obiectivă, se realizează prin activitatea de analiză și sinteză superioară a scoarței cerebrale, prin interacțiunea, foarte complexă, a celulelor corticale în virtutea legilor fiziologice.

3. Această structurare nu se realizează dintr-o dată, nu este un fenomen primar, ci este un rezultat, un produs al unui proces evolutiv, care cunoaște ameliorări succesive.

Această concepție, susținută de I. P. Pavlov și școala sa pe baza cercetărilor experimentale, este în totală contradicție cu concepția școlii gestaltiste, pentru care :

1. Structura imaginii perceptive nu reflectă structura obiectivă proprie a unui obiect oarecare, ci se realizează în virtutea unor „forme de organizare" pe care ei le numesc „fizice" și care în realitate sînt concepute ca metafizice, aprioric, în afara conexiunii reale a fenomenelor realității.

2. Procesele fiziologice prin care această structurare se realizează se explică ele însele în virtutea acestor legi, a acestor forme transcendentale.

3. Ca atare, structurile — în aceeași concepție — nu sînt evolutive, nu sînt dependente de relațiile reale dintre organism și mediu, nu sînt perfectibile prin procesul învățării.

Este necesară aici o distincție care ni se pare deosebit de importantă. Cercetările efectuate prin metoda reflexului condiționat, ca de altfel și o serie de cercetări psihologice, au pus în evidență caracterul primitiv generalizat al reacțiilor inițiale la

[1] I. P. Pavlov, *Prelegeri despre activitatea emisferelor cerebrale*, Edit. Acad. R.P.R., p. 122—123.

Scanned with OKEN Scanner

diverşi stimuli. „Orice agent din care formăm excitantul nostru condiţionat — spune Pavlov — prezintă în mod obligatoriu, la început, o reacţie generalizată“ [1]. Din punct de vedere psihologic, acestei reacţii generalizate îi corespunde o imagine primitivă, *globală, indistinctă,* sursă de confuzii grosolane. O asemenea imagine globală, primitivă este însă *cu totul altceva* decît „structura organizată“ pe care gestaltiştii o consideră ca manifestîndu-se de la început în perceperea obiectului. Numai prin adaptări şi verificări succesive, pe baza unor procese de diferenţiere din ce în ce mai fine şi mai exacte, se poate realiza, treptat, structura organizată a imaginii perceptive şi care este, de fapt, imaginea corectă a obiectului în complexitatea însuşirilor sale.

Şi cu aceasta ajungem la o problemă extrem de importantă pentru studiul figurilor geometrice, la problema *transponibilităţii.* Transponibilitatea este una dintre caracteristicile esenţiale ale „structurilor“. Am văzut mai sus o serie de exemple în această privinţă (melodia care rămîne invariantă în raport cu anumite modificări ale componentelor etc.).

Dar gestaltiştii, vorbind de transponibilitate, consideră generalizarea primitivă, prin indistincţie, de acelaşi ordin cu generalizarea superioară a relaţiilor din structura imaginii perceptive. Datorită acestei confuzii, ei pot face din transponibilitate o proprietate misterioasă, tot aşa de misterioasă ca şi „Gestalt“-ul însuşi şi pot aduce argumente în favoarea invarianţei fenomenelor de structurare.

De fapt însă, lucrurile îşi găsesc explicaţia în teoria lui I. P. Pavlov asupra formării reflexelor condiţionate la excitanţii complecşi. Din moment ce, în cazul unui excitant format din mai multe componente, reacţia se stabilizează nu pentru valorile absolute ale fiecărei componente în parte, ci pentru *relaţiile dintre componente,* se ajunge, treptat, la o anumită detaşare, la o anumită autonomizare, în cadrul excitantului, a acestor relaţii. Reflexul va fi declanşat chiar dacă componentele vor varia, cu condiţia ca relaţiile să se păstreze. „Studiul reflexelor la excitanţii complecşi — scrie Sokolov — ne arată că în excitantul complex se stabileşte o legătură între componenţii săi care-şi pierd importanţa de sine stătătoare, relaţia dintre componenţi căpătînd rolul esenţial. Această legătură constantă asi-

[1] I. P. Pavlov., *op. cit.*, p. 97.

gură generalizarea complexului şi constituie baza generalizării în percepţie“ [1].

Aşadar, *„transponibilitatea“ exprimă o corespondenţă structurală, obiectivă între obiectele care joacă rolul de stimuli complecşi.* Ea nu este impusă de „legile de organizare“ funcţionînd apriori. Identitatea de reacţii este determinată de această identitate obiectivă a relaţiilor esenţiale.

Transponibilitatea, reflectată mintal pe baza fenomenului fiziologic al generalizării relaţiilor, exprimă o proprietate caracteristică figurilor geometrice.

Între stadiul figurii geometrice particulare, cu dimensiuni determinate, şi stadiul conceptual-simbolic există, cum spuneam, o etapă de generalizare intermediară, extrem de importantă, aceea în care forma pură se detaşează de dimensiunea absolută.

Această detaşare o întîlnim frecvent şi în alte domenii. Adeseori, modelarea se bizuie pe posibilitatea acestei detaşări permiţînd reconstituirea unui fenomen la scară redusă (deci propice unei investigaţii directe şi economice).

Dar nicăieri nu putem realiza şi nu realizăm acest clivaj cu certitudinea cu care îl realizăm în geometrie. În trecerea de la figura geometrică particulară, dată, la conceptul geometric, ne debarasăm în primul rînd de dimensiunile absolute şi păstrăm *formele.*

În cadrul raţionamentului geometric „plauzibil“, al raţionamentului constructiv, care este prin excelenţă un raţionament logic-intuitiv, noi separăm forma de dimensiunea absolută şi, avînd în vedere generalitatea rezultatelor cerute, operăm numai cu forme pure. Dimensiunile sînt *adăugate* oarecum din afară, în funcţie de datele concrete, obiective ale problemei.

În exemplul de la pagina 125 ni s-a cerut să determinăm dimensiunea celei mai scurte alei. Etapa propriu-zisă de căutare a avut în vedere numai *dinamica internă a formelor.* Calculul dimensiunii s-a efectuat ulterior. Există în manuale multe probleme-„aplicaţii“ de genul „Să se afle aria“ etc. la care rezolvarea se reduce la un calcul aritmetic sau algebric. Dar în cazul acesta nu mai avem de-a face cu problemele de geometrie pro-

[1] Е. Н. Соколов, *Обобщенность восприятия,* în *Советская педагогика,* 1952, nr. 9, p. 57.

priu-zise, ci cu exerciţii de calcul pe date geometrice. Din punctul de vedere al procesului mintal, al calculului efectiv, datele respective pot avea orice alte semnificaţii.

Nu trebuie să rezulte de aici că domeniul geometriei este numai domeniul formelor, iar dimensiunile absolute ale figurilor îi sînt tot atît de străine ca şi hîrtia sau grafitul care servesc la efectuarea desenului. Dimensiunea este un element al spaţiului pur, la fel ca forma. De altfel, în sistemul lui F. Klein, invariantul fundamental al geometriei elementare (euclidiene) corespunzător grupului ortogonal de transformări este :

$$\rho = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

adică tocmai *distanţa* dintre punctele $M_1(x_1\, y_1)$, $M_2(x_2\, y_2)$.

Însăşi măsura unui segment este un concept geometric. Conceptul de *măsură* a segmentului implică o serie de concepte esenţiale pentru gîndirea geometrică cum sînt : constanţa dimensiunii, raportarea segmentului la o unitate-etalon, reportarea unităţii de un număr de ori pe segment, diviziunea acestuia şi, în sfîrşit, rectitudinea însăşi a segmentului. Este însă demn de subliniat faptul că ceea ce numim *mărimea absolută a segmentului* se determină printr-un act de *raportare,* exprimînd deci un raport cantitativ. Perceperea ca atare, a segmentului, cu lungimea sa proprie, nu este încă *măsura* în sens geometric. Am putea spune că în acest caz *cantitatea* nu are încă decît o expresie *calitativă.* Cantitatea *exprimată,* mărimea *cuantificată,* presupune neapărat o *raportare,* deci într-un anumit sens o relativizare, o sinteză dialectică între *absolut* — dimensiunea în sine — şi *relativ* — raportarea la un etalon. Metrizarea este primul act al geometrizării.

În cadrul figurii geometrice, considerată ca unitate, considerată ca ansamblu concepto-figural, este însă necesară, în cursul raţionamentului, despărţirea *formei* de rezultatele raportării la etalonul extern. Cum am spus, prin această despărţire se ajunge la o treaptă de generalizare superioară, care permite încadrarea proprietăţilor figurii într-un sistem mai general de proprietăţi şi apoi într-un ansamblu logic-deductiv.

Această despărţire se realizează în planul operaţiilor mintale în mod natural, datorită fenomenului pe care l-am menţionat : figurile geometrice se reprezintă mintal numai în forma

lor, nu şi în dimensiunile lor absolute. Cînd raţionăm în geometrie, cînd experimentăm mintal cu diferitele figuri geometrice, noi operăm în mod natural cu forme pure, iar rezultatele obţinute nu sînt grevate de date particulare referitoare la dimensiuni. Generalitatea obţinută prin nederminarea dimensiunii în însăşi imaginea intuitivă constituie o contribuţie esenţială la absorbirea imaginii în raţionamentul logic, la realizarea raţionamentului logico-intuitiv al geometriei.

În realitate, procesul de abstractizare şi generalizare se continuă apoi în domeniul însuşi al formelor conceptualizate. Descoperim familii de forme cu proprietăţi comune : pătratul şi diversele dreptunghiuri posibile, cercul şi diversele elipse posibile, varietatea triunghiurilor etc. Dar, începînd de la acest stadiu de generalizare, forma imaginată, ca entitate intuitivă, nu mai coincide cu conceptul, ci este doar o ilustrare particulară a acestuia.

Nu ne putem imagina un triunghi în general, un dreptunghi în general, un paralelipiped în general. Triunghiul ca atare, dreptunghiul ca atare, paralelipipedul ca atare sînt concepte integrate într-o ierarhie conceptuală, cărora le putem asocia o anumită figură particulară.

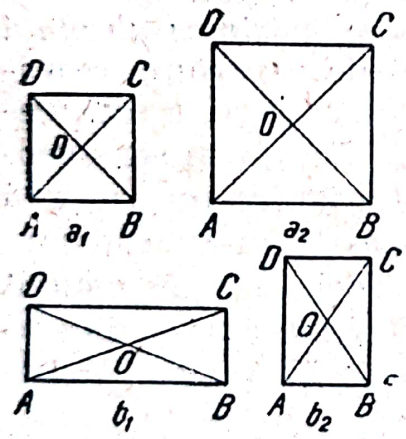


Fig. 13

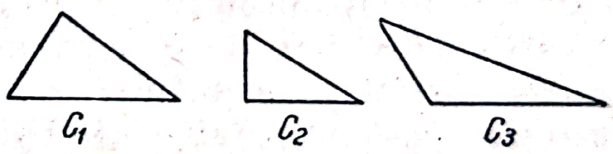


Fig. 14

În reprezentare, aşa cum am subliniat mai sus, această figură particulară nu este dimensional determinată. Dar de aceea ne putem imagina, în schimb, un pătrat în general, un cerc în general, un exagon regulat sau un triunghi echilateral *în general*. Termenilor cerc, pătrat etc. le corespund clase de figuri avînd toate aceeaşi formă şi deosebindu-se numai prin dimensiuni. Termenilor dreptunghi, triunghi, poligon etc. le corespund clase de

figuri deosebindu-se şi ca formă, şi ca dimensiuni. Această distincţie nu este făcută în procesul de învăţămînt, deşi psihologic şi didactic ea este importantă.

Nu este, din punct de vedere psihologic, acelaşi lucru a generaliza proprietăţile figurilor 13 şi a_1 şi a_2 (pătratul) şi proprietăţile figurilor 13 b_1 şi b_2 (dreptunghiul) sau ale figurilor 14 (triunghiul). Aceste două grade de generalizare nu trebuie confundate. Absolut toate proprietăţile geometrice ale pătratului a_1 sînt adevărate şi pentru pătratul a_2. Nici un fel de restricţii nu sînt necesare în acest sens (în afară, bineînţeles, de dimensiunile înseşi). De exemplu proprietăţile referitoare la triunghiurile formate de diagonale : cele patru triunghiuri avînd ca vîrf intersecţia diagonalelor sînt dreptunghice şi egale între ele. În figura 13, aceste triunghiuri sînt deosebite, deşi sînt toate isoscele. În figura 13 b_2, triunghiurile AOB şi DOC sînt echilaterale. Dar găsim în toate dreptunghiurile două triunghiuri echilaterale formate prin intersecţia diagonalelor ? Evident că nu. Apar aici restricţii impuse de schimbările de *formă*.

Generalizarea geometrică de primul tip este mai elementară, mai simplă, mai naturală, şi ea se realizează direct, spontan, la nivelul imaginii însăşi prin identificarea totală a formelor.

Generalizarea de al doilea tip este mai dificilă. Şi în acest caz generalizarea începe la nivelul imaginii, dar ea se realizează deplin numai pe plan conceptual, în urma unui proces de analiză, prin identificarea parţială a unor elemente ale formelor.

Confundarea acestor două procedee de generalizare (care, de fapt, exprimă *grade* de generalizare) contribuie la apariţia a două tipuri frecvente de erori la copii : particularizarea excesivă şi generalizarea excesivă.

Uneori elevii începători (în însuşirea geometriei) au dificultăţi în generalizarea proprietăţilor demonstrate pe o figură, generalizări legate de schimbări mai importante de formă. De exemplu, dificultatea de a recunoaşte în pătrat proprietăţile mai generale ale dreptunghiurilor sau dificultatea de a recunoaşte pe un triunghi avînd un unghi obtuz o proprietate demonstrată pe un triunghi cu unghiurile ascuţite. Această particularizare

excesivă este rezultatul absolutizării formei, care, odată detașată ca invariant, se fixează la nivelul respectiv de generalizare intuitivă.

Identitatea formelor poate duce și la o eroare de tip opus : forma absolutizată și desprinsă din context duce la generalizări excesive. De exemplu, unghiul interior, unghiul exterior, unghiul cu vîrful pe cerc etc. *au aceeași formă*. Dar măsura lor, în funcție de măsura arcelor, este diferită. Trebuie ca elevul să fie făcut să înțeleagă relația intimă, structurală între unghi și arc pentru ca el să se poată detașa de forma absolutizată a unghiului.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA A II-a

CAPITOLUL AL XII-lea

CERCETĂRI PSIHOLOGICE PRIVITOARE LA RELAȚIILE DINTRE INTUITIV ȘI LOGIC ÎN ÎNSUȘIREA CUNOȘTINȚELOR DE GEOMETRIE

Figurile geometrice au fost frecvent utilizate în diverse cercetări psihologice în legătură cu studiul percepției, al atenției, al memoriei, al gîndirii etc. Cercetări consacrate special problemelor psihologice ale formării noțiunilor geometrice apar relativ rar.

Între lucrările efectuate de autori ruși care s-au ocupat de această problemă se menționează în primul rînd cartea lui L. Gurvici *Cum l-am învățat pe copilul meu geometria*, apărută în 1912. Gurvici a început să-l învețe pe fiul său geometria la vîrsta de 8 ani, înainte ca acesta să-și fi însușit bazele aritmeticii. Gurvici a utilizat un sistem de exerciții alcătuit de el, în care copilul trebuia să compare o linie dreaptă cu o linie curbă, perechi de linii etc. [1].

În psihologia sovietică au apărut diferite lucrări consacrate dezvoltării gîndirii geometrice a copilului în legătură cu probleme ca: orientarea spațială, relația dintre concept și imagine în însușirea cunoștințelor geometrice, aplicarea în practică a cunoștințelor geometrice etc.

Dintre lucrările mai vechi, citățm, după Iakimanskaia, studiul lui E. N. Kabanova-Meller referitor la dezvoltarea cunoașterii spațiale [2] apărut în 1934, și cel al lui Juravlev, apărut în 1940, care se ocupă de „vederea matematică" [3].

---

[1] Л. Гурвич, *Как я учил моего мальчика геометрии. Первый урок геометрии для детей.* 1912 И. С. Якиманская, *Уровень анализа, синтеза и абстракции при чтении чертежа у учащихся IУ—УIII классов* în *Вопросы психологии*, 1959, nr. 1.

[2] Е. Н. Кабанова-Меллер, *Анализ развития пространственного мышления*, în *Советская психотехника*, 1934, nr. 3, cf. И. С. Якиманская, *op. cit.*, p. 116.

[3] В. В. Журавлев, *О математическом зрении*, în *Математика в школе*, nr, 5, p. 40, cf. И. С. Якиманская *op. cit.*, p. 116.

În 1950, E. N. Kabanova-Meller publică un studiu amplu consacrat însușirii noțiunilor geometrice de către elevi în procesul de învățămînt, care are ca obiectiv principal rolul desenului în aplicarea teoremelor geometrice [1]. Se înțelege că studiind această problemă a avut în centrul atenției sale relațiile dintre imagine și concept în însușirea cunoștințelor geometrice de către elevi.

Au fost urmărite două aspecte: 1) aplicarea unor teoreme stereometrice la rezolvarea unor probleme simple pe baza unui desen dat și 2) aplicarea planului unei demonstrații învățate la desene de figuri geometrice diferite de cele utilizate în manual pentru aceeași demonstrație.

Pentru lucrarea noastră interesează în special modalitățile de interacțiune dintre imaginea intuitivă și gîndirea logică în raționamentul geometric, relevate de autoare: a) în unele cazuri, elevii prind simultan structura geometrică-intuitivă a figurii și relațiile logice dintre elementele ei. Elevii își reprezintă figura ca și cînd „imaginea și ideea s-ar mișca împreună în procesul rezolvării" [2]; b) în alte cazuri, imaginea intuitivă se formează întîi. Ea servește ca bază pentru desfășurarea raționamentului, pentru căutarea interdependențelor logice din care este constituită demonstrația; c) în a treia modalitate, reprezentarea geometrică apare ca urmare a prelucrării mintale a datelor problemei și a desfășurării lanțului de raționamente.

La elevii slabi, imaginea intuitivă, insuficient subordonată structurii conceptuale, are un efect particularizant, restrîngînd noțiunea și aplicarea ei, fixînd-o de figuri-standard.

K. Meller atrage, între altele, atenția asupra necesității, ca în procesul însușirii cunoștințelor geometrice, elevii să fie puși în situația de a confrunta, de a opune activ generalul și particularul, esențialul și neesențialul în structura figurii geometrice, de a conștientiza regula variației notelor neesențiale (spre deosebire de opinia curentă că neesențialul trebuie doar neglijat). Astfel se va forma la elevi perceperea de „a citi corect" desenul geometric.

În 1955, E. N. Kabanova-Meller a prezentat la conferința psihologilor sovietici o comunicare cu tema: „Formarea la școlari a deprinderilor de citire a planului topografic" [3].

---

[1] Е. Н. Кабанова-Меллер, *Роль чертежа в применении геометрических теорем*, Moscova, Изд. АПН РСФСР, 1950, вып. 28.

[2] *Ibidem*, p. 225.

[3] Е. Н. Кабанова-Меллер, *Формирование навыка чтения топографического плана у школьников*, în *Материалы совещания по психологии* 1—6 июля 1955, Изд. АПН РСФСР. Moscova, 1957.

În această lucrare, autoarea se ocupă de următoarele: a) Cum se modifică vederea planului topografic în cursul exercițiilor? Prin ce se exprimă automatizarea acestui proces? b) Ce procese se află la baza transferului în planul reprezentărilor, a deprinderilor de confruntare a planului topografic cu realtiatea corespunzătoare? Cercetările au confirmat rolul generalizării în transferul deprinderilor și, în special, rolul generalizării în trecerea de la acțiunile efectuate cu materialul concret la acțiunile mintale. Cercetările au confirmat de asemenea rolul acțiunilor directe și invers (Piaget) în această trecere. Cercetările au dovedit existența unei corelații între generalizarea largă și reversibilitatea operațiilor (trecerea de la perceperea planului la reprezentarea mintală a imaginii în perspectivă și invers, de la perceperea obiectului la reprezentarea a ceea ce s-ar percepe printr-o vedere de sus a acestuia). Apar însă și fenomene constînd în influențe negative exercitate de imaginile intuitive, în cazul unei insuficiente dezvoltări a reprezentărilor spațiale.

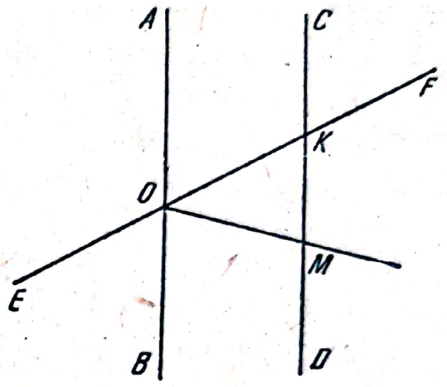


Fig. 15

La primul congres al Societății psihologilor sovietici din 1959, Kabanova-Meller a reluat problema noțiunilor geometrice în cadrul unei comunicări referitoare la formarea procedeelor de activitate mintală la elevi [1]. Pe baza unor materiale de geografie și geometrie, autoarea și-a pus problema sistematizării unor procedee analoge de activitate mintală (însușite de elevi la diferite materii de învățămînt) sub forma unor procedee largi, generalizate, care ar contribui la dezvoltarea activității intelectuale a copilului în ansamblu.

Un alt cercetător sovietic care s-a ocupat mult de însușirea noțiunilor geometrice de către elevi este V. I. Zîkova. În 1955 ea a publicat și o lucrare monografică consacrată acestei probleme [2].

Într-un studiu publicat în 1950, Zîkova s-a ocupat în special de problema sistematizării eficiente a noțiunilor geometrice [3]. Cu acest prilej,

---

[1] Е. Н. Кабанова-Меллер, *Формирование приемов умственной деятельности учащихся (на материале географии и геометрии)* în *Тезисы докладов* на I съезде Общества психологов. вып. I. Изд. АПН РСФСР, Moscova, 1959, p. 76—78.

[2] В. И. Зыкова, *Очерки психологии усвоения геометрических понятий*. Moscova, Учпед. 1955.

[3] В. И. Зыкова, *Оперирование понятиями при решении геометрических задач* în *Известия АПН РСФСР*, вып. 28, 1950.

autoarea s-a ocupat însă și de relațiile dintre elementele intuitive și cele logice în rezolvarea problemelor de geometrie. Zîkova atrage atenția asupra faptului că adeseori gîndirea elevilor din clasa a VI-a, cu care s-au făcut experimentele, este prea mult înlănțuită de intuiție, de aspectele particulare ale figurilor. Particularitățile neesențiale, dar adeseori repetate ale figurilor sînt însușite ca esențiale. Și aceasta pentru că manualele se mulțumesc cu utilizarea unor figuri-standard. În aceste condiții, intuiția, în loc să devină un sprijin, devine un obstacol în însușirea noțiunilor de geometrie.

Un loc special, în studiul lui Zîkova, îl ocupă problema sistematizării noțiunilor geometrice. Iată una dintre problemele experimentale folosite: „Dreptele paralele *AB* și *CD* sînt tăiate de dreapta *EF*. Unul dintre unghiurile interne este de 130°. *OM* este bisectoarea acestui unghi. Să să determine unghiul format de bisectoarea *OM cu dreapta CD* (fig. 15) [1].

Caracteristic pentru această problemă este faptul că dreapta OM, unică în structura imaginii, îndeplinește noțional, geometric o dublă funcțiune și este astfel inserată în două sisteme de noțiuni. Această dreaptă este și bisectoare, și secantă. Or, după cum rezultă din cercetări, tocmai această dublă raportare, necesară în cursul raționamentului, este greu realizată de copii.

În cercetările ulterioare, V. I. Zîkova s-a ocupat în special de problema relațiilor dintre cunoștințele teoretice și aplicațiile practice în însușirea geometriei. La conferința psihologilor sovietici din 1955, ea a ținut o comunicare cu tema: „Relațiile dintre cuvînt, perceperea desenului și acțiunile practice în rezolvarea problemelor de geometrie de către elevii din clasa a VI-a" [2].

Problema este reluată în articolul *Cu privire la aplicarea cunoștințelor de geometrie la rezolvarea problemelor practice* [3]. Problemele practice utilizate au fost următoarele: 1) să se determine lungimea unei bălți, 2) să se determine lățimea unui rîu.

În prealabil, elevii rezolvau la tablă problemele cu ajutorul schițelor. În aceeași etapă pregătitoare li se dădeau explicații privitoare la modul în care se efectuează măsurători pe teren cu ajutorul jaloanelor și al aparatelor de măsurat.

---

[1] В. И. Зыкова, *op. cit.*, p. 157.

[3] В. И. Зыкова, *Соотношение слова восприятия чертежа и практического действия при решении геометрических задач учащихся VI класса* în *op. cit.*, p. 458—465.

[4] В. И. Зыкова, *О применении геометрических знаний к решению практических задач*, în *Вопросы психологии* nr. 2, 1959.

Dificultățile apărute la o parte din elevi în trecerea la măsurătorile practice au luat diverse forme.

Astfel, unii dintre elevi, fără a uita principiul general de rezolvare, nu mai puteau reconstitui, în noile condiții, toate operațiile necesare. În alte cazuri însă se ajungea chiar la o destrămare totală a sistemului de acțiuni, cu pierderea sensului general al rezolvării. Uneori elevii, după ce efectuau corect, cu ajutorul jaloanelor, construcțiile necesare, uitau să măsoare aceeași lungime (situată în partea accesibilă a terenului) care corespundea dimensiunii căutate și încercau să măsoare direct lungimea respectivă (presupusă inaccesibilă).

Din modul comportării elevilor pe teren s-a putut conchide că raporturile spațiale dintre puncte și drepte în noile condiții le-au apărut altfel decît în cazul reprezentării obișnuite pe hîrtie. Faptul că la o parte din elevi sistemul de acțiuni mintale se destramă în noile condiții se explică mai ales prin nivelul scăzut de generalizare. Au rezolvat cu succes măsurătorile practice elevii care și-au însușit deprinderile practice pe baza înțelegerii ierarhizate și generalizate a mersului rezolvării problemei, înțelegere exprimată în modul cum elevii explică acțiunile ce urmează să le efectueze pe teren [1]. În general, potrivit acestor rezultate, se impune ca în predarea geometriei să se treacă dincolo de cei patru pereți ai clasei.

De problema relațiilor dintre imaginea intuitivă și noțiuni în utilizarea desenului geometric s-au ocupat și A. I. Fetisov [2], N. S. Mansurov [3] și I. S. Iakimanskaia [4]. Mansurov dovedește, prin cercetările sale, necesitatea unei bune coordonări a datelor intuitive cu elementele determinante ale formulării verbale. Dacă elevii sînt preocupați numai de imaginea intuitivă sau se fixează numai asupra unor indicații verbale, faptul acesta poate deveni o sursă de erori. Un anumit mod de a formula o chestiune, o anumită structură a desenului influențează alegerea căii de rezolvare. Neținîndu-se seama de complexul de informații logico-intuitive, această influență unilaterală poate orienta greșit rezolvarea.

Deosebit de interesantă în raport cu tema noastră este cercetarea întreprinsă de I. S. Iakimanskaia referitoare la nivelurile analizei, sinte-

---

[1] В. И. Зыкова, *op. cit.*, p. 63.

[2] А. И. Фетисов, *Формирование геометрических понятий*. Изд. АПН РСФСР, 1958. вып. 92.

[3] Н. С., Мансуров, *Влияние речевой формулировки и чертежа на выбор способа решения задачи* în *Доклады АПН РСФСР*, 1958, nr. 2,

[4] И. С. Якиманская, *Уровни анализа, синтеза и абстракции при чтении чертежа у учащихся IУ—УIII классов*, în *Вопросы психологии*, 1959, nr. 1.

zei şi abstractizării în citirea desenului geometric de către elevii claselor IV—VIII.

Problema principală pe care şi-a pus-o autoarea a fost aceea de a urmări posibilitatea elevilor de a desprinde dintr-un desen geometric (de exemplu, un triunghi echilateral în care s-au dus două bisectoare) diverse figuri aparţinînd unei categorii (de exemplu, triunghiuri). Principala dificultate pe care trebuiau s-o învingă elevii pornea din faptul că figurile aveau elemente comune sau erau parţial suprapuse. Autoarea a utilizat diverse variante experimentale (figuri diferite, instructaje diferite, probleme). „Pentru a desprinde aceste triunghiuri «penetrate» — scrie autoarea, referindu-se la una dintre variante —, analiza senzorială este subordonată celei noţionale, abstracte, deoarece pentru distingerea lor este ales criteriul «unghi comun», «latură comună» [1].

Cercetătoarea distinge trei grupe de subiecţi. În prima grupă, alcătuită în special din elevii claselor IV—V şi cîţiva din elevii claselor VI—VII, intră cei cu rezultate slabe, la aceştia detaşarea corespunzînd numai unei decupări practice a figurilor (dacă este reţinută o figură, atunci părţi ale acesteia, care aparţin şi altor figuri, nu mai sînt socotite utilizabile).

În grupa a doua, superioară, intră elevi care desprind toate sau aproape toate figurile, conform criteriului stabilit în instructaj, indiferent dacă sînt sau nu „penetrate", cu zone comune.

Subiecţii din grupa a III-a, intermediară, depăşesc analiza practică a desenului sau nu izbutesc să subordoneze integral detaşarea unei analize ghidate conceptual. De aici o serie de dificultăţi şi erori. Important este faptul că, în general, nivelul analizei se menţine acelaşi la cele trei grupe în diversele variante experimentale. Rezultatele s-au putut îmbunătăţi prin explicaţii suplimentare.

Ideea generală a lucrării care ne interesează în mod special pentru cercetarea noastră este aceea că „citirea desenului este asigurată nu numai de simpla percepere a întregului contur şi a diferitelor sale părţi, dar mai ales de participarea gîndirii, care asigură posibilitatea transformării desenului. Datele percepţiei sînt astfel tot timpul controlate şi prelucrate de gîndire. Perceperea materialului intuitiv pe care-l reprezintă desenul geometric are un caracter senzorial-logic evident. Formele interacţiunii dintre analiza, sinteza şi abstractizarea senzorială şi noţională se modifică în funcţie de etapa de rezolvare a problemelor. Aceste raporturi sînt dinamice: în unele etape ale rezolvării problemei predomină analiza senzorială (sinteza, abstractizarea), în altele cea noţională" [2].

---

[1] I. S. Iakimanskaia, *op. cit.*, p. 217.

[2] *Ibidem*, p. 125—126.

Ne vom referi acum la cercetările lui P. I. Galperin și ale colaboratorilor săi, întrucît unele dintre cercetările de bază au fost efectuate cu noțiuni geometrice, iar concepția generală a autorilor este importantă pentru stabilirea punctului nostru de vedere în aceeași problemă.

P. I. Galperin și-a expus teoria în diferite lucrări, începînd cu expunerea făcută la consfătuirea psihologilor sovietici din iulie 1952 [1]. Un referat cu aceeași temă a fost prezentat la consfătuirea din 1953 [2]. A urmat apoi comunicarea de la consfătuirea psihologilor sovietici din 1955 (despre formarea imaginilor senzoriale și a noțiunilor) [3].

În 1957 apare articolul lui Galperin în colaborare cu N. F. Talîzina, *Formarea noțiunilor elementare de geometrie pe baza operațiilor organizate ale elevilor*, în revista „Voprosî psihologhii" [4], în care sînt expuse rezultatele aplicării concepției la însușirea noțiunilor geometrice. În primul volum al lucrării *Știința psihologiei în U.R.S.S.* (1959), P. I. Galperin publică un studiu amplu în care face o expunere de ansamblu a teoriei sale (dezvoltarea cercetărilor consacrate formării acțiunilor mintale) [5].

În prezent se desfășoară în U.R.S.S. diverse cercetări și experimente didactice pe baza acestei teorii, referitoare în special la însușirea bazelor aritmeticii și gramaticii (Gheorghiev, Davîdov, Elkonin etc).

Teoria lui Galperin se încadrează în concepția marxistă generală promovată de psihologia sovietică privitoare la unitatea dintre conștiință și activitate, în relațiile dintre om și mediul exterior. Ea pornește de la teza lui Vîgotski după care formele noi, superioare, social-istorice ale activității psihice se formează, inițial, ca forme exterioare și abia după aceea devin forme interioare. A. N. Leontiev a dus mai departe această concepție. Spre deosebire de Vîgotski, care a ajuns să pună accentul în problema dezvoltării pe „interacțiunea conștiințelor", A. N. Leontiev precizează teza după care cheia înțelegerii psihicului este *activitatea omului*

---

[1] П. И. Гальперин, *Выступление на совещании по психологии в июле 1962 г.*, în *Материалы совещания по психологии*. Изд. АПН РСФСР, 1953, вып. 45.

[2] П. И. Гальперин, *Опыт изучения формирования умственных действий*, în *Доклады на совещании по психологии в июле 1953*. Изд. АПН РСФСР, 1954.

[3] П. И. Гальперин, *О формировании чувственных образов и понятий*, în *Материалы совещания по психологии 1—6 июля 1955*. Изд. АПН РСФСР, Moscova, 1957.

[4] П. И. Гальперин, Н. Ф. Талыгина, *Формирование начальных геометрических понятий на основе организованных действий учащихся*, în *Вопросы психологии*, nr. I, 1957.

[5] П. И. Гальперин, *Развитие исследований по формированию умственных действий*, în *Психоловическая наука*, СССР, т. I, АПН РСФСР, Moscova, 1959.

— activitate orientată conștient — în relațiile sale cu mediul înconjurător. Percepția, memoria, gîndirea etc., ca modalități de reflectare a realității obiective, sînt întotdeauna produse ale activității subiectului. În această activitate se stabilesc raporturi determinate între obiectele reale ale acțiunii și trebuințe, între trebuințe, motive și scopuri. Relevarea relației dintre *scop* și *motiv*, care a dus la aprofundarea conceptului de *sens al acțiunii*, a permis elaborarea unei concepții psihologice mai vaste și mai eficiente asupra naturii conștientului.

P. I. Galperin și-a propus să studieze conținutul concret al modificărilor prin care se realizează diversele formule ale activității psihice, în special reprezentările și noțiunile, pe baza activității, și în primul rînd a activității concrete, materiale cu obiectele. Cercetările lui Galperin au dus la următoarele rezultate.

1. Există o filiație legică între acțiunile exterioare, materiale și acțiunile interne, mintale. În general, acțiunile mintale se formează, se structurează pornind de la activitatea concretă a subiectului.

2. În definirea unei acțiuni trebuie să luăm în considerație următorii parametri: *a*) nivelul la care acțiunea se îndeplinește, *b*) măsura generalizării ei, *c*) complexitatea operațiilor prin care acțiunea se realizează (un număr mai mare sau mai redus de operații) și *d*) gradul de însușire al acțiunii de către subiect. Acești parametri s-au dovedit a fi relativ independenți în procesul de interiorizare al acțiunilor.

3. În cadrul teoriei lui Galperin, principalul parametru este *nivelul acțiunii*. P. I. Galperin distinge trei niveluri ale acțiunii:

a) acțiunea *materială*, adică acțiunea cu obiecte materiale, sau acțiunea *materializată*, adică acțiunea cu diverse forme de reprezentare ale acestor obiecte (scheme, diagrame, desene, machete etc.);

b) acțiunea verbală, constînd în reproducerea verbală (cu glas tare) a acțiunii respective, fără sprijin direct pe obiecte, și

c) acțiunea mintală.

Ceilalți trei parametri determină *calitatea acțiunii*: superioritatea unei acțiuni (indiferent de nivelul ei) se exprimă în gradul ei de generalizare, în economia mijloacelor prin care se realizează și în siguranța cu care este efectuată.

4) În formarea acțiunilor mintale sînt parcurse următoarele etape (avînd ca principale paliere cele trei niveluri):

a) Etapa formării reprezentării preliminare a sarcinii ce urmează a fi îndeplinită (formarea bazei de orientare a acțiunii). Dintre modalitățile de formare a bazei de orientare, cea mai bună s-a dovedit următoarea: copilul este învățat să analizeze problema nouă care i se dă spre rezolvare, în așa fel încît se desprindă punctele de sprijin și condițiile de îndeplinire a sarcinii.

Scanned with OKEN Scanner

b) Trecerea la îndeplinirea acțiunii în forma ei materială sau materializată. În această etapă, acțiunea trebuie desfășurată în așa fel, încît elevul să devină conștient de toate verigile ei, și generalizată. Prin generalizarea acțiunii, se înțelege desprinderea elementelor care sînt absolut necesare îndeplinirii acțiunii. Urmează apoi reducerea, condensarea acțiunii. Și procesul de reducere trebuie să se realizeze conștient, pentru a se păstra legătura cu formele inițiale mai complete.

c) Transferul acțiunii în planul limbajului oral, fără sprijin pe obiecte. Limbajul intervine, firește, și în etapele precedente. În această etapă însă, limbajul devine purtătorul independent al procesului. Acțiunea trebuie redată verbal nu în sensul unei simple reproduceri, ci în așa fel încît elevul să se facă înțeles de alții, de unde preocuparea pentru forma științifică a exprimării. „Acțiunea verbală se construiește ca o reflectare a acțiunii materiale — notează P. I. Galperin. Pentru aceasta, acțiunea materială se desfășoară din nou și se transferă pas cu pas pe plan verbal“ [1]. Rolul principal al acestei etape este acela de a degaja, prin abstractizare, invarianții obiectelor cu care se acționează și, în mod corespunzător, invarianții acțiunii. Transferul acțiunii pe plan mintal înseamnă nu numai exprimarea acțiunii prin limbaj, ci, în primul rînd, executarea verbală a acțiunii obiectuale. Sînt necesare și în această etapă: generalizarea multilaterală și reduceri continue, efectuate conștient.

d) Trecerea la nivelul limbajului interior. Această etapă implică o restructurare a mijloacelor de exprimare, întrucît, „în minte“, forma sonoră devine reprezentare. Totuși, în etapa aceasta, a IV-a, vorbirea pentru sine nu se deosebește încă, prin forma și conținutul său obiectual, de acțiunea la nivelul limbajului sonor.

e) Etapa finală în constituirea acțiunii intelectuale. Limbajul intern prin care se realizează acțiunea decurge automat și în general în afara limitelor autoobservației. Fragmentele verbale observabile sînt mai ales rămășițe ale „limbajului extern în minte“ [2].

În conformitate cu concepția sa, Galperin consideră noțiunile ca rezultat al acțiunilor mintale. „...Noțiunea ca imagine unitară se obține atunci cînd acțiunea pe baza căreia se formează, fiind prelucrată pe etape, devine un proces mintal generalizat, redus, automatizat și nesupus controlului conștiinței. Acțiunea intelectuală în această formă, constituie tocmai mecanismul psihologic al imaginii abstracte, mecanismul formării și existenței ei interioare“ [3].

---

[1] П. И. Гальперин, *Развитие исследований*... p. 455.
[2] *Ibidem*, p. 458.
[3] *Ibidem*, p. 456.

Scanned with OKEN Scanner

Noțiunea însă, odată constituită, nu pierde legătura cu procesele care au dus la constituirea ei. „Fiecare etapă înseamnă o formă aparte de reflectare a obiectului acțiunii și a acțiunii însăși, fiecare generalizare, fiecare reducere, fiecare grad nou de însușire înseamnă schimbări continue în cadrul fiecăreia dintre aceste forme. Treptele parcurse nu dispar ; ele formează, într-o formă restrînsă, un sistem ascendent care stă dincolo de acțiunea prezentă și care formează partea principală a conținutului său psihologic. Împletirea formelor reflectate și a formelor transformate ale acțiunii inițiale este atît de complexă, încît formează un adevărat labirint" [1].

Pe baza acestei concepții, Galperin și Talîzina au efectuat o serie de cercetări privitoare la însușirea noțiunilor geometrice de către elevi. Ei au pornit în organizarea experimentului de la ideea că operația pe baza căreia, în procesul de învățămînt, se poate forma o nouă noțiune este aplicarea caracteristicilor noțiunii la materialul dat în scopul de a stabili apartenența unei părți a acestuia la noțiunea respectivă.

Au fost urmărite în cercetări următoarele noțiuni: linia dreaptă, unghiul, bisectoarea, bisectoarea unghiului, unghiuri alăturate și adiacente, perpendiculara. Pentru a urmări relațiile dintre noțiune și imaginea intuitivă au fost utilizate patru tipuri de probleme: 1) enunțul este complet și desenul este adecvat enunțului ; 2) enunțul este complet, dar desenul nu corespunde enunțului ; 3) enunțul este incomplet, desenul este adecvat enunțului ; 4) enunțul este incomplet, dar desenul nu corespunde cu enunțul.

Pentru a se realiza însușirea noțiunii de către elevi conform cu etapele cerute de teorie, caracteristicile au fost notate pe cartonașe într-o anumită ordine, pe coloane și pe numere. La început, pentru a putea identifica noțiunea în problema dată, elevul utiliza chiar cartonașul. După însușirea acestui procedeu i se cerea subiectului să reproducă cu glas tare, din memorie, conținutul cartonașului și tot în același mod să caute aceste caracteristici în materialul propus. În sfîrșit, în ultimă etapă, subiectul realiza analiza și confruntarea mintal, dînd cu voce tare numai rezultatul.

În acest mod, noțiunile s-au format fără dificultăți și utilizarea lor la rezolvarea diverselor probleme se efectua fără greșeală. Atunci cînd nu există o corespondență dintre desen și enunț, elevii se bizuiau pe enunț. Dacă figurile erau prezentate în poziții noi, neîntîlnite anterior de elevi, aceștia recunoșteau totuși figurile prin depistarea notelor esențiale (așadar se evita fenomenul de fixare a noțiunii de figurile-standard, relevat de Zîkova și Kabanova-Meller).

---

[1] P. I. Galperin, *op. cit.*, p. 465.

În condițiile respective s-au putut deci forma noțiunile fără ca materialul utilizat la predare să fie variat, ceea ce pune într-o lumină nouă problema variației aspectelor neesențiale în cursul predării unor noi cunoștințe. Părerea că o nouă noțiune poate fi însușită fără variația exemplelor a fost combătută de o serie de psihologi sovietici (Mencinskaia și alții). În realitate, după părerea noastră, acest aspect nu este esențial în teoria lui Galperin. Cercetări ulterioare vor trebui să arate cînd și în ce condiții este necesară variația materialului intuitiv în etapele inițiale. Rolul variației nu este după cum foarte bine arată Galperin și Talîzina, acela de a permite descoperirea, ca atare, a notelor esențiale. Acestea sînt cunoscute și îi pot fi date de-a gata elevului.

Variația exemplelor (în cazul nostru, al desenului geometric folosit) este necesară pentru următoarele motive: a) familiarizarea elevului cu caracteristicile respective trebuie să constituie ea însăși o acțiune a subiectului și nu trebuie redusă la o înregistrare pasivă; b) neesențialul trebuie să devină și el obiect al conștiinței, trebuie să devină un moment al acțiunii conștiente pentru a putea fi recunoscut mai tîrziu ca atare, așa cum a arătat Kabanova-Meller; c) procesul instructiv-educativ are în vedere și dezvoltarea gîndirii independente, investigatoare a elevului. De altfel, teza lui Galperin a stîrnit multe discuții în psihologia sovietică la care au participat psihologi cu renume ca Mencinskaia, Samarin, Liublinskaia, Kabanova-Meller, Kalmîkova etc. Cadrul lucrării noastre nu ne permite să intrăm în detaliile acestei extrem de interesante dispute.

Am acordat un loc mai larg expunerii sistemului lui Galperin pentru că, după părerea noastră, domeniul la care se aplică cel mai bine este tocmai cel al noțiunilor geometrice. Dacă autorii au izbutit să formeze cu succes la subiecții lor o serie de noțiuni geometrice urmînd etapele prevăzute de teorie, punînd accentul în prima etapă pe notele esențiale și fără a insista asupra variației figurilor, aceasta s-a întîmplat, credem noi, datorită mai ales naturii speciale a entităților geometrice. Numai în structura entităților geometrice se realizează această contopire integrală a imaginii și a conceptului. Figura geometrică propriu-zisă nu dispune de alte proprietăți decît cele prevăzute de concept. Așa cum am arătat în prima parte a lucrării noastre, neesențialul și esențialul se pot separa în structura figurii cu o precizie conceptuală tocmai datorită faptului că figura este, de fapt, *concept figural*, o figură integral conceptualizată. Din această cauză, este în principiu suficient, în anumite condiții, ca notele esențiale să fie de la început clar relevate, pentru ca în baza lor figura să poată fi interpretată, determinată prin prisma conceptului corespunzător, distingîndu-se accidentalul (cum ar fi poziția) de esențial.

În alte domenii, această distincție este mult mai dificilă. E greu de presupus că un elev căruia i s-au dat toate notele mamiferelor să poate recunoaște fără alte procedee că o balenă, de pildă, aparține clasei respective.

Așadar, discutînd în principiu, putem presupune că procedeul utilizat de Galperin și Talîzina este cu atît mai adecvat, cu cît este vorba de un domeniu de legitate mai deplin separabil.

În fapt însă, pentru motivele arătate mai sus, și pentru noțiunile geometrice (mai ales dacă este vorba de însușirea unui sistem de noțiuni și nu a unor noțiuni izolate) este necesar ca baza de orientare să cuprindă și procedeul unei variații sistematice a figurilor utilizate. Faptul acesta nu afectează cîtuși de puțin ansamblul teoriei, a cărei idee esențială rămîne aceea că „acțiunea psihică constituie rezultatul transferului acțiunilor materiale exterioare în planul reflectării, în planul percepției, al reprezentărilor și al noțiunilor“ [1].

Dintre lucrările occidentale ne vom referi la două grupe de cercetări.

Cercetările lui Deschamps și Michaud (1947, 1949, 1951) s-au ocupat de evoluția, în gîndirea copiilor și adolescenților, a modului de interpretare a figurilor geometrice. În prima serie de cercetări, autorii s-au ocupat de elevi între 10 și 14 ani, iar în seria a II-a (1951) s-au ocupat de elevii mai mari de la școlile tehnice, între 14 și 18 ani.

Au fost utilizate probe de felul acesta:

1. „Să presupunem că desenați pe pămînt, în curte, două romburi; pentru a arăta că sînt la fel, transportați, în gînd, rombul al doilea și îl suprapuneți peste primul. Socotiți că rombul al doilea își schimbă sau nu forma în timp ce-l transportați în gînd? Arătați de ce credeți că-și va schimba sau nu-și va schimba forma în timpul deplasării“.

2. „Priviți un pătrat desenat pe tablă, apoi închideți ochii și nu vă mai gîndiți decît la figura geometrică. Pătratul acesta are, după părerea noastră, vreo grosime, și cam cît, s-au nu are nici o grosime? Vedeți acum un pătrat desenat pe o foaie de hîrtie și, închizînd ochii, nu vă gîndiți decît la figura geometrică. Credeți că pătratul are vreo grosime? Cît? Mai mult sau mai puțin decît înainte pe tablă? Arătați de ce credeți că are sau nu grosime“ [2].

Rezultatele cercetărilor au arătat că se poate vorbi de trei tipuri de atitudini în interpretarea figurilor geometrice.

---

[1] П. И. Гальперин, *Развитие исследований*.... p. 446.

[2] C. Deschamps et E. Michaud, *Figures géometriques vues par des jeunes techniciens* în *Enfance*, nr. 4, sept.-oct. 1951, p. 277.

a) Atitudine realistă: figurile sînt considerate ca fiind niște solide, niște obiecte concrete. De exemplu, „Pămîntul este prea moale și, dacă am să încerc să ridic rombul, se va fărîma și rombul se va distruge". Sau: „Pătratul are grosimea tablei, altfel nu poate exista" [1].

b) Atitudinea pragmatică: figurile geometrice sînt niște construcții, niște desene, exprimînd abilitatea autorului. Și în acest caz, ca și în cel precedent, egalitatea figurilor este *constatată*, nu dedusă rațional. De exemplu, „Imaginea pe care am gravat-o în spirit nu are timpul să se deformeze". Sau: „Orice trăsătură are o anumită lățime fără de care nu ar exista figura... De aceea trebuie să ne servim de instrumente care vor face o trăsătură foarte subțire..." [2].

c) Gîndire conceptuală: figurile sînt considerate ca fiind expresii intuitive ale unor concepte. De exemplu: „Triunghiul se poate schimba dar cu ajutorul gîndirii noi îl vedem întotdeauna la fel". Sau: „Dacă ar avea grosime, n-ar mai fi pătrat, ar fi paralelipiped cu baza pătrată". Sau: „Sînt la fel, pentru că, prin ipoteză, au elementele lor omologe egale" [3].

Facem o rezervă în privința termenilor folosiți. Termenii „atitudine realistă", „atitudine pragmatică" au o semnificație filozofică precisă, care îi face a fi nepotriviți pentru denumirea categoriilor respective de răspunsuri.

Luînd în considerație predominența procentuală a unuia sau altuia dintre tipurile de răspunsuri la diferite vîrste, se poate admite, în baza rezultatelor obținute, că ele reprezintă, în linii mari, trei stadii de evoluție în interpretarea figurilor geometrice. Ceea ce nu înseamnă însă că nu apar și la elevii mari, deși cu o frecvență mică, răspunsuri de tip „pragmatic" sau chiar realist.

În psihologia occidentală, contribuția cea mai bogată în domeniul formării reprezentărilor geometrice la copii a adus-o psihologul elvețian Jean Piaget, împreună cu o serie de colaboratori (Bärbel Inhelder, Alina Szeminska etc.).

Principalele rezultate sînt expuse în volumele *La représentation de l'espace chez l'enfant* [4] și *La géometrie spontanée de l'enfant* [5].

În aceste cercetări, Piaget urmează concepția sa generală privitoare la dezvoltarea inteligenței ca formă de echilibrare către care tind toate

---

[1] C. Deschamps et E. Michaud, *op. cit.*, p. 278—279.
[2] *Ibidem*, p. 280
[3] *Ibidem*, p. 282.
[4] Jean Piaget, et Bärbel Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, *PUF.*, 1948.
[5] Jean Piaget, Bärbel Inhelder, Alina Szeminska, *La géometrie spontanée de l'enfant*, PUF, 1948.

Scanned with OKEN Scanner

structurile cognitive. În concepția lui Piaget asupra inteligenței, un loc central este ocupat de conceptele *de grup* și *operație*. Introducerea noțiunii de grup în psihologia gîndirii constituie, fără îndoială, un merit deosebit al lui Piaget. Din păcate însă, în unele lucrări el a alunecat spre o interpretare idealistă, considerînd procesul de obiectivare a realului ca rezultat al asimilării lucrurilor la coordonarea integrală a acțiunilor [1].

Această poziție a lui Piaget nu apare însă în mod consecvent. În lucrări mai recente, el se apropie, cel puțin într-o serie de formulări, de teoria materialistă a cunoașterii, susținînd faptul că în cunoaștere avem de-a face cu interacțiunea dintre subiect și obiect, subiectul tinzînd să se apropie, printr-o serie de corijări și restructurări succesive (sub forma unor descentrări), de o cunoaștere cît mai adecvată a obiectului [2].

Piaget acordă un loc de prim ordin activității subiectului în procesul de cunoaștere, și în special în elaborarea abstracțiilor. Dintr-o serie de pasaje rezultă că pentru Piaget activitatea este ea însăși sursa noțiunilor. „Cu alte cuvinte — scrie Piaget —, spațiul geometric nu este un pur decalc al spațiului fizic construit o dată cu el și căruia îi corespunde multă vreme termen cu termen: abstracția formei este o veritabilă reconstrucție a acesteia, pornind de la acțiunile proprii și de la spațiul senzorial-motor, apoi mental și reprezentativ, determinat de coordonările acestor acțiuni" [3].

Piaget generalizează acest punct de vedere pentru toate noțiunile matematice. Există, arată el, două feluri de experiențe: „...experiența fizică conducînd la o abstracție a proprietăților scoase din obiectul însuși, și experiența logico-matematică, cu abstracția pornind de la acțiunile și operațiile efectuate asupra obiectului și nu pornind de la obiectul însuși [4].

Acest aspect al concepției lui Piaget este, pe drept cuvînt, criticat de către V. A. Lektorski și V. N. Sadovski (într-un studiu în care, de

---

[1] Vezi în această privință de pildă: J. Piaget, *Introduction à l'epistemologie génétique*, Paris, 1950, p. 284.

[2] Vezi, de exemplu, capitolul de concluzii la volumul *Les mecanismes perceptifs*, PUF, 1961.

[3] J. Piaget, *B. Inhälder, La représentation...*, p. 99.

În cursul unei discuții asupra acestei probleme în cadrul unei ședințe organizate de Institutul de științe pedagogice din București în 1961, l-am întrebat pe prof. Piaget ce înțelege prin această formulare „pornind de la acțiuni etc.". Trebuie să înțelegem că este vorba de independența imaginii de realitatea obiectivă? Prof. Piaget a arătat cu acest prilej că în concepția sa pornește de la interacțiunea obiect-subiect și că, în consecință, imaginile respective redau obiectul prin mijlocirea acțiunilor.

[4] J. Piaget, *Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence* în vol. *L'enseignement des mathématiques, Delachaux et Niestlé*, Paris, Neuchâtel, 1955, p. 33.

altfel, opera lui Piaget este adeseori apreciată pozitiv). „Trebuie să spunem că falsitatea acestei concepții — scriu autorii studiului — se vădește chiar în lucrările lui Piaget. În primul rînd, acesta n-a reușit să deducă întreaga dezvoltare a noțiunilor matematice din tendința pur lăuntrică a acțiunilor pe care subiectul le exercită pentru a ajunge la un echilibru reciproc. Astfel, atunci cînd analizează cum apare noțiunea de spațiu tridimesional, Piaget este nevoit să apeleze la proprietatea corespunzătoare a obiectelor exterioare ca atare, aceea că sînt tridimensionale... De aceea, atunci cînd Piaget vorbește despre experimentarea subiectului cu propriile sale acțiuni, caracterul inadecvat al terminologiei sale față de faptele atît de interesante pe care le comunică este absolut evident: în realitate, Piaget are aici de-a face cu procesul dezvăluirii de către subiect, cu ajutorul acțiunii practice exterioare, a corelațiilor matematice ale obiectelor ca atare, iar apoi cu cercetarea acestor relații pe plan teoretic [1].

J. Piaget are, fără îndoială, merite importante în dezvoltarea psihologiei gîndirii. Materialul faptic adunat este imens. El a adus o serie de vederi originale în sinteza foarte cuprinzătoare pe care a făcut-o în diverse domenii de cercetare (biologie, psihologie, logică, matematică). „Unul din aspectele cele mai pozitive ale concepției lui Piaget — scriu autorii sovietici citați — este, după părerea noastră, tendința sa netă de a lega cercetarea pur psihologică a gîndirii de principii logice și gnoseologice amănunțit elaborate“ [2]. Și mai departe: „Explicarea integrității formațiunilor intelectuale, care reprezintă un fapt constatat în psihologia experimentală, a constituit una din problemele cele mai complicate pentru nenumărate generații de psihologi. După părerea noastră, cercetările lui Piaget au determinat incontestabil pași însemnați înainte. Asemenea aspecte ale analizei psihologice ca trecerea de la acțiunile ireversibile la acțiunile reversibile și etapele formării structurilor operaționale sînt cercetate de Piaget într-un mod mult mai aprofundat decît în orice altă teorie psihologică“ [3].

În cercetările consacrate formării noțiunilor geometrice, Piaget și colaboratorii săi s-au ocupat de un mare număr de aspecte.

În primul dintre volumele amintite *(Reprezentarea spațiului la copil)*, autorii se ocupă, la început, de studiul a ceea ce ei numesc „raporturile topologice elementare“, formarea la copii a reprezentărilor despre vecinătate, continuitate, separație, formarea noțiunilor de ordine liniară și ciclică etc. A doua parte a volumului se ocupă de „spațiul proiectiv“, dreapta, perspectiva, proiecțiile (prin intermediul umbrelor), rabaterile și

---

[1] V. A. Lektorski și V. N. Sadovski, *Ideile fundamentale ale „Epistemologiei genetice“ a lui Jean Piaget*, în „Analele rom.-sov.“, seria psih. ped. 1962, nr. 1, p. 131.

[2] *Ibidem*, p. 132.

[3] *Ibidem*, p. 133.

desfășurările de suprafețe. Partea a treia a volumului se ocupă de trecerea la spațiul euclidian: transformări afine, paralelism, asemănare, orizontala și verticala, scheme topografice.

În volumul al doilea *(Geometria spontană a copilului)*, autorii se ocupă de elaborarea unor elemente fundamentale ale spațiului euclidian: conservarea și măsura lungimilor, coordonate rectangulare, unghiuri, locuri geometrice, suprafețe și volume.

În analiza rezultatelor obținute, Piaget se referă la stadiile stabilite prin cercetările anterioare privitoare la dezvoltarea gîndirii copilului: pînă la 1,6—2 ani inteligență senzorial-motoare, pînă la 4 ani gîndire simbolică și preconceptuală; pînă la 7 ani gîndire intuitivă (cu un grad mai mare de coordonare a reprezentărilor); pînă la 12 ani, stadiul operațiilor concrete (activitate mintală se desfășoară sub forma unor operații constituite în sisteme echilibrate — mobile, compozabile și reversibile — dar efectuate numai asupra unor obiecte date, reale); dincolo de 12 ani începe stadiul operațiilor formale, adică al operațiilor care se pot efectua cu ajutorul propozițiilor, fără necesitatea raportării la un fapt real.

În ceea ce privește evoluția noțiunilor geometrice, Piaget stabilește următoarele trepte. Pînă la 4-5 ani, copilul reflectă activ raporturile topologice — relații de vecinătate, separație, ordine, înfășurare, continuitate — cu neglijarea aspectelor metrice, a formelor euclidiene (este vorba nu de imaginea perceptivă ca atare, ci de utilizarea acestor elemente în confruntări cu ajutorul reprezentărilor, în desene etc). Între 5 și 7 ani intervin o serie de elemente tranzitorii. Constituirea spațiului euclidian, în același timp cu cel proectiv are loc, propriu-zis, începînd de la 7 ani o dată cu trecerea la nivelul operațiilor concrete și prezintă următoarele 3 paliere.

1. Însușirea operațiilor calitative constitutive ale diverselor noțiuni de conservare: păstrarea distanțelor și a lungimilor, a suprafețelor și a volumului interior, conservarea și congruența în cursul comparațiilor tranzitive.

2. Însușirea metricii simple: măsura lungimilor, după una, două sau trei dimensiuni, construcția sistemelor de coordonate și trecerea la măsura unghiurilor și a suprafețelor.

3. Calculul suprafețelor și al volumelor.

În cursul expunerii rezultatelor noastre ne vom referi la unele date obținute de Piaget, pentru a le compara cu ale noastre, în legătură în special cu noțiunea de punct, cu locurile geometrice și cu sistemele de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XIII-lea

PROBLEMELE ŞI TEHNICA CERCETĂRILOR NOASTRE

Consideraţiile expuse în paginile precedente privitoare la natura mixtă a entităţilor geometrice, a entităţilor numite de noi concepte figurale, au determinat şi direcţiile cercetărilor privitoare la dezvoltarea în ontogeneză a acestor formaţii mintale.

Problema esenţială era aceea de a urmări însăşi constituirea conceptelor figurale în dezvoltarea mintală a copilului, în raport cu procesul de învăţămînt, cu activitatea practică a copilului, cu dezvoltarea gîndirii sale logice.

Aspectele generale care trebuiau urmărite erau următoarele :

1. Evoluţia relaţiilor dintre reflectarea concretului material şi reflectarea abstractă, ideală, geometrică.

2. Evoluţia relaţiilor dintre imaginea intuitivă şi latura conceptuală în constituirea conceptului figural.

Cele două aspecte nu se reduc unul la celălalt, cum s-ar putea crede.

Conceptul figural este o abstracţie. El nu exprimă nici concretul primar, senzorial, nici concretul mintal, reconstituit prin gîndire, deoarece conceptul figural reflectă întotdeauna numai o latură, o proprietate a obiectelor (aspectul spaţial) şi niciodată obiectele în complexitatea lor concretă. De aceea, din punctul de vedere al psihologiei genetice, problema este aceea a trecerii de la reflectarea obiectului concret — purtător al unor însuşiri spaţiale — sau de la o imagine grafică, considerată în substanţialitatea ei, la reflectarea abstractă, ideală, geometrică a proprietăţilor spaţiale pure.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul al doilea este vorba de relaţiile dintre conceptual şi intuitiv. Desubstanţializarea nu înseamnă şi abandonarea laturii intuitive. După cum am văzut, figura geometrică, deşi este o abstracţie, cu toate însuşirile conceptului, păstrează totuşi caracterul de imagine intuitivă, dar de imagine intuitivă pur spaţială (formă pură), lipsită de atribute senzoriale.

Problema este deci aceea de a urmări cum se realizează această fuziune între conceptual şi intuitiv, fuziune în cursul căreia structura conceptuală trebuie să devină dominantă pentru a asigura esenţialitatea, generalitatea, puritatea, invarianţa entităţii respective.

De aici se nasc şi alte probleme.

Reflectarea conceptuală nu poate lua naştere şi nu se poate dezvolta decît pe baza reflectării intuitive şi a activităţii practice a copilului. Dar reflectarea intuitivă nu rămîne o reproducere pasivă a înfăţişării obiectelor. Această reflectare intuitivă este o reflectare activă, capabilă de comparaţii, analize, sinteze, generalizări implicite, ducînd la rezolvări de probleme prin mînuirea unei logici figurative, implicite.

În constituirea conceptului figural nu avem deci de-a face cu o simplă suprapunere între o imagine fără semnificaţie şi un concept fără suport. Imaginea a suferit un proces intern de organizare, dictat de rolul ei congnitiv, un proces de semantizare şi chiar de conceptualizare implicită. În cursul fuziunii cu conceptul este necesar ca această structură elementar-logică a imaginii să se expliciteze treptat, realizînd joncţiunea cu conceptul ştiinţific propriu-zis.

În cercetarea noastră vom urmări deci toate aceste relaţii şi confruntări complexe între imaginea pregeometrică şi conceptul geometric în constituirea conceptului figural.

Etapele şi tehnica cercetării. Pentru rezolvarea problemelor propuse am recurs atît la experimente individuale, cît şi la cercetări colective (în grup, pe clase), acestea din urmă dîndu-se posibilitatea unor evaluări statistice.

Primele cercetări, cu caracter preliminar, au avut loc în anii 1956 şi 1957. Acestea ne-au permis să ne precizăm teza noastră privitoare la natura psihologică a entităţilor geometrice ca formaţii mixte concepto-figurale.

În 1959, în perioada aprilie-mai, am trecut la cercetări colective sistematice pe elevi din clasele a II-a, a III-a, a IV-a a

V-a şi a VI-a, pentru fiecare nivel cîte 3 clase din 3 şcoli diferite. În clasa a II-a am avut 100 de subiecţi, în clasa a III-a 105 subiecţi, în clasa a IV-a 106 subiecţi, în clasa a V-a 80 subiecţi şi în clasa a VI-a 119 subiecţi.

În 1960 am trecut din nou la experimente individuale pe elevi din aceleaşi clase, dar din şcoli diferite şi deci cu subiecţi deosebiţi, reluînd toate chestiunile utilizate în cercetările colective.

În 1961 şi în 1962, în cursul prelucrării materialului şi al redactării, am făcut o serie de experimente individuale de control şi completare cu aceleaşi chestiuni.

Cercetarea colectivă a decurs în felul următor.

Experimentatorul anunţa pe elevi că vor trebui să răspundă la unele chestiuni de geometrie. Li se spunea de asemenea că unele dintre întrebările puse nu se referă la lucruri învăţate, dar că totuşi, dacă se vor gîndi bine, vor putea să dea un răspuns corect. Aşadar, ei trebuie să fie atenţi şi să nu se grăbească să răspundă înainte de a se fi gîndit bine.

Acolo unde nu vor găsi totuşi un răspuns, să scrie: „Nu ştiu".

După aceste indicaţii, copiii scoteau cîte o foaie de hîrtie, iar experimentatorul, servindu-se de tablă, trecea la expunerea întrebărilor. După fiecare întrebare, copiii scriau răspunsul pe foaia lor. Întrebările nu erau reproduse de copii, numai indicativul lor (reprezentat printr-o majusculă) era notat.

Au fost puse următoarele chestiuni:

A_1. „Ce este un punct ?"

A_2. „Ce este o linie dreaptă ?"

Aceste întrebări cereau, în măsura posibilului, o definiţie.

B. „Eu desenez un punct cu creta pe tablă. Voi desenaţi un punct cu creionul pe caiet. (Copiii făceau punctele.)

Acum gîndiţi-vă bine şi răspundeţi: care punct este mai mare ? Care punct este mai greu ? Sau ce credeţi despre aceste puncte ?"

Această întrebare se preta la un echivoc. Dacă copilul avea în vedere desenul ca atare, situînd deci discuţia în planul perceptiv-concret, atunci răspunsul corect era acela că punctul de pe tablă este mai mare (respectiv mai greu). Dacă însă copilul, ţinînd seama de cadrul discuţiei („vom pune întrebări de geometrie"), se gîndea la noţiunea geometrică de punct, el trebuia să arate că punctele geometrice n-au mărime şi greutate, pen-

tru că n-au dimensiuni (cu sau fără explicaţia : punctul desenat este numai semnul punctului geometric).

C. „Duc patru linii care se întîlnesc într-un punct. Punctul acesta îl notez cu (1). Duc două linii care se întîlnesc într-un punct. Pe aceasta îl notez cu (2) (fig. 16). Desenaţi şi voi la fel. Care punct este mai mare ? Care punct este mai greu ? Cele două puncte au aceeaşi formă ? Sau ce credeţi despre aceste puncte ?“

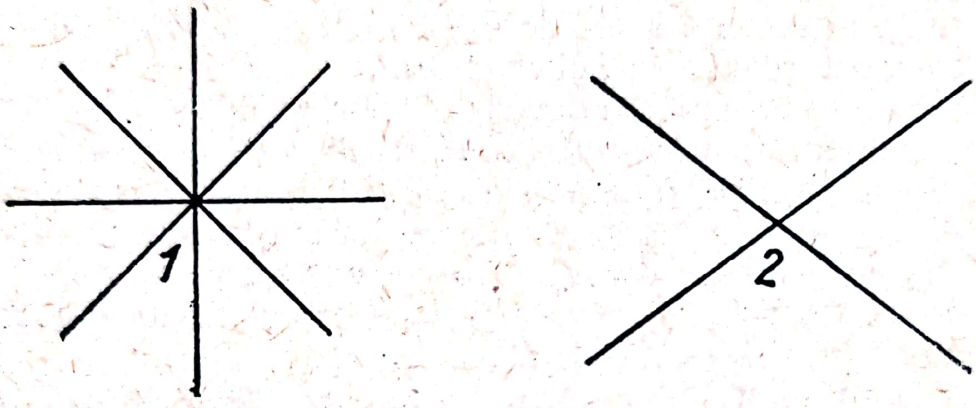


Fig. 16

De astă dată, perceptiv, punctele sînt la fel. Conflictul apare numai în planul logic, între orientarea „substanţialistă“ în interpretarea liniilor şi punctelor şi orientarea geometrică.

D. „Desenez o linie pe tablă (linie dreaptă). Cît aş putea s-o prelungesc ?“

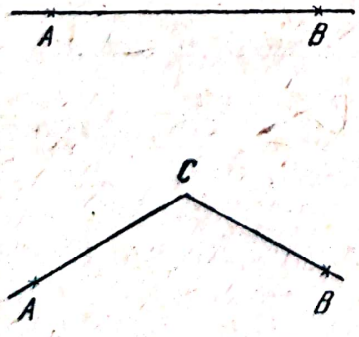


Fig. 17

Şi aici este posibil un echivoc. Linia ca realitate grafică (substanţială), nu poate fi prelungită decît pînă la marginea foii de hîrtie. Linia geometrică, însă este considerată infinită.

Această întrebare este pe de altă parte menită a ne furniza informaţii asupra formării ideii de infinit geometric.

E. Desenez pe tablă o linie dreaptă care trece prin două puncte *A*, *B*. Aş vrea să fac ca linia să treacă prin trei puncte : *A*, *C*, *B*. Oare linia s-ar putea rupe din cauza îndoirii? Explicaţi răspunsul“ (fig. 17).

Şi această întrebare vizează natura (substanţială sau abstractă) a figurii geometrice.

F. „Am două puncte, *A* şi *B* (desenez pe tablă). Mergînd în linie dreaptă de la *A* la *B*, pun multe puncte. Cîte puncte pot fi puse între *A* şi *B* ?“

Şi de astă dată ne propuneam să scoatem în evidenţă conflictul dintre o orientare concret-substanţialistă şi orientarea geometrică în interpretarea ideii de punct.

În acelaşi timp, întrebarea urma să ne furnizeze indicaţii privitoare la relaţiile dintre discret şi continuu în evoluţia gîndirii, indicaţii privitoare la formarea ideii de diviziune infinită (infinit intensiv, în comparaţie cu ideea de infinit extensiv, prin amplificarea dimensiunilor).

G. „Am două puncte *A*, *B* şi alte două puncte (mai distanţate) *C*, *D*. Unde pot fi puse mai multe puncte (mergînd în linie dreaptă): între *A* şi *B* sau între *C* şi *D* ?“

De astă dată conflictul este şi mai pregnant subliniat, între caracterul limitat al intervalului şi numărul nelimitat de puncte ce pot fi cuprinse în el.

Această întrebare trebuia să măsoare rezistenţa soluţiilor corecte, date la întrebarea precedentă, în cazul unui conflict, mai puternic subliniat, între o egalitate abstractă şi o neegalitate intuitivă.

Întrebările precedente (A,B,C,D,E,F,G) tindeau deci, în primul rînd, să scoată în evidenţă sensul real pe care-l dobîndeau în mintea copilului entităţile geometrice respective, *punctul* şi *dreapta*, în raport cu cele două direcţii principale : orientarea concret-substanţialistă, pe de o parte, şi orientarea abstractă, propriu-zis geometrică, pe de altă parte, în interpretarea figurilor respective.

Întrebările sînt astfel alese, încît, în general, cele două orientări trebuie să determine răspunsuri opuse.

Evoluţia acestor răspunsuri ne va permite deci să urmărim procesul de desubstanţializare a entităţilor geometrice în dezvoltarea gîndirii copilului.

În acelaşi timp însă, entităţile considerate pînă aici — punctul şi dreapta — există şi ca imagini intuitive. De aceea, într-o anumită măsură, ele ne vor furniza date şi în privinţa constituirii conceptelor figurale prin subordonarea imaginilor respective (treptat desubstanţializate şi idealizate) faţă de conceptele geometrice.

Scanned with OKEN Scanner

Următoarea serie de întrebări se referă în mod special la dinamica relaţiilor dintre intuitiv şi logic-conceptual în constituirea conceptelor figurale.

De astă dată nu mai avem de-a face cu direcţii de interpretare opuse, furnizînd soluţii diferite (concret-abstract), ci cu orientări convergente care trebuie să ducă la aceleaşi soluţii.

Iată aceste întrebări.

H. „Desenez o dreaptă pe tablă şi un punct A. Vreau să ajung de la punct la dreaptă, cît mai repede, pe drumul cel mai scurt. Desenaţi acest drum. După ce l-aţi desenat, gîndiţi-vă dacă mai puteţi găsi şi alte drumuri tot atît de scurte. Dacă găsiţi astfel de drumuri, desenaţi-le şi pe acestea (fig. 18).

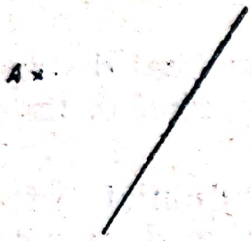


Fig. 18

Soluţia la o astfel de întrebare poate fi găsită şi pe cale intuitivă (de fapt logică-intuitivă), şi pe cale deductivă, dacă copilul are noţiunea de perpendiculară.

Cele două modalităţi de rezolvare duc la aceeaşi soluţie. Ceea ce interesează în special este procesul trecerii de la o rezolvare intuitivă, prin tatonări, la o rezolvare geometrică propriu-zisă (implicînd ideea de necesitate şi ideea de unicitate a soluţiei).

I. „Am două pătrate la fel (experimentatorul le desenează pe tablă). Desenaţi-le şi voi pe foile voastre. Ele reprezintă două terenuri egale. Pe unul se află o casă.

Vreau să construiesc o casă şi pe celelalt teren, exact în aceeaşi poziţie. Reprezentaţi printr-un punct, pe foile voastre, locul unde s-ar construi cealaltă casă. Acum explicaţi cum aţi stabilit acest loc, cum aţi măsurat pentru a-l găsi (fig. 19).

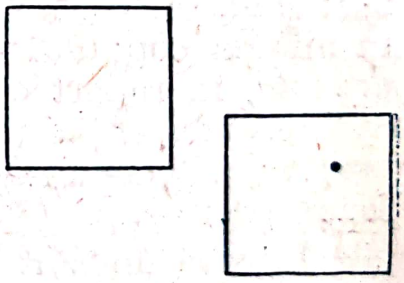


Fig. 19

E vorba aici de a urmări formarea ideii de coordonate.

Şi în acest caz problema se poate rezolva în mod direct, intuitiv, prin raportare la cadrul figural. Ceea ce interesează este procesul de explicitare şi „esenţializare“ a procedeelor utilizate, transferul operaţiei din planul perceptiv în cel concepto-figural (degajarea sistemului de coordonate).

J. „Am două puncte *A* şi *B* (experimentatorul le desenează pe tablă). Desenaţi-le şi voi în caiete. Desenaţi un alt punct

care să fie la aceeaşi depărtare de fiecare dintre cele două puncte. Mai desenaţi şi alte puncte care să fie la aceeaşi depărtare de cele două puncte *A* şi *B*. Desenaţi cît mai multe puncte de acest fel. Ce observaţi ?"

Este o problemă de loc geometric (mediatoarea segmentului de dreaptă). Ceea ce interesează în mod special în acest caz este un anumit tip de generalizare, caracteristic figurilor geometrice, în care universalul abstract (totalitatea punctelor care îndeplinesc o anumită condiţie) se exprimă integral într-o *formă*, într-o *figură*. Prin problema pusă urmărim tocmai evoluţia fuziunii între intuitiv şi conceptual în această trecere de la singular (punctul unic) la particular (cîteva puncte), la general şi la universal (totalitatea punctelor).

În experimentele individuale au fost reluate toate aceste chestiuni, bineînţeles cu posibilitatea aprofundării prin utilizarea întrebărilor suplimentare. În plus, în legătură cu cîteva chestiuni au fost utilizate şi unele variante sugerate de tema respectivă. Ele vor fi descrise împreună cu expunerea rezultatelor.

Studiul statistic este absolut necesar dacă vrem să obţinem imaginea corectă a procesului evolutiv. Fără o asemenea evaluare cantitativă nu avem posibilitatea să determinăm exact ponderea unei anumite categorii de răspunsuri în raport cu vîrsta copiilor, adică în ce măsură această categorie este sau nu caracteristică pentru vîrsta respectivă. Necunoscînd ponderea diferitelor categorii de răspunsuri în raport cu fiecare etapă de vîrstă, nu putem stabili succesiunea reală a acestor categorii, succesiune exprimînd procesul însuşi de formare a entităţilor mintale respective.

Această evaluare cantitativă, bazată pe instantanee (cercetări colective), trebuie însă completată cu cercetări individuale care ne permit să adîncim fenomenele, să pătrundem în dinamica lor internă, să urmărim desfăşurarea lor pe viu.

Aceste motive ne-au determinat să îmbinăm cercetarea colectivă, care ne-a permis să obţinem un număr relativ mare de răspunsuri într-o perioadă limitată a anului şcolar [1], cu experimente individuale.

---

[1] Încadrarea într-o perioadă relativ scurtă, limitată, din cursul anului şcolar este necesară pentru a putea stabili o legătură între răspunsurile elevilor şi cunoştinţelor ce li s-au predat. Dacă această regulă nu este respectată, lotul de cercetare va fi format din subiecţi care, deşi formal au fost recrutaţi din aceeaşi clasă (şi deci sînt socotiţi la acelaşi nivel) au fost totuşi cercetaţi, de fapt, în condiţii cu totul deosebite, în raport cu obiectivele cercetării.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XIV-lea

PUNCTUL

I. NATURA PUNCTULUI

Noţiunea matematică de punct, prin complexitatea ei, prin dificultăţile pe care le ridică înţelegerea ei corectă, este potrivită pentru a pune în evidenţă aspecte importante ale relaţiilor dintre concept şi imagine în însuşirea cunoştinţelor geometrice de către copil.

Într-adevăr, aceste relaţii sînt deosebit de complicate. În măsura în care punctul poate fi intuit — perceput sau reprezentat —, el nu este punct matematic. Punctul matematic nu posedă nici un fel de atribute perceptibile senzorial. El nu are nici măcar dimensiuni, aşa cum au celelalte figuri geometrice, şi, cu toate acestea, vorbim despre punct cum vorbim despre un obiect oarecare, considerîndu-l ca existînd într-un anumit loc, considerîndu-l a se deplasa, a se asocia cu alte figuri, a se aşeza pe vreuna dintre ele.

Am arătat în paginile precedente că dificultatea provine, în primul rînd, din faptul că, în general, avem tendinţa să substanţializăm figurile geometrice, să le considerăm imagini schematizate ale unor obiecte concrete, cînd, de fapt, ele reflectă doar proprietăţi, proprietăţi spaţiale ale lucrurilor din realitate. Punctul reflectă şi el o *proprietate* spaţială, şi anume *poziţia*, fără alte considerente. În calitate de *concept figural*, punctul posedă atributele conceptului : este o entitate abstractă, ideală etc. În acelaşi timp, punctul geometric este o entitate intuitivă, spaţială. Punctul poate fi situat pe o dreaptă, la intersecţia a două drepte, poate fi deplasat etc. Ca şi în cazul celorlalte concepte figurale, intuitivitatea punctului, constînd în spaţialitate pură, necesită atribute *senzoriale* pentru a putea fi reperată : dimensiuni, formă şi culoare. Cu dimensiunea şi forma rămînem

în cadrul geometriei, dar depăşim limitele punctului. Cu culoarea însă ne situăm complet dincolo de hotarele geometriei. Conceptualizarea punctului devine astfel un proces complex şi dificil. Gîndirea copilului se străduieşte cu greu să găsească un *modus vivendi* între puritatea conceptului şi senzorialitatea imaginii.

Dar problema prezintă şi alte aspecte, deoarece, de fapt, funcţiunile punctului sînt mai complicate chiar dacă ne menţinem în limitele matematicii. În afară de desemnarea poziţiei — rol în care punctul apare oarecum ca un element izolat (de pildă în propoziţii ca : „Prin două puncte trece o singură dreaptă“ etc.) —, punctului îi revine şi rolul de element ultim al unei diviziuni, de element component al oricărei figuri geometrice. Ce semnificaţie psihologică are această posibilitate de a se constitui o *figură* — o dreaptă, un cerc, un cub etc. — dintr-o sumedenie de puncte care, fiecare în parte, sînt de-a dreptul *nimic* sub raportul substanţei şi al dimensiunii ? Această sumedenie, această mulţime de puncte este infinită, vom răspunde. Cu alte cuvinte, dacă punctul provine din diviziunea la infinit a unei figuri, atunci avem dreptul să considerăm figura ca fiind constituită dintr-o infinitate de puncte. Dacă însă numai aceasta este explicaţia, atunci avem de-a face cu un act cu totul gratuit. „Punctul“ şi „infinitatea“ se definesc reciproc într-o simbioză tautologică. Din acest cerc vicios nu putem ieşi decît dacă ne referim la aceste concepte ca *modalităţi de reflectare a realităţii, ca elemente componente ale unui proces de cunoaştere.*

În acest context regăsim conceptele de limită şi infinit ca expresii ale dinamicii procesului mintal în determinarea datelor obiective, regăsim conceptul de putere a unei mulţimi infinite creat de Georg Cantor. Din punctul nostru de vedere, rezultatul cel mai interesant al analizei lui Cantor constă în însăşi posibilitatea de a se compara între ele mulţimile infinite printr-un *act mintal real,* printr-un act mintal ce poate fi definit în termeni riguroşi.

Or, în acest context, conceptul de punct, conceptul de infinit etc. ne apar ca fiind ceea ce sînt de fapt: momente ale mişcării dialectice, inepuizabile a gîndirii în cunoaşterea realităţii, momente care, izolate, suspendate, îşi pierd conţinutul şi apar ca ficţiuni.

Aceste considerente fac cu atît mai interesante cercetările psihologice referitoare la constituirea ontogenetică a conceptelor respective.

Cercetările lui J. Piaget. Piaget și colaboratorii săi au studiat formarea noțiunii de punct la copii în legătură cu cea de continuitate, în cadrul seriei de cercetări referitoare la raporturile topologice. „Spiritul nu sare — scrie Piaget — dintr-o dată, de la noțiunea perceptivă a continuului la schemele axiomatice care pot fi construite pentru a-l exprima, și este necesară o întreagă elaborare intelectuală pentru a se ajunge la cele două scheme complementare ale descompunerii unei linii sau suprafețe în puncte și ale recompunerii ansamblului pornind de la aceste puncte“ [1].

Această elaborare intelectuală am încercat s-o urmărim și noi, utilizînd însă unele procedee diferite de cele de care s-a servit Piaget. Rezultatele obținute ne-au determinat să ne formăm o convingere opusă celeia a lui Piaget, după care „această construcție nu este atît de dependentă de viața școlară cum s-ar crede“ [2]. J. Piaget nu a utilizat date statistice, și de aceea imaginea pe care și-o formează privitor la *etapele* de evoluție este incompletă, unilaterală, chiar dacă faptele relatate prezintă un interes real.

Ultima parte a cercetărilor consacrate raporturilor topologice se referă la noțiunile de punct și de continuitate. Cu aceste probleme ne apropiem, de fapt, de punctul de vedere al geometriei euclidiene.

Iată unele dintre tehnicele folosite de Piaget și de colaboratorii săi.

1. I se dă copilului un pătrat și el trebuie să deseneze alături „cel mai mic pătrat pe care-l poate desena“. Pe o foaie de hîrtie în formă de pătrat i se cere să deseneze „cel mai mare pătrat pe care-l poate desena“. Sensul acestei cercetări este de a dezvălui măsura în care copilul este capabil să înțeleagă o scriere de mărimi care să se cuprindă unele pe altele — cercetare evident pregătitoare pentru studiul noțiunilor de limită, punct, continuitate.

2. O altă cercetare se referă la secționarea nelimitată a unei figuri sau a unei drepte. Copilul, secționînd mereu (de pildă dihotomic, înjumătățind de fiecare dată figura obținută), ajunge la stadiul în care, grafic, operația nu mai poate fi continuată. I se spune atunci: „Tu poți face multe lucruri în gînd: dacă ai un coleg mai tare decît tine, în gînd poți totuși să-l bați chiar dacă nu-l poți învinge cu adevărat. Atunci gîndește-te că tu continui să tai bucățica aceasta mereu, fără să te oprești.

---

[1] J. Piaget și B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, PUF, 1948, p. 153.

[2] *Ibidem.*

Ce ai să capeți pînă la sfîrșit?". Dacă copilul răspunde că obține o linioară i se spune: „Foarte bine. Dar taie mai departe linioara în gînd, și pînă la urmă ce o să fie?" etc.

Dacă se ajunge astfel la noțiunea de punct se pune atunci problema formei punctului.

O altă chestiune se referă la recompunerea întregului din părțile sale: linia sau suprafața pot fi concepute de copil ca fiind constituite dintr-un ansamblu de puncte? Copilului i se cere să deseneze un șir de puncte și apoi să intercaleze între acestea alte puncte etc. Va ajunge el la concluzia că ceea ce se obține este o linie?

Rezultatele sînt interesante.

Într-o primă perioadă, care durează pînă la 7-8 ani (stadiile I și II), copilul nu izbutește dintr-o dată să ajungă la „pătratul cel mai mic" sau „cel mai mare". În ceea ce privește diviziunea liniei, ea are un caracter limitat: copilul nu înțelege sensul unei împărțiri care se continuă mereu. Ceea ce copilul consideră că se obține după cîteva diviziuni este un element admis ca ultim (deși, se înțelege, nu este), izomorf cu figura din care provine (o linioară, un pătrățel). În sfîrșit, în ceea ce privește recompunerea: linia nu este concepută ca un ansamblu de puncte. Dacă linia a fost desfăcută în puncte, ea nu mai putea fi reconstituită niciodată.

Și în aceste probe, ca și în cele folosite în celelalte cercetări, rezultatele obținute în stadiile la care ne referim se explică în primul rînd, după Piaget, prin dominația elementelor perceptive. Întrebarea „ce obținem dacă împărțim mereu?" nu are sens, deoarece ea depășește intuiția concretă și se adresează unei infinități de acțiuni posibile situate într-un plan abstract. Acțiunile acestea de divizare și recompunere au un caracter empiric, strict intuitiv; ele nu sînt încă *operații*. Tocmai de aceea nu intră în joc nici reversibilitatea nelimitată a acestei acțiuni. Or, fără această sudură totală între cele două direcții posibile ale acțiunilor (divizare-recompunere), nici întregul continuu, nici partea infinit de mică, element al întregului, nu au sens.

Cum, de pildă, s-ar putea obține o linie dintr-un șir de puncte, chiar dacă admitem că punctele provin din diviziunea liniei respective, cînd aceste puncte sînt concepute numai intuitiv, adică rotunde și deci discontinui?

În stadiul al treilea (7-8 ani pînă la 11-12 ani) apar, cum știm, după Piaget, operațiile concrete. Copilul înțelege sensul unei diviziuni care se continuă mereu (și care deci nu se oprește după două-trei acțiuni de divizare). El înțelege că întregul se poate constitui din aceste elemente — chiar foarte depărtate — ce se pot obține.

Iată un exemplu : ...Pat (8, 11) declară de la început că cel mai mic pătrat posibil este un punct.

— Un punct are vreo formă ?

— Poate să aibă multe forme: rotund, pătrat.

— Bine. Să ne gîndim la un punct pătrat. Ne putem închipui că ar mai putea fi tăiat ?

— Da. Căpătăm un punct mic de tot.

— Are vreo formă?

— Nu se vede.

— Atunci n-are formă?

— Are o formă.

. . . . . .

În legătură cu linia :

— La sfîrşit o să avem un punct.

— Va avea o formă?

— O să fie pătrat.

— Şi dacă-l tăiem ?

— Un dreptunghi.

— Şi la sfîrşit ?

— N-o să mai fie nimic.

— Dintr-o dată nimic ?

— Ba o să fie un dreptunghi mic, mic de tot.

. . . . . .

— Cîte puncte sînt într-o linie ca aceasta ?

— Multe, multe.

— Se ating ?

— Da. Dacă nu s-ar atinge n-ar forma o linie.

— Dar o să fie loc gol între două puncte ?

— Nu. Se pot pune multe, pentru că se poate pune în mijloc [1].

Exemplul citat ne arată că acţiunile mintale, deşi ajunse la stadiul de operaţii — dovadă: reciprocitatea perfectă între diviziune şi recompunere —, nu sînt totuşi în stare să depăşească planul concretului. Sîntem în stadiul operaţiilor concrete. Punctul, element final al diviziunii, are încă o formă. Alţi copii indică numere la întîmplare: 100, 200, 9 000 etc. În răspunsurile lor se simte tocmai incapacitatea de a raţiona — în terminologia lui Piaget — *„formal"*. Aceasta îi împiedică să-şi imagineze divizarea nelimitată, punctul ca element infinit de mic şi totalitatea infinită de puncte.

În stadiul al patrulea, dincolo de 11-12 ani, această condiţie se realizează. Copilul răspunde: „Imposibil să spui cîte puncte sînt". La ru-

[1] J. Piaget, *op. cit.*, p. 169.

gămintea de a desena cea mai mică linioară posibilă, copilul răspunde: „Ah nu, nu se poate, pentru că poate fi făcută oricînd mai mică".

Copilul a ajuns în stadiul în care poate să treacă dincolo de intuitiv şi să raţioneze pe baza propoziţiilor abstracte, acestea, la rîndul lor, referindu-se la operaţii concrete concepute ca posibile.

În stadiul al treilea, din cauza caracterului intuitiv-concret al operaţiilor, copilul nu putea depăşi o contradicţie latentă, continuitatea întregului şi discontinuitatea părţilor. Copilul, în stadiul al treilea, admite că linia poate proveni din puncte, dar el nu poate pricepe, de fapt, cum se întîmplă aceasta.

În stadiul al patrulea, contradicţia se rezolvă. Ajungînd la stadiul „operaţiilor formale", înţelegînd mecanismul acestei continuări nelimitate a unei acţiuni (de diviziune aici), copilul este în stare să realizeze mintal sinteza operatorie între *vecinătate şi separaţie*, sinteză care stă la baza ideii de continuu. „Ca separare intelectuală (şi nu perceptivă sau intuitivă) a unor puncte învecinate, operaţiile de divizare („partiton") îşi găsesc în continuu expresia lor generalizată şi realizează concilierea între raporturile de vecinătate şi separaţie [1].

Cercetările lui Piaget scot în evidenţă unele aspecte ale relaţiilor contradictorii dintre abstract („formal") şi intuitiv în formarea ideii de punct. Credincios însă concepţiei sale privitoare la succesiunea stadiilor mintale, Piaget nu ţine seama de rolul cunoştinţelor dobîndite de copil în relaţiile sale sociale şi, mai ales, de rolul şcolii. Aplicînd schema sa a „grupului de operaţii", el nu urmăreşte decît etapele de coordonare a celor două direcţii reversibile: descompunerea şi recompunerea.

Prin cercetările noastre, în afară de acest aspect, fără îndoială extrem de interesant, noi am încercat să punem în mod special în evidenţă *evoluţia raporturilor dintre imagine şi abstracţie în formarea ideii de punct*. Folosind spre deosebire de Piaget, date statistice, noi am putut releva faptul că nu avem de-a face cu o evoluţie spontană, ci cu interacţiunea unei serii de factori, rolul cunoştinţelor şcolare fiind extrem de important.

Problema punctului este pusă în întrebările A_1, B, C, F şi G. Pentru discuţia rezultatelor, vom lăsa A_1 (definiţia punctului) la urmă. Întrebările B şi C se referă la punct ca entitate izolată. Întrebările F şi G se referă la punct în legătură cu conceptul de continuitate.

---

[1] J. Piaget, *op. cit.*, p. 179.

Întrebarea B pune în evidenţă raporturile conflictuale între *conceptul geometric* şi *imaginea perceptivă* a punctului ca obiect concret. Întrebarea C are în vedere în special raporturi conflictuale *în planul logic* între conceptul geometric de punct şi punctul în sens obiectual.

În ceea ce priveşte întrebările F şi G, prima se referă la ideea diviziunii nelimitate a intervalului *A B* şi este axată pe contradicţia dintre caracterul limitat al intervalului (în plan perceptiv) şi infinitatea punctelor sale (în abstract); cu a doua întrebare conflictul se accentuează: cele două intervale spaţiale apar ca diferite perceptiv. Ele cuprind, totuşi, acelaşi număr de puncte: o infinitate.

În cele ce urmează vom prezenta succesiv rezultatele obţinute pentru fiecare dintre aceste chestiuni.

Comparaţia între punctul de pe tablă cu cel din caiet (B)

Întrebarea B („Comparaţi punctul de pe tablă cu cel din caietul vostru" etc.) pune copilul în faţa problemei raportului dintre realitatea materială a urmei lăsate de creion sau cretă şi noţiunea abstractă a punctului matematic.

Nu se poate vorbi de un proces „spontan" de constituire a noţiunii propriu-zise prin parcurgerea unor etape determinate. Noţiunea de punct, aşa cum am arătat, este o creaţie a gîndirii ştiinţifice, exprimînd un moment în dinamica gîndirii matematice, în procesul reflectării realităţii. Contribuţia experienţii directe a copilului şi operaţiile proprii de generalizare şi abstractizare au un rol mai mic decît în cazul constituirii altor noţiuni cu corespondent material direct.

Pe calea generalizării obişnuite, pornind de la experienţa curentă, copilul va tinde să reţină pe bună dreptate, ca fiind un punct, orice semn mic, orice pată mică. Punctul apare într-un text ca fiind un semn ortografic indicînd sfîrşitul frazei. La geografie, punctul marchează pe hartă locul unei aşezări mai mici. La aritmetică punctele servesc pentru despărţirea grupelor de cifre. Două puncte formează semnul împărţirii etc. În toate aceste cazuri, punctul nu este de loc o ficţiune. El este o realitate materială, e format dintr-o substanţă oarecare: cretă, cerneală grafit etc. Faptul că nu dăm atenţie substanţei nu înseamnă că ea nu face parte din realitatea punctului. Uneori anumite particularităţi de formă sau de culoare pot dobîndi şi ele o semnificaţie. Într-o diagramă, punctele roşii pot avea o semnificaţie şi cele negre alta.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela nr. 1

Clasa	Mărimea punctului						Greutatea punctului							Răspunsuri comune pentru mărime și greutate			
	Punctul de pe tablă este mai mare	Punctul de pe caiet este mai mare	Punctele au aceeași mărime	Punctele sînt la fel	Punctele nu au aceeași mărime	Nu răspund	Punctul de pe tablă este mai greu	Punctul de pe caiet este mai greu	Punctele au aceeași greutate	Punctele sînt la fel *	Punctele nu au greutate	Punctele nu sînt la fel	Nu răspund	Punctele sînt la fel	Punctele nu sînt la fel	Punctele n-au dimensiuni	Alte răspunsuri
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
II	38,0	5,0	12,0	28,0	—	28,0	15,0	2,0	15,0	31,0	8,0	—	43,0	16,0	1,0	—	—
III	54,3	9,5	8,7	23,9	—	9,5	23,9	6,7	9,5	24,7	5,8	—	37,1	15,2	1,9	—	0,9
IV	46,2	2,9	16,9	27,3	0,9	22,7	22,7	1,9	22,7	33,1	4,7	0,9	36,7	10,4	—	—	—
V	51,3	5,0	16,3	30,1	5,0	5,0	31,3	2,5	15,0	28,8	10,0	3,8	20,0	13,8	1,2	1,2	1,2
VI	32,8	—	13,4	31,1	—	0,8	15,1	0,8	8.4	26,1	1,7	—	21,0	17,7	4,2	23,5	7,6

* Deoarece există procente relativ mari de răspunsuri comune pentru mărime și greutate de tipul „sînt la fel", am dat în coloane separate și rezultatele totalizării răspunsurilor de tipul „sînt la fel", diferențiate pentru mărime și greutate, cu răspunsurile comune de același tip. Astfel coloana 4 totalizează procentele din coloanele 3 și 14, iar coloana 10 totalizează procentele din coloanele 9 și 14. Pentru a obține 100 % trebuie deci să adunăm cifrele din fiecare șir orizontal cu excepția celor situate în coloanele 4 și 10, pentru „mărime" separat și „greutate" separat, adăugîndu-se „răspunsurile comune".

Scanned with OKEN Scanner

Cînd este vorba de punctul geometric, de punctul euclidian, lucrurile se schimbă.

Punctul geometric nu are dimensiuni. Ca atare, el nu are substanţialitate, nu are masă etc. Aici nu mai este vorba de faptul că neglijăm, ca în orice proces de abstractizare, anumite atribute concrete, particulare ale obiectului luat în consideraţie. În cazul punctului matematic, aceste atribute *nu există*. Şi, totuşi punctul exprimă o realitate. Dacă punctul n-ar exprima o realitate obiectivă, nici distanţa dintre două puncte n-ar exprima o realitate obiectivă şi nici poziţia relativă a două sau mai multe puncte. Se înţelege că în mintea copilului toate aceste accepţiuni se interferează, predominînd cînd una, cînd alta, în funcţie de disciplinele şcolare studiate la un moment dat. Rezultatele statistice referitoare la întrebarea B sînt redate în tabelul nr. 1.

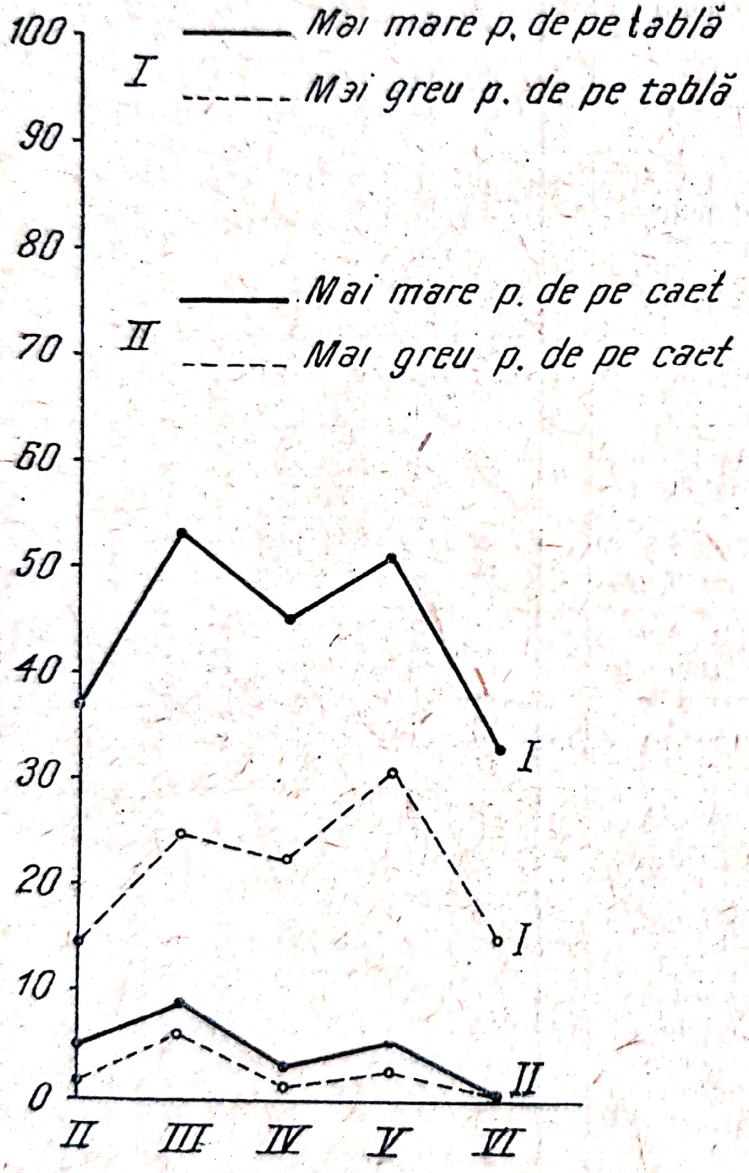


Fig. 20

Cifrele obţinute nu arată o evoluţie continuă, ci adeseori, alternări de creşteri şi scăderi de la o clasă la alta. Să ne ocupăm întîi de răspunsurile care consideră *unul dintre puncte mai mare sau mai greu*. La cifrele respective ar trebui adăugate şi cele care exprimă aceeaşi idee într-un mod mai general (cele

două puncte nu sînt la fel). Numărul acestor răspunsuri este însă foarte mic şi nu influenţează interpretarea rezultatelor.

Ne-am fi aşteptat la o scădere continuă, mai mult sau mai puţin evidentă, de la clasele mici spre clasele mari, a numărului de răspunsuri de care ne ocupăm, pe măsură deci ce creşte capacitatea de abstractizare a copilului. Un răspuns de tipul „Este mai mare punctul de pe tablă", „Este mai mare punctul de pe caiet" etc. denotă faptul că pentru subiectul respectiv cuvîntul *punct* exprimă realitatea materială a semnului făcut de cretă sau de creion şi nu conceptul geometric al punctului „fără dimensiuni".

Să urmărim cifrele cuprinse în tabela nr. 1 şi curbele alăturate. De la prima impresie este frapant faptul că numărul copiilor care afirmă că „este mai mare punctul de pe tablă" nu scade de la clasa a II-a la clasa a VI-a decît cu foarte puţin : de la 38% la 32,8%, deci numai cu 5,2%. Mai mult: scăderea este departe de a fi continuă. De la clasa a II-a la clasa a III-a, procentul creşte mult pînă la 54,3%, scade din nou la clasa a IV-a la 46,2%, creşte la clasa a V-a pînă la 51%, pentru a scădea pînă la 32,8% la clasa a VI-a.

Curba astfel obţinută prezintă două maxime; una la clasa a III-a şi alta la clasa a V-a (fig. 20).

S-ar fi putut crede că avem de-a face cu un simplu joc de cifre provocat de hazard.

Dar dacă urmărim cifrele care se referă la răspunsurile de tipul „Este mai greu punctul de pe tablă", constatăm o situaţie asemănătoare. În primul rînd, procentajul este aproape egal la clasa a II-a şi la clasa a VI-a. Forma curbei este apropiată de cea a răspunsurilor de tipul „Punctul de pe tablă este mai mare", cu creşteri şi scăderi la aceleaşi clase.

S-ar putea afirma că această concordanţă se explică simplu prin aceea că subiecţii care au susţinut că punctul de pe tablă este mai mare au susţinut că acelaşi punct este mai greu.

Dacă însă continuăm analiza, constatăm un fenomen şi mai interesant: şi curbele care reprezintă răspunsurile „Mai mare este punctul de pe caiet", „Mai greu este punctul de pe caiet" au aproximativ aceeaşi formă cu celelalte două. În acest caz nu mai este vorba de o corelaţie pe care în mod logic ar face-o acelaşi copil şi prin care s-ar putea explica variaţiile concordante ale curbelor. Răspunsurile de tipul „E mai mare punctul de pe caiet" sînt evident date de alţi copii decît cei care au optat pentru punctul de pe tablă.

Scanned with OKEN Scanner

Cum se explică această curioasă evoluţie a fenomenului, cu scăderi şi creşteri alternative ?

Prezenţa celor două vîrfuri la fiecare curbă pledează pentru teza după care evoluţia este rezultanta a doi factori deosebiţi, a căror variaţie nu este concordantă.

Într-adevăr, aşa cum spuneam, copilul însuşindu-şi noţiunea de punct, e obligat să ia în consideraţie două aspecte: pe de o parte, punctul ca realitate substanţială, obiectuală şi, pe de altă parte, punctul ca fapt geometric, exprimînd locul, plasarea, reflectare mintală care presupune un anumit nivel de dezvoltare conceptuală.

Nimeni în şcoală, cel puţin în primele clase, nu face vreo distincţie între aceste accepţii legate de funcţiunile punctului.

În felul acesta, răspunsurile copilului reprezintă rezultanta suprapunerii a două orientări deosebite, nefuzionate în înţelegerea ideii de punct: cea perceptivă şi cea abstract-conceptuală, orientări a căror pondere se schimbă, cu timpul, în raport şi cu vîrsta copilului şi cu cunoştinţele şcolare predate.

La clasa a II-a, problema care i se pune copilului — „Care punct e mai mare“ etc. — este, în cazul dat, mai ales o problemă de ordin perceptiv. Comparaţia pe care el o face se referă la cele două mici pete: cea făcută cu cretă şi cea făcută cu creionul.

Comparaţia aceasta nu este simplă, deoarece semnul făcut de cretă este situat la o distanţă mult mai mare decît cel făcut de creion pe caiet. Trebuie să intervină mecanismul compensator al perceperii dimensiunilor la diferite distanţe. Sarcina este pentru copil relativ dificilă, întrucît nu este vorba de obiecte propriu-zise, cunoscute, ci de figuri cu o mărime nedeterminată. Copilul va apela deci la experienţa sa anterioară, va face apel la imaginaţie pentru a putea răspunde.

Rezultatul este că 28% dintre copii nu răspund la chestiunea mărimii. Totuşi 38% răspund că punctul de pe tablă este mai mare, 5% că punctul de pe caiet este mai mare, iar pentru 28% dintre copii punctele sînt la fel.

Ce ne arată cifrele la clasa a III-a ?

Dacă am fi luat în consideraţie, aşa cum se procedează de obicei, o direcţie unică de evoluţie (de la intuitiv la abstract), atunci rezultatele ar apărea ca fiind lipsite de sens. Creşte foarte mult numărul copiilor pentru care punctul de pe tablă e mai mare, dar creşte şi numărul celor pentru care punctul de pe caiet este mai mare. În schimb scade numărul celor care

consideră că punctele sînt la fel; scade la jumătate şi numărul celor care nu răspund de loc. Aceste cifre nu pot fi explicate decît dacă luăm în consideraţie şi o perfecţionare de ordin perceptiv. Un număr mai mare de copii din clasa a III-a îşi dau seama de dinstincţie, iau în consideraţie deosebirea dintre cele două puncte în funcţie de modul concret în care au fost executate. Perfecţionarea este de ordin practic-perceptiv.

Problema punctelor îi apare copilului ca o chestiune referitoare la o realitate concretă, şi atît mijloacele perceptive cît şi cele logice se perfecţionează pe linia rezolvării acestui gen de probleme în evoluţia de la clasa a II-a la clasa a III-a.

Trecînd la clasa a IV-a, ce constatăm ? Procentul copiilor pentru care punctele sînt deosebite ca mărime scade din nou, în schimb creşte procentul celor pentru care sînt la fel. Dar creşte totodată şi procentul copiilor care nu răspund, întrecîndu-l chiar pe cel al copiilor din clasa a II-a care nu răspundeau la această întrebare. Cum se explică aceste date ?

Sub influenţa noilor cunoştinţe dobîndite, se ascute conflictul dintre cele două semnificaţii ale punctului: cea intuitiv-concretă şi cea matematică. Copilul *vede* punctele, le vede mai bine chiar decît cei din clasa a II-a sau a III-a, şi constată deosebirea de dimensiune. În acelaşi timp însă, cunoştinţele geometrice proaspăt dobîndite îl apropie de noua semnificaţie a punctului: intersecţie a două drepte, capătul unui segment etc., unde nu mai este vorba de dimensiuni.

Aşa se explică de ce scade procentul celor care vorbesc de o deosebire de mărime între puncte şi creşte, în schimb, procentul celor pentru care punctele sînt la fel. Dar tot aşa se explică şi situaţia curioasă a creşterii numărului de copii care se simt dezarmaţi în faţa întrebării şi nu mai răspund de loc (se ajunge din nou la 22%).

La clasa a V-a, conflictul este mai puţin acut. Cunoştinţele geometrice pentru foarte mulţi copii au devenit nişte amintiri vagi, în timp ce la alţii — mult mai puţini — s-au fixat şi s-au precizat.

Aşa se explică de ce, în mod straniu în aparenţă, la clasa a V-a creşte din nou numărul copiilor pentru care punctele sînt deosebite. Accentul revine pe aspectul perceptiv, intuitiv-concret. Desigur, de astă dată, la clasa a V-a vor fi mai puţini copii decît la clasa a III-a, cărora punctul de pe tablă li se pare mai mic decît cel de pe caiet. Acesta este rezultatul îmbunătăţirii generale a activităţii perceptive a copilului. (De aici

și o confirmare a tezei după care constanta de mărime continuă să se îmbunătățească și în această etapă).

La clasa a VI-a, din nou sub influența cunoștințelor de geometrie recent dobîndite, mai sistematice și mai adîncite decît la clasa a IV-a, dar și sub influența dezvoltării generale a gîndirii copilului, scade mult numărul celor care se situează în planul perceptiv, considerînd cele două puncte ca fiind deosebite. Dispar cu totul copiii pentru care punctul de pe caiet este mai mare, ceea ce înseamnă că și activitatea perceptivă s-a îmbunătățit. Crește cu puțin procentul copiilor pentru care punctele sînt la fel, dar în schimb apare dintr-o dată un număr mare de copii — 23,5% — care se referă la noțiunea geometrică, euclidiană, a punctului: punctele nu au dimensiuni (deci nu se pune problema mărimii).

Așadar, pentru interpretarea curbelor care ilustrează evoluția răspunsurilor la întrebarea B („Comparați punctul de pe caiet cu punctul de pe tablă" etc.), trebuie să ținem seama de următoarele : *în evoluția mintală a copilului se dezvoltă nu numai caracterul logic-abstract al gîndirii copilului, dar și activitatea sa perceptivă. Aceasta din urmă presupune nu numai o îmbunătățire a activității propriu-zise a analizatorilor, dar și o intervenție mai eficientă a gîndirii. În cunoașterea unor aspecte ale realității este posibil ca cele două direcții de evoluție, în anumite etape ale ontogenezei, să se favorizeze reciproc, în altele, dimpotrivă, să intre în conflict. Așa se întîmplă în cazul constituirii noțiunii de punct, unde au loc alternativ fenomene de sumație și interferență, ceea ce determină oscilațiile datelor numerice și aspectul sinusoidal al curbelor.*

Pentru interpretarea acestor oscilații trebuie să avem în vedere faptul că, în acest conflict, semnificația concretă a imaginii perceptive și semnificația ei geometrică sînt favorizate fiecare de factori distincți și totuși interdependenți : a) dezvoltarea capacității perceptive care favorizează distingerea celor două puncte, dezvoltare dependentă însă de dezvoltarea gîndirii și de activitatea școlară, b) dezvoltarea intelectuală a copilului, care sub influența cunoștințelor școlare favorizează înțelegerea semnificației geometrice a imaginii, dar care în același timp favorizează activitatea perceptivă, și, în sfîrșit, c) rolul direct al cunoștințelor școlare, care, așa cum s-a văzut, influențează orientarea copilului, făcînd să crească fie ponderea semnificației geometrice, fie aceea a semnificației concrete a imaginii punctului.

★

Să ne ocupăm acum de răspunsurile obținute în legătură cu „greutatea" punctelor.

Prima observație de ansamblu: numărul copiilor care se referă la „greutatea" punctelor este mult mai mic față de al celor care se referă în răspunsurile lor la „mărimea" punctelor. Lucrul acesta se vede și din numărul celor care nu răspund la această chestiune, ca și din al celor care remarcă deosebirea dintre puncte. Singurele coloane în care cifrele sînt mai apropiate sînt cele ale răspunsurilor de tipul „la fel". Explicația este simplă. Chiar considerînd punctele sub raport concret-perceptiv, copiilor li se pare dificil să accepte că acestea ar putea avea o greutate, mult mai dificil decît să-și pună problema mărimii. În procesul acesta al „desubstanțializării" punctului pînă la constituirea noțiunii geometrice de punct, „greutatea", ca însușire concretă, este mai ușor eliminată.

Dar trebuie să fie limpede, dacă ținem seama de ansamblul datelor, că și în acest proces nu este vorba de o unică direcție de evoluție de la sensul concret la cel abstract al punctului.

Faptul că un copil nu răspunde la problema greutății punctului sau răspunde explicit că punctul nu are greutate poate avea două semnificații fundamental deosebite.

Prima semnificație: copilul nu poate accepta că „ceva" atît de mic poate cîntări, poate avea greutate. Obiectele foarte mici, incapabile să creeze kinestezic-tactil impresia de greutate, sînt considerate ușoare sau pur și simplu lipsite de greutate. Pentru ca un copil să ajungă să înțeleagă că și în aceste cazuri problema greutății se pune, e nevoie de un anumit nivel de dezvoltare a capacității sale de abstractizare și generalizare, de o serie de cunoștințe științifice elementare.

Așadar, chiar situînd discuția punctului în planul concret-perceptiv este necesară participarea unor considerații logice la un nivel destul de ridicat, pentru ca chiar în planul respectiv răspunsul să fie corect.

Așa se explică de ce procentul copiilor care consideră punctele ca inegale în greutate este mic în clasa a II-a — 15% — și crește în clasa a III-a pînă la 23,9% (în loc să scadă, cum s-ar fi putut crede), evoluție analogă cu cea referitoare la mărimea punctului și exprimînd același progres nu pur perceptiv, ci logic-perceptiv în reflectarea realității.

La clasa a IV-a, ca și în problema mărimii, curba înregistrează o scădere. Este vorba și în acest caz de influența exer-

citată de noile cunoştinţe de geometrie, care vin în contradicţie cu experienţa senzorială a copilului.

Faptul cel mai important pentru dezvoltarea mintală a copilului este însă acela că la clasa a V-a se înregistrează o nouă creştere, curba atingînd nivelul maxim al întregii evoluţii. Aceasta este o confirmare a faptului că îmbunătăţirea indicilor (în raport cu însuşirea semnificaţiei geometrice a noţiunii de punct) la clasa a IV-a nu este pentru majoritatea copiilor expresia reală a evoluţiei lor mintale, ci doar o modificare de suprafaţă determinată de cunoştinţele predate în şcoală la un moment dat.

Faptul că în clasa a V-a acceptarea „greutăţii" punctului atinge cifrele cele mai înalte denotă că evoluţia de fond pentru cei mai mulţi copii este puţin influenţată de aceste cunoştinţe dobîndite în clasa a IV-a.

La clasa a VI-a, curbele respective scad din nou mult, de astă dată ca urmare a cunoştinţelor sistematice de geometrie dobîndite de copil în clasa respectivă. Procentul copiilor care socotesc mai greu punctul de pe tablă scade la 15,1%, iar al celor care socotesc mai greu punctul de pe caiet la 0,8% (un singur copil din 119).

Numărul copiilor care socotesc că punctele sînt „la fel" scade de asemenea la 26,1% (8,4% + 17,7%), dar aceasta numai pentru că apare, dintr-o dată, după cum rezultă din tabelul nr. 1, procentul relativ mare de copii (23,5%) care oferă soluţia corectă la ambele probleme (mărime şi greutate): punctul nu are dimensiuni.

Celelalte coloane (răspunsurile de tipul: „Punctele sînt la fel" şi „Punctele nu sînt grele, nu au greutate)" confirmă raţionamentul nostru. Semnificaţia acestor răspunsuri se schimbă de la o clasă la alta. Altfel ar fi imposibil să explicăm variaţiile pe care le-am înregistrat.

Procentul copiilor care consideră că punctele „sînt la fel" scade de la clasa a II-a la clasa a III-a şi nu urcă, după cum ar fi cerut evoluţia generală a gîndirii copilului dacă semnificaţiile ar fi rămas aceleaşi. Pentru copilul de clasa a II-a, aşa cum am arătat şi în cazul „mărimii" punctului, nu este vorba decît de o indistincţie perceptivă, dar şi cu ecou în planul logic. Numai aşa se poate explica scăderea înregistrată la clasa a III-a a procentului de răspunsuri de tipul „Sînt la fel".

Dar în acelaşi timp începe să-şi facă loc, mai ales începînd din clasa a IV-a, ideea identităţii punctelor geometrice. Maxima

înregistrată la clasa a IV-a arată că la acest nivel, sub influenţa cunoştinţelor geometrice, cele două tendinţe se sumează. Copilului din clasa a IV-a îi vine încă greu să admită că punctele au o greutate, care poate fi deosebită de la un punct la altul. În acelaşi timp, el află la geometrie despre „punctul geometric" cu semnificaţia respectivă (fie că explicit i se arată că nu are dimensiuni, fie că acest lucru rezultă indirect din utilizarea noţiunii).

De ce n-am presupune că este vorba de o schimbare radicală de semnificaţie la această clasă sub influenţa cunoştinţelor geometrice şi nu de o suprapunere de semnificaţii ?

Să urmărim, înainte de a răspunde la această chestiune, coloana răspunsurilor de tipul „Nu are greutate".

Şi aici pare stranie scăderea înregistrată de la clasa a II-a la clasa a III-a. Un răspuns de tipul „Punctul nu e greu", sau „Punctul nu are greutate" pare un răspuns de nivel superior, şi coloana respectivă ar trebui să înregistreze o creştere continuă. Dar acest lucru nu se întîmplă. Procentajul scade la clasa a III-a şi la clasa a IV-a.

De fapt este vorba de schimbarea despre care am vorbit cu privire la semnificaţia prezenţei sau absenţei greutăţii punctului. La clasele a II-a şi a III-a, un răspuns de tipul „Punctul nu are greutate", „Punctul nu e greu" nu exprimă, aşa cum am fi tentaţi să credem, o particularitate a punctului geometric lipsit de dimensiuni, ci cu totul altceva, şi anume, după cum am mai arătat, dificultatea copilului de a extinde pe cale logică noţiunea de greutate şi la asemenea obiecte minuscule.

Faptul că la clasa a IV-a nu înregistrăm o creştere a numărului de răspunsuri de acest gen arată că încă nu se poate vorbi de o restructurare radicală a semnificaţiei la această clasă (ceea ce s-ar fi oglindit tocmai într-o asemenea creştere pe noile baze).

Situaţia reală constă, după cum spuneam, mai mult într-o suprapunere a celor două tendinţe: cea veche, a punctului care nu poate avea greutate fiind mic (tendinţa care e în regres), şi cea nouă, a punctului geometric care nu are greutate prin natura lui, prin definiţie. Această situaţie confuză se exprimă cel mai bine în răspunsurile de tipul „Sînt la fel", a căror maximă este înregistrată la această clasă.

Asemenea asocieri de semnificaţii vom mai întîlni şi în legătură cu alte probleme. Ele reprezintă adevărate fenomene de *simbioză mintală* între motivaţii primare, în fond necores-

punzătoare şi totuşi menţinute, la care s-au asociat alte motivaţii noi (a căror sursă este mai ales procesul didactic), aparţinînd unui stadiu superior de evoluţie. Sau, cu alte cuvinte, noua motivaţie corectă este susţinută de o motivaţie veche, depăşită, prin faptul că, deşi deosebite (şi aparţinînd chiar unor perspective contradictorii), ele susţin aceeaşi afirmaţie. În concepţia lui Leontiev asupra relaţiilor dintre semnificaţie şi sens [1] putem spune că afirmaţia a cărei semnificaţie este absenţa greutăţii punctelor este susţinută de două sensuri deosebite care coincid temporar.

La clasa a V-a constatăm un fenomen foarte interesant. Procentul copiilor care consideră că punctele sînt la fel scade. Scade mult şi procentul copiilor care nu răspund. În schimb creşte, pe de o parte, mult procentul celor pentru care punctele sînt deosebite ca greutate. Dar creşte mult şi procentul subiecţilor pentru care „punctele nu au greutate". Situaţia este, aparent, contradictorie.

Aceasta înseamnă că, în anul care s-a scurs de cînd li s-au predat copiilor cele cîteva cunoştinţe de geometrie, cele două semnificaţii, în fond contradictorii încep să se separe şi să se precizeze.

Pentru mulţi copii din clasa a V-a, aşa am mai spus, cunoştinţele de geometrie au devenit amintiri vagi. Dar în cunoaşterea concretă a realităţii obiective, a realităţii direct percepute, aceşti copii au progresat. Nu este vorba numai de o dezvoltare a analizatorilor, nici numai a gîndirii logice, ci a ambelor aspecte. Cunoaşterea intuitiv-concretă a acestor copii este superioară celor mai mici decît ei, mai ales pentru că sistemul de cunoştinţe şi mijloacele logice-abstracte sînt superioare. În această etapă, un număr mai mare de copii decît în clasa precedentă a ajuns să înţeleagă, mai ales pe considerente logice, faptul destul de delicat că şi micul semn făcut cu creionul sau creta poate cîntări, poate avea greutate.

Dar tot în această etapă găsim ceva mai mulţi copii decît în clasa precedentă, care şi-au adîncit, şi-au fixat cunoştinţele respective datorită unor mijloace intelectuale superioare şi răspund că punctul „nu are greutate". Ţinînd seama de ansamblul răspunsurilor dobîndite la această vîrstă — la clasa a V-a —,

[1] Vezi A. N. Leontiev, *Probleme psihologice ale atitudinii conştiente în învăţare*, în *Probleme de psihologia înţelegerii*, Edit. de stat, 1955.

constatăm că numărul acestor copii rămîne încă foarte mic, 10%. Tendința principală rămîne progresul în sensul cunoașterii intuitiv-concrete.

Rezumînd analiza datelor obținute pînă aici, putem conchide.

Întrebarea „Comparați punctul de pe tablă cu cele din caiet" etc. pune în evidență conflictul care ia naștere la copii între imaginea senzorială a punctului și semnificația sa geometrică. Acest conflict este alimentat de tendințele însești ale dezvoltării psihice a copilului.

Cercetările noastre ne arată că schema evolutivă concret-abstract este simplificatoare și insuficientă. În realitate, după cum rezultă din aceste cercetări, capacitatea de reflectare evoluează între 8 și 12 ani înspre o cunoaștere din ce în ce mai multilaterală, mai bogată, mai exactă a complexității concretului obiectiv. Sub acest raport, dezvoltarea analizatorilor și dezvoltarea procedeelor logice se condiționează și se sprijină reciproc. Progresul procedeelor logice, al elementelor categoriale este subordonat acestei direcții de evoluție.

În cazul entităților geometrice, în speță în cazul punctului — unde avem de-a face cu formații mixte conceptualo-intuitive — cîtă vreme conceptul figural propriu-zis nu s-a constituit, cele două aspecte ale evoluției, cel logico-conceptual și cel perceptiv, intră adeseori în conflict, disputîndu-și supremația. Rezultanta, a cărei evoluție sinusoidală am constatat-o, va fi dependentă atît de gradul dezvoltării intelectuale generale a copilului, cît și de cunoștințele școlare însușite în fiecare etapă.

Întrebarea „Comparați cele două puncte de intersecție" etc. (C).

Întrebarea aceasta este numai aparent de același gen cu întrebarea precedentă (B). De fapt, problemele sînt de ordin diferit.

În cazul întrebării B, conflictul principal apare între planul logic-abstract și cel perceptiv-concret. Două obiecte de natură și de dimensiuni deosebite — pata de cretă și semnul de creion — trebuie considerate ca simbolizînd din punct de vedere matematic două realități identice: punctul geometric.

În cazul întrebării C, diferența dintre cele două puncte — cel situat la intersecția a două drepte și cel situat la intersecția a 4 drepte — nu se manifestă perceptiv, chiar dacă punctele sînt considerate ca realități concrete. Punctul 1 nu apare ca

fiind mai mare şi nici greutatea nu poate fi stabilită senzorial, direct. Deosebirea dintre puncte, considerate ca realităţi concrete, este aici o problemă de ordin logic. Numai prin raţionament se poate conchide că punctul 1, perceptiv identic cu punctul 2, cumulează mai multă substanţă decît punctul 2.

Conflictul în cazul întrebării C se desfăşoară în planul logic şi nu între cel perceptiv şi cel logic, ca în cazul întrebării B (deşi în ambele cazuri, conflictul este între sensul abstract şi cel concret al punctului).

Este deci de presupus că evoluţia răspunsurilor la întrebarea C va fi alta decît evoluţia răspunsurilor la întrebarea B.

Dar mai intervine un fapt. Pentru ca lucrurile să se desfăşoare aşa cum am arătat, este necesar ca subiectul să fie capabil să disocieze, din complexul figurii percepute, *punctul* integrat de fapt, perceptiv, în complexul respectiv.

În întrebarea B, punctul este dat izolat şi problema aceasta nu se pune pentru percepţie.

În întrebarea C însă, punctul aparţine unei imagini mai complexe: sistemul de linii. Acestea fiind premisele, să urmărim acum rezultatele obţinute (tabela nr. 2).

1. Începînd de la clasa a III-a, procentul copiilor care răspund la chestiunea greutăţii punctului este mai mic decît al celor care răspund la chestiunea mărimii. Acest fapt concordă cu cele indicate în tabela nr. 1 şi confirmă explicaţia noastră, după care, în genere, problema „greutăţii" la acest „obiect" minuscul e mai greu înţeleasă de către copii.

Dar, spre deosebire de întrebarea B, acest lucru nu e valabil la clasa a II-a. La clasa a II-a avem un procent mult mai mare de copii care se referă la greutatea punctului decît procentul copiilor care se referă la mărimea punctului.

Această situaţie curioasă se explică dacă ţinem seama de condiţiile problemei.

Pentru cei mai mulţi dintre copiii din clasa a II-a, dificultatea este în primul rînd de ordin perceptiv. Izolarea punctului este, cum spuneam, greu de realizat. Copiii tind să introducă în comparaţia lor, conştient sau fără să-şi dea seama, imaginea integrală a sistemului de linii. În acest caz, „obiectul" format din patru linii apare ca fiind mai greu decît cel format din două linii. Noţiunea de mărime însă e mult mai greu de folosit în acest caz, pentru că figurile nu au un contur care să le delimiteze suprafaţa (aşa cum sînt obişnuiţi copiii cînd este vorba de obiecte uzuale).

Scanned with OKEN Scanner

Tabela nr. 2

Clasa	Mărimea punctului						Greutatea punctului							Forma punctului				Răspunsuri comune		
	Mai mare punctul (1)	Mai mare punctul (2)	Punctele sînt la fel	Punctele nu sînt la fel	Alte răspunsuri	Nu răspund	Mai greu punctul (1)	Mai greu punctul (2)	Punctele sînt la fel	Punctele nu sînt la fel	Punctele nu cîntăresc, nu au greutate	Alte răspunsuri	Nu răspund	Punctele nu sînt la fel	Punctele sînt la fel	Alte răspunsuri	Nu răspund	Punctele nu sînt la fel	Punctele sînt la fel	Punctul nu are dimensiuni
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
II	13,0	6,0	7,0	2,0	—	68,0	36,0	4,0	5,0	—	1,0	—	50,0	46,0	14,0	—	35	—	4	—
III	45,7	7,6	2,9	—	—	40,0	28,6	0,9	—	—	3,9	—	62,8	58,0	5,8	—	32,4	0,9	2,9	—
IV	50,9	5,7	27,3	2,9	0,9	12,3	36,8	0,9	33,9	4,7	3,8	—	19,9	53,7	34,9	0,9	10,5	—	—	—
V	40,0	3,8	28,8	5,0	—	20,0	27,5	5,0	27,5	6,3	5,0	2,5	23,8	51,3	37,5	1,3	7,5	1,2	—	1,2
VI	21,0	1,7	45,4	5,9	0,8	7,5	11,8	0,8	36,1	5,1	5,9	—	22,7	21,0	34,4	13,5*	13,5	0,8	12,6	4,2

* Se referă la răspunsuri de tipul „Punctul n-are formă".

Scanned with OKEN Scanner

Începînd din clasa a III-a însă, lucrurile se schimbă.

Pe de o parte, izolarea punctului din complexul figurii se realizează cu mai mult succes (deşi, cum vedem, procesul este încă în curs de desfăşurare).

Pe de altă parte, considerentele logice, operînd însă cu semnificaţia concretă a punctului, încep să intervină într-o măsură mai mare.

Efectul este, în primul rînd, răsturnarea raporturilor.

Apare dintr-o dată la clasa a III-a un număr mare de copii care îşi pun problema deosebirii de mărime, dintre care cei mai mulţi, cum e şi firesc, vor considera punctul format de cele patru linii ca fiind mai mare..

Această creştere bruscă se explică prin intervenţia considerentului logic: „Punctul cu patru linii trebuie să fie mai mare decît punctul cu două linii" considerent susţinut de insuficienta degajare a punctului din complexul figural.

Dacă aşa se explică creşterea procentului copiilor care se ocupă de „mărimea" punctului, ar urma ca şi pentru „greutate" să înregistrăm o creştere concomitentă la clasa a III-a.

Acest lucru însă nu se întîmplă. Dimpotrivă, la clasa a III-a, procentul copiilor care se ocupă de greutatea punctului scade, iar rezultatul este, cum am spus, o inversare a raporturilor. La clasa a III-a, spre deosebire de clasa a II-a, sînt mai puţini copii care se ocupă de greutatea punctului decît de mărimea punctului.

Cum se explică această evoluţie paradoxală? În realitate, pe măsură ce punctul se degajă din complexul figural în care este prins, pe măsură ce „domeniul", lui se restrînge şi se precizează la dimensiuni minime, creşte şi dificultatea copilului de a-l imagina „greu".

Dificultatea pe care am remarcat-o atunci cînd a fost vorba de comparaţia unor puncte izolate — cel de pe tablă şi cel de pe caiet — nu se dezvăluie în cazul problemei intersecţiilor pe care o discutăm acum decît pe măsură ce punctul însuşi se delimitează treptat în structura perceptivă în care este prins şi poate fi considerat izolat.

De fapt însă procesul acesta este mai lent decît ne-am fi aşteptat. Faptul acesta este atestat în primul rînd de procentele din coloana în care, referitor la formă, sînt înregistrate răspunsurile de tipul „Nu sînt la fel" (58,0%). Aceste procente sînt foarte ridicate, cele mai ridicate din întregul tabel, prezentînd

o maximă la clasa a III-a, dar nereducîndu-se mai masiv decît la clasa a VI-a.

După cum vom vedea mai departe, considerentele privitoare la forme determinate ale punctului (rotund, lunguieţ etc.) apar la toate clasele.

Aşadar, reţinem că procesul restrîngerii punctului, în cadrul complexului figural, la dimensiuni minime se produce lent, avînd de înfruntat în primul rînd dificultăţi de ordin perceptiv, Chiar atunci cînd copilul a izbutit să degaje oarecum punctul ca intersecţie, ca element comun, ca „legătură" între linii, acest mic semn mai este uneori prevăzut cu „braţe", cu „unghiuri" etc.

În acelaşi timp, pe măsură ce înaintăm în vîrstă, contradicţiile de ordin logic se ascut.

Pe de o parte, deşi perceptiv punctul se limitează treptat, considerente de ordin logic vor pleda în favoarea unor diferenţe de greutate. Chiar dacă punctul 1 nu este *văzut* mai mare, el trebuie să fie *considerat* mai mare pentru că e format din mai multe linii. Sau, chiar dacă punctul nu e văzut mai mare şi nici nu e considerat mai mare (acest lucru nu e logic necesar dacă ne imaginăm că la intersecţie părţile comune ale liniilor se suprapun, dar nu se adaugă în extensie), el trebuie să fie mai greu, pentru că aparţine unui număr mai mare de linii.

Dar pe măsură ce copilul devine capabil să construiască astfel de raţionamente, el este împins şi către concluzia contrară, datorită cunoştinţelor de geometrie dobîndite şi care, şi acestea, beneficiază de dezvoltarea intelectuală generală a copilului.

Rezultatul este apariţia unui şir întreg de răspunsuri curioase, contradictorii, chiar şi la mulţi copii din clasa a VI-a.

Urmărind procentele la cele trei categorii de răspunsuri, constatăm următoarele.

Frecvenţa răspunsurilor exprimînd ideea unei deosebiri de mărime între cele două puncte de intersecţie atinge un maxim la clasa a IV-a, după care procentele scad la clasa a V-a şi la clasa a VI-a.

Dificultatea explicării acestei forme a curbei creşte dacă ţinem seama de faptul că în tabela nr. 1 procentele răspunsurilor care exprimau deosebirile de mărime şi de greutate înregistrau o scădere la clasa a IV-a, după care la clasa a V-a creşteau din nou. Scăderea la clasa a IV-a şi creşterea la clasa

a V-a pentru răspunsurile la întrebarea B o explicasem ţinînd seama de cunoştinţele de geometrie dobîndite de copii la clasa a IV-a, al căror efect scade, din cauza uitării, la mulţi copii în clasa a V-a.

Pentru a găsi explicaţia evoluţiei procentajelor la întrebarea C, trebuie să ne referim din nou la condiţiile diferite ale celor două probleme puse copiilor.

În cazul întrebării B, deosebirea dintre cele două puncte — cel de pe tablă şi cel de pe caiet — este evidentă şi se impune net, cît timp problema rămîne în planul concret-perceptiv.

Sînt aici deosebiri reale de substanţă, dimensiuni, culoare. Pentru a afirma că cele două puncte sînt la fel împotriva evidenţei intuitive (după ce s-a trecut de stadiul unei indistincţii primare), nu este necesară o perfecţionare de ordin perceptiv şi nici de ordin logic general, ci, mai ales, este necesară prezenţa cunoştinţelor geometrice ca atare.

Cînd este vorba însă de intersecţia liniilor, lucrurile se schimbă. Aici perfecţionarea activităţii perceptive, ducînd, cum am văzut, la o degajare treptată a punctului din complexul figural, favorizează identificarea celor două puncte.

Considerentele logice pot duce la două concluzii opuse, în funcţie de contextul în care se plasează. În cazul în care copilul consideră liniile în substanţialitatea lor, atunci se ajunge, pe cale logică, la concluzia că cele două puncte se deosebesc. Dacă însă copilul, pe baza cunoştinţelor de geometrie, consideră liniile ca figurări ale unor abstracţii, ca avînd o unică dimensiune, atunci el va ajunge, *tot pe cale logică,* la concluzia că cele două puncte nu se deosebesc.

De aici rezultă modificările extrem de complexe pe care le constatăm în tabela C (comparativ cu tabela B), în trecerea de la clasa a III-a la a IV-a şi de la clasa a IV-a la clasa a V-a.

După cum am văzut, la clasa a IV-a scade procentul celor care consideră că punctul de pe tablă şi cel de pe caiet se deosebesc (întrebarea B) atît în ceea ce priveşte mărimea, cît şi în ceea ce priveşte greutatea. În acelaşi timp creşte procentul copiilor care consideră cele două puncte ca fiind la fel. Lucrul acesta l-am pus pe seama acumulării de cunoştinţe geometrice. La întrebarea C însă creşte procentul copiilor care consideră cele două puncte de intersecţie ca fiind deosebite. În acelaşi timp însă, tot la clasa a IV-a creşte, dar într-o măsură mult mai mare, procentul copiilor care consideră cele două puncte de intersecţie ca fiind „la fel". Ca urmare, la între-

barea C avem un număr mult mai mic de copii care nu răspund de loc.

Dacă ne-am referi numai la răspunsurile de tipul „Sînt la fel" în ceea ce privește „mărimea" și „greutatea", atunci rezultatele la clasa a IV-a pot fi în general considerate ca fiind concordante la cele două întrebări și ar fi suficient, pentru a explica această îmbunătățire, să ne referim la noile cunoștințe de geometrie însușite de copii în clasa a IV-a. Cum putem însă explica creșterea concomitentă tot la clasa a IV-a a procentului copiilor care consideră cele două puncte de intersecție ca deosebite în ceea ce privește „mărimea" și „greutatea" (în opoziție cu ceea ce am constatat la întrebarea B) ?

Să reținem, înainte de a trece mai departe, creșterea evidentă, masivă de la clasa a III-a la a IV-a a subiecților care consideră cele două puncte de intersecție ca fiind „la fel".

Pentru „mărime", saltul este de la 2,9 la 27,3, pentru „greutate" de la 0 la 33,9, iar pentru „formă" de la 5,8 la 34,9. Am putea adăuga, la fiecare dintre procentele clasei a III-a, și procentul 2,9 de răspunsuri comune de tipul „Sînt la fel", ceea ce însă n-ar aduce o schimbare importantă. Dat fiind că este vorba de un salt atît de masiv, dat fiind că este vorba atît de „greutate", unde primează considerentele de ordin logic, cît și de formă, unde primează cele de ordin perceptiv, putem considera că acest salt exprimă fuziunea unor ameliorări importante, care au loc atît pe plan perceptiv, cît și pe plan logic.

Pe de o parte, trebuie să contăm pe progresul unui număr de copii în ceea ce privește capacitatea de degajare a punctului din complexul perceptiv, ceea ce favorizează răspunsurile „Sînt la fel". Procesul este departe de a fi încheiat, dovadă sînt cei 53,7% dintre copii care mai consideră cele două puncte ca fiind deosebite ca formă. Dar, în orice caz, acest progres există.

Pe de altă parte, intervin cunoștințele de geometrie, care și ele favorizează răspunsul de tipul „Sînt la fel".

Cum se explică însă creșterea, deși într-o măsură mult mai mică, și a procentului copiilor care consideră cele două puncte de intersecție ca fiind deosebite ?

Această situație paradoxală se explică numai prin conflictul iscat la această vîrstă pe plan logic în condițiile problemei puse.

Progresul nu are loc numai pe plan perceptiv, în sensul individualizării treptate a punctului în structura figurii.

Pe măsură ce punctul devine pentru copil ceea ce este de fapt, un loc de intersecţie, de suprapunere, pe măsura ce, pe de altă parte, considerentele logice joacă un rol mai important, va apărea şi tendinţa, justificată logic, de a considera punctele de intersecţie ca fiind deosebite.

În răspunsurile copiilor, acest gen de justificare logică creşte la clasele mai mari („Punctul 1 e mai mare decît punctul 2 pentru că trec prin el mai multe linii"), după cum creşte şi numărul celor care justifică identificarea celor două puncte tot pe considerente logice.

În trecerea de la clasa a IV-a la clasa a V-a avem următoarea situaţie :

Pentru „mărime" : la întrebarea B creşte, cum am văzut, procentul copiilor care consideră punctul de pe tablă şi cel din caiet ca deosebite, dar creşte, într-o măsură foarte mică, procentul celor care le consideră ca fiind la fel.

La întrebarea C scade destul de mult procentul copiilor care consideră cele două puncte ca deosebite şi creşte cu foarte puţin procentul celor care le consideră „la fel".

Aceste creşteri în ceea ce priveşte procentul celor care consideră punctele ca fiind la fel sînt foarte mici : 1—2%, deci sînt puţin semnificative.

Cum explicăm însă modificările de sens contrar pe care le constatăm în ceea ce priveşte procentele copiilor care consideră cele două puncte ca fiind deosebite ca mărime la întrebarea B şi la întrebarea C, creşterea la B şi scăderea la C ?

Aceste modificări exprimă, fără îndoială, progresul de ordin perceptiv al copiilor de clasa a V-a în raport cu cei de clasa a IV-a. În timp ce o mai corectă apreciere face ca punctul de pe tablă să fie văzut mai mare decît cel de pe caiet, aşa cum este de fapt în realitate, aceeaşi ameliorare a aprecierii perceptive — de astă dată în sensul degajării punctului din contextul structural — face ca cele două puncte de intersecţie să fie văzute ca identice.

Răspunsurile obţinute în legătură cu „forma" punctului confirmă raţionamentul nostru.

La clasa a II-a este dominant răspunsul de tipul „Nu sînt la fel" (46%). Numai 18% (14+4%) dintre copii socotesc punctele „la fel".

Evident, este vorba aici de fenomenul absorbirii punctului în complexul perceptiv. Cei mai mulţi dintre copiii din clasa a II-a care răspund la această întrebare compară, de fapt, mai

ales cînd este vorba de formă, imaginile de ansamblu. La clasa a III-a, curba răspunsurilor de tipul „Nu sînt la fel“ (ca formă) atinge o maximă. Copii analizează imaginea cu mai multă siguranţă, dar procesul de degajare a punctului este la jumătatea drumului : punctul desprins din complexul figural, mai păstrează încă amprenta acestuia.

Abia în clasa a IV-a apare un număr relativ mare de copii care izbutesc să realizeze această degajare. Creşterea procentului de răspunsuri de tipul „Punctele sînt la fel“ la clasa a IV-a este bruscă, evidentă : de la 8,7 (5,8+2,9) la 34,9%.

Procentul copiilor care răspund la clasa a IV-a că punctele „Nu sînt la fel“ este în scădere faţă de cel al copiilor care dau acelaşi răspuns la clasa a III-a. Totuşi, numărul acestora din urmă este încă foarte mare la clasa a IV-a (53,7%), mai mare cu mult decît al celor pentru care „punctele sînt la fel“.

În clasa a V-a nu constatăm în această privinţă un regres, aşa cum am constatat în cazul întrebării B, (compararea punctului de pe tablă cu cel din caiet), deşi, cum spuneam, cunoştinţele geometrice s-au dovedit a fi, în mare măsură, uitate.

Faptul că şi pentru „forma“ punctului continuă să crească la clasa a V-a procentul răspunsurilor de tipul „la fel“ şi să scadă procentul răspunsurilor de tipul „Nu sînt la fel“ confirmă raţionamentul nostru din paginile precedente în legătură cu „mărimea“ punctului. Progresul este în primul rînd de ordin perceptiv (sau, mai exact, logico-perceptiv).

Cele două puncte de intersecţie apar ca fiind „la fel“ şi în ceea ce priveşte mărimea, şi în ceea ce priveşte forma, pe măsură ce copilul izbuteşte să separe punctul din structura figurii. Faptul că cunoştinţele de geometrie dobîndite în clasa a IV-a nu au un rol hotărîtor rezultă din constatarea de mai sus : comparînd punctul de pe tablă cu cel din caiet, mai mulţi copii le consideră deosebite în clasa a V-a decît în a IV-a (deosebire reală sub raport perceptiv).

Abia în clasa a VI-a, pentru prima oară, încep să predomine, în ceea ce priveşte forma, răspunsurile de tipul „Sînt la fel“. Tot pentru prima oară apare la această clasă răspunsul adecvat : „Punctele n-au formă“.

Să urmărim acum cele ce se petrec în legătură cu „greutatea“ punctelor.

La întrebarea B, cum am văzut, creşte procentul copiilor care consideră cele două puncte ca fiind deosebite. Această creştere este legată direct de diferenţierea perceptivă. Punctul

care apare intuitiv ca fiind mai mare este considerat ca fiind şi mai greu.

În ceea ce priveşte însă „greutatea" celor două puncte de intersecţie (întrebarea C), situaţia este mai confuză. Procentul copiilor care consideră punctul 1 mai greu decît punctul 2 scade de la clasa a IV-a la clasa a V-a (de la 36,8% la clasa a V-a, la 27,5% la clasa a IV-a), scădere paralelă cu cea înregistrată în ceea ce priveşte „mărimea". În schimb creşte evident numărul copiilor care consideră punctul 2 mai greu decît punctul 1. Dacă considerăm în ansamblu procentul copiilor care socotesc cele două puncte ca fiind deosebite în ceea ce priveşte greutatea, obţinem la clasa a IV-a : 36,8 + 0,9 + 0,7 = 41,4%, iar la clasa a V-a 27,5 + 5,0 + 6,3 + 1,2 = 40,0%, aşadar o uşoară scădere, puţin semnificativă. Să vedem acum ce se întîmplă cu procentul copiilor care consideră punctele ca fiind „la fel" sub raportul greutăţii. Şi acesta scade : de la 33,9% la 27,5%. Dacă lărgim categoria, punînd împreună copiii care răspund „la fel" cu cei care răspund „Nu au greutate" şi „Nu au dimensiuni", obţinem la clasa a IV-a : 33,9 + 3,8 = 37,7, iar la clasa a V-a : 27,5 + 5,0 + 1,2 = 33,7%. Aşadar scade şi numărul copiilor care fie că identifică punctele fără altă explicaţie, fie că dau răspunsuri cu o justificare corectă evidentă.

La această chestiune a greutăţii creşte numai numărul celor care nu răspund de loc : de la 19,9% la 23,8%.

Aşadar, în timp ce, în ceea ce priveşte „mărimea" celor două puncte de intersecţie şi „forma" lor, modificările constatate de la clasa a IV-a la clasa a V-a exprimă o înclinare a balanţei în favoarea opiniei că „punctele sînt la fel", în chestiunea greutăţii acest fenomen nu se constată.

În esenţă, ceea ce se înregistrează în această privinţă este o creştere a incertitudinii copiilor.

Mai sus noi am susţinut teza, rezultată din confruntarea datelor, că progresul înregistrat de la clasa a IV-a la clasa a V-a este mai ales de ordin perceptiv.

Or, dacă problemele „mărimii" şi „formei" punctului pot fi situate numai în plan perceptiv, în chestiunea „greutăţii" lucrurile se schimbă. „Greutatea" punctelor de intersecţie nu se percepe direct, aşa cum se percep „mărimea" şi „forma". „Greutatea" poate fi numai dedusă logic. Dacă este adevărat, aşa cum rezultă din ansamblul datelor precedente, că modificările constatate în trecerea de la clasa a IV-a la clasa a V-a sînt ex-

Scanned with OKEN Scanner

presia unui progres perceptiv, atunci întrebarea referitoare la „greutatea" celor două puncte de intersecţie nu poate pune în evidenţă un asemenea progres.

Ceea ce pun în evidenţă rezultatele este conflictul pe plan logic care se accentuează, în legătură cu această chestiune, pe măsura dezvoltării gîndirii copilului.

În problema comparaţiei punctului de pe tablă cu punctul din caiet, în cazul în care copilul admite existenţa greutăţii punctelor, el va deduce direct „care punct este mai greu" din confruntarea perceptivă a mărimii punctelor.

În problema celor două puncte de intersecţie însă, lucrurile se schimbă : dacă considerentele geometrice nu primează, atunci două soluţii sînt logic posibile :

a) cele două puncte, fiind la fel de mari (perceptiv), sînt la fel de grele ;

b) cele două puncte, deşi sînt la fel de mari, au greutăţi diferite pentru că provin din suprapunerea a două linii deosebite.

Rezultatul este incertitudinea constatată : creşterea procentului copiilor care nu răspund la această întrebare.

Această creştere a incertitudinii în problema pusă adaugă un nou argument în favoarea tezei susţinute de noi : în trecerea de la clasa a IV-a la clasa a V-a, progresul care primează în ceea ce priveşte interpretarea figurii este de ordin logic-perceptiv. *Direcţia principală a dezvoltării capacităţii de cunoaştere rămîne încă, în această, etapă sub semnul orientării concret-practice.*

Să ilustrăm rezultatele analizei datelor numerice prin răspunsuri ale copiilor din fiecare clasă.

Clasa a II-a. În general, copiii din această clasă dau răspunsuri simple, necomentate, nejustificate.

Chir. Vas. răspunde la întrebarea B : „Punctul de pe tablă este mai mare". „Nu ştiu" (este vorba de greutate). La întrebarea C : „Punctul 1 este mai greu. Aceste puncte n-au aceeaşi formă". Copilul acesta a răspuns la întrebarea B referindu-se la mărimea punctului, iar la întrebarea C la greutatea şi la forma punctului.

Oan. Flor., întrebarea B : „Punctul de pe tablă e mai mare" ; întrebarea C: „Mai greu punctul 1".

Vlad Mar., întrebarea B : „Punctul de pe tablă şi de pe foaie nu sînt egale" ; întrebarea C : „Punctul 1 este mai greu. N-au aceleaşi forme".

În afara unor asemenea răspunsuri-şablon, găsim şi unele, puţine la număr, mai sugestiv şi al căror conţinut confirmă cele arătate de noi în special în legătură cu modificarea semnificaţiei răspunsurilor legate de greutatea punctului (este vorba în special de întrebarea B).

Cor. Mih.: „Punctul de pe tablă e mai mic. Punctele nu sînt grele".
St. Rox.: „Punctul de pe caiet e mai mic. Punctele nu sînt grele".
Nic. Anca.: „Punctele sînt la fel. Punctele nu sînt grele".

Semnificaţia reală a acestor răspunsuri apare evidentă dacă adăugăm şi următorul gen de răspunsuri.

Cr. Mar.: „Amîndouă punctele sînt la fel. Amîndouă punctele sînt uşoare", sau
Co. Băr.: „Punctul nu este greu".

Ni se pare că rezultă evident, dacă ţinem seama de imaginea de ansamblu pe care o oferă aceste răspunsuri, faptul că pentru elevul din clasa a II-a un răspuns în aparenţă de nivel superior, de tipul „Punctele n-au greutate" sau „Nu sînt grele", are de fapt semnificaţia : „Nu putem vorbi de greutate cînd este vorba de ceva atît de mic".

La clasa a III-a, în ceea ce priveşte întrebarea B, în problema mărimii punctelor de pe tablă şi din caiet am constatat o creştere a procentelor în raport cu clasa a II-a. În răspunsurile copiilor din această clasă nu găsim încă justificări în această privinţă. Copiii încă nu fac sau nu simt nevoia să facă vreo legătură între „mărimea" punctului şi obiectul care este desenat, mulţumindu-se cu realitatea „fenomenală".

Cînd este vorba însă de greutate, găsim anumite justificări logice, fie pentru identitatea punctelor, fie pentru diferenţa dintre ele.

Iv. Do.: „Cel de pe tablă e mai mare. Nu putem să le cîntărim".

Aşadar, în chestiunea „greutăţii" punctului, copilul îşi pune problema modului de a o determina, ceea ce, evident, este un progres faţă de răspunsurile mai simple din clasa a II-a („Punctul nu e greu", „Punctul e uşor").

Un alt copil justifică în modul următor absenţa greutăţii :

Sor. Şerb.: „Sînt la fel (este vorba de mărime). Nici unul, fiindcă a fost pus cu (cretă) creionul".

Aşadar, nu este vorba de un obiect, de un lucru ponderabil, ci de ceva care nu are greutate din cauza modului în care

a luat naştere, din cauza naturii sale. Este vorba, în fond, tot de răspunsul „Punctul nu are greutate" cu semnificaţia sa primitivă, aşa cum l-am găsit şi în clasa a II-a, dar, de astă dată, cu o încercare de justificare logică.

Tendinţa de justificare logică merge şi în alt sens : legătura dintre „greutate" şi „mărime". „Punctele sînt la fel de mari — spune copilul *Bag. Ana.* — Amîndouă au aceeaşi greutate fiindcă sînt la fel de mari".

În ceea ce priveşte întrebarea C, apar foarte rar, deocamdată, unele referiri la „ambianţa" figurală a punctelor de intersecţie care determină deosebirile dintre ele. Iată, totuşi, unele exemple.

„Punctul 1 e mai mare decît doi. Punctul 1 are mai multe părţi" *(Vint. Zamf.).*

Sau : „Punctul cu 4 linii e mai mare şi cel cu două linii e mai mic şi mai uşor *(Ioa. Tud.).*

Să remarcăm modul de exprimare : punctul cu 4 linii, punctul cu 2 linii.

Copilul nu dispune încă nici de mijloacele perceptive care să-i permită individualizarea deplină a punctului din figură şi nici de mijloacele logico-verbale pentru a exprima individualizarea. El nici nu „vede" şi nici nu gîndeşte punctul *determinat de intersecţia unor drepte.* Unul dintre puncte este „cu mai multe linii" (deci este mai mare), altul este „cu mai puţine linii" (deci este mai mic).

În ceea ce priveşte „forma" punctelor de intersecţie, lipsesc de asemenea în general, comentariile, specificările. Copiii se mulţumesc să răspundă „Nu sînt la fel", pentru că acest lucru în cazul formei, le apare cu totul evident. Întîlnim totuşi, foarte rar, cîte o indicaţie mai precisă :

„Punctul 1 este mai mare şi mai greu. Au aceeaşi formă, rotundă" *(Boj. Ana).*

Să trecem la clasa a IV-a. În general avem un număr mult mai mare de copii care dau răspunsuri mai complete cu diferite încercări de justificare. Suprapunerile de semnificaţii, contradicţiile, conflictele, ca şi direcţiile reale de evoluţie, ies aci mai bine în evidenţă.

Să luăm, de pildă, răspunsurile copilului *Her. Mar.*

Scanned with OKEN Scanner

(B) „Punctul de pe tablă e mai mare. Amîndouă n-au greutate".

(C) „Sînt la fel de mari. Sînt egale. Au aceeaşi formă. Amîndouă sînt rotunde".

Aşadar, pentru Her. Mar. punctul de pe tablă şi punctul din caiet „n-au greutate". Pentru noi aceasta înseamnă, simplu, că, fiind vorba de un punct geometric, acesta n-are masă, n-are greutate. Am arătat însă mai sus că, avînd în vedere rezultatele statistice, este vorba de fapt de o suprapunere de semnificaţii, şi anume de semnificaţii fundamental distincte. Or, acest lucru reiese limpede din răspunsurile copilului. Acelaşi punct care „nu are greutate" are, în schimb, mărime. Nu s-a ajuns deci la o restructurare radicală a semnificaţiei : de la punctul substanţial, realitate perceptibilă, la punctul geometric, fără dimensiuni, fără masă. Aşa cum spuneam, noua semnificaţie, cea geometrică, n-a eliminat-o, n-a înlocuit-o pe cea veche. Punctul „n-are greutate" înseamnă în acelaşi timp : „punctul nu are greutate pentru că e foarte mic, pentru că e o simplă urmă a cretei sau creionului" şi „punctul n-are greutate pentru că aşa rezultă din cele ce s-a învăţat la geometrie".

Această suprapunere de semnificaţii este trădată de acceptarea faptului că punctele au şi mărime şi formă : sînt rotunde. Un punct care n-ar avea greutate pentru că n-are dimensiuni n-ar avea nici mărime, nici formă.

Ambele răspunsuri exprimă în schimb progresul real al copilului în sens perceptiv. Copilul vede mai mare punctul de pe tablă şi vede egale cele două puncte de intersecţie, izbutind să le izoleze din ambianţă.

Să considerăm răspunsurile copilului *Str. And.* :

(B) „Eu cred că punctul de pe tablă e mai mare deoarece are şi diametrul mai mare".

(C) „Punctul 1 e mai mare, deoarece se întîlnesc mai multe linii. Punctele nu au greutate. Punctele au aceeaşi formă". De astă dată afirmaţia că punctele n-au greutate apare ca răspuns la întrebarea C. Dar şi aici avem aceeaşi situaţie. Punctele sînt socotite a nu avea greutate, deşi punctul (1) este considerat mai mare decît punctul (2).

Intervenţia exterioară a cunoştinţelor geometrice rezultă şi din justificările copilului. „Punctul de pe tablă e mai mare pentru că are şi diametrul mai mare". Este, evident, o pseudojustificare, pentru că diametrul este dedus din informaţia perceptivă şi nu invers.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte însă, afirmaţia că punctul (1) e mai mare nu se mai sprijină pe datele intuitive, ci pe considerente logice, care însă ignorează cunoştinţele geometrice. Contradicţia despre care am vorbit este aici manifestă : copilul admite simultan că unul din puncte e mai mare din considerente pur logice, dar susţine în acelaşi timp din considerente geometrice (deci implicit tot logice) că punctele n-au greutate.

Iată, în sfîrşit, o altă variantă.

Ghe. Vas. : (B) „Ambele puncte nu au nici o greutate. Punctul de pe tablă este mai mare". (C) „Ambele puncte sînt la fel de mari şi de grele. Cele două puncte au aceeaşi formă".

În primul rînd, de astă dată, în legătură cu întrebarea B, aceeaşi contradicţie relevată mai sus între absenţa greutăţii punctelor şi prezenţa mărimii. Dar mai intervine ceva. La întrebarea C, ideea că punctele n-au nici o greutate este abandonată şi copilul susţine că cele două puncte sînt „la fel de mari şi de grele". Aceste răspunsuri relevă contradicţia existentă chiar în structura ideii de greutate a punctului. El nu este greu, uneori, şi este greu, alteori, contradicţie exprimînd cele două semnificaţii contradictorii ale punctului, punct realitate substanţială şi punct entitate geometrică.

Iată aceeaşi contradicţie de astă dată în raport cu „mărimea" punctelor.

Mar. Nu. : (C) „Punctul (1) este mai mare, deoarece la el se întîlnesc mai multe linii.

„Punctul (1) fiind mai mare ca volum e mai greu. Punctele au aceeaşi formă deoarece ele sînt la fel de mari".

Pentru gîndirea adultului un asemenea răspuns apare de-a dreptul bizar. Dar el nu exprimă decît caracterul „mozaicat", eteromorf pe care îl dia uneori gîndirea copilului în prezenţa unor chestiuni care depăşesc nivelul cunoştinţelor sale. Punctele de intersecţie nu sînt la fel de mari deoarece se întîlnesc mai multe linii. Această justificare, pe care am mai întîlnit-o, denotă coexistenţa a două procese distincte şi decalate. Pe de o parte, progresul logic care-i permite copilului să presupună o diferenţă de mărime nesprijinită intuitiv. Pe de altă parte, stadiul inferior al cunoştinţelor geometrice, care permite o substanţializare a liniilor şi, în consecinţă, a punctelor de intersecţie.

Scanned with OKEN Scanner

Fără această substanţializare, sumarea mintală a părţilor comune nu poate duce la o „mărire" a punctului în funcţie de numărul liniilor.

Deci, pe de o parte, ideea că punctul (1) e mai mare decît punctul (2) pe considerentul că în primul se întîlnesc mai multe linii. Pe de altă parte, afirmaţia că aceleaşi puncte sînt la fel de mari şi deci au aceeaşi formă. Să remarcăm faptul că deosebirea de mărime e pusă în legătură cu deosebirea de greutate, iar egalitatea mărimii este pusă în legătură cu egalitatea formei. De fapt, în exprimarea copilului sînt redate aici răsturnat raporturile reale logico-cauzale din mintea sa. Succesiunea logică reală este : a) în punctul (1) e mai mult (mai multă masă, am spune noi) pentru că se întîlnesc mai multe linii. Deci punctul (1) e mai mare. b) Punctul (1) şi punctul (2) apar pentru vedere la fel („au aceeaşi formă" spune copilul), deci sînt la fel de mari.

Iată încă un exemplu al contradicţiilor, care apar în răspunsurile copiilor.

Pod. Ana.: (C) „Punctul (2) e mai lung. Punctele sînt la fel de mari. Punctele au aceeaşi formă fiindcă punctele toate sînt rotunde".

De astă dată primează considerentele de ordin perceptiv. Dar şi aici apare conflictul între două procese decalate. Procesul contragerii şi detaşării punctului din ambianţă nu este încheiat. Copilul vede punctul (2) „mai lung" deoarece figura respectivă — în ansamblu, dacă avem în vedere extremităţile liniilor — pare alungită. Pe de altă parte însă, intervine experienţa generalizată a imaginii punctului obişnuit, a imaginii unui punct rotund. Copilul realizează aici un adevărat raţionament deductiv : toate punctele sînt rotunde, deci şi acest punct este rotund. Are loc, aşadar, o interferenţă între momente decalate ale celor două linii de evoluţie, cea logică şi cea perceptivă. Şi astfel, se ajunge ca un punct rotund să fie mai lung decît altul.

Ian. Man.: (B) „Punctul de pe tablă nu are nici o deosebire de cel de pe caiet, deoarece este tot un punct, decît că cel de pe caiet este scris cu creionul, iar cel de pe tablă este scris cu creta".

(C) „Punctele între ele sînt mai la fel, decît că sînt obtuze şi ascuţite. Punctele au aceeaşi greutate. Punctele au aceeaşi formă deoarece sînt amîndouă triunghiuri".

Conflictul între planul logic şi cel perceptiv este aici manifest.

Scanned with OKEN Scanner

Copilul tinde să accepte că punctele sînt la fel, „mai la fel", adică „aproape la fel". Dar imaginea perceptivă îl tulbură. Ea nu este reglată de concept, nu este subordonată conceptului, ci, dimpotrivă, conceptul este transfigurat de imaginea perceptivă. Formaţiile coexistă, dar necoordonat, nesintetizat. Punctele sînt la fel, pentru că aşa rezultă din cunoştinţele geometrice (despre care vedem că sînt foarte active, chiar dacă nu sînt utilizate adecvat), dar ele nu sînt la fel, pentru că imaginile obţinute — tot pe considerente geometrice — nu sînt la fel. Unul din puncte e „obtuz", celălalt „ascuţit". Şi totuşi „sînt la fel", dar nu în sensul că sînt identice, ci doar ca forme generice : ambele puncte sînt triunghiuri.

Am întîlnit mai sus fenomenul simbiozei mintale cu efect pozitiv, în care două tendinţe, două semnificaţii absolut contradictorii, se sumează totuşi la un moment dat, avînd ca rezultantă o soluţie, cel puţin aparent, bună (în legătură cu absenţa greutăţii punctului).

Întîlnim din nou un asemenea fenomen de simbioză, dar de astă dată cu efect negativ. Cunoştinţele geometrice se asociază cu o structură perceptivă neevoluată, iar rezultanta este, după cum am văzut, greşita utilizare a cunoştinţelor respective.

Fin. Sor. : (B) „Punctul de pe tablă este mai mare şi mai greu".

(C) „Cele două puncte sînt la fel de mari şi de grele. Punctele sînt de forme diferite. Punctele sînt la fel de mari, oricîte linii s-ar întîlni".

Revine acelaşi aspect eteromorf, exemplu tipic al fenomenului de simbioză mintală. Justificarea finală, „Punctele sînt la fel de mari, oricîte linii s-ar întîlni", provine din sumarea celor două direcţii. Punctele sînt la fel, oricîte linii s-ar întîlni este expresia cunoştinţelor geometrice. Dar ele nu sînt doar „la fel" prin absenţa dimensiunilor (respectiv, prin faptul că liniile n-au decît o dimensiune). Ele sînt „la fel de *mari*". Deci au totuşi o mărime. Ele sînt la fel şi pentru că apar ca identice percepţiei capabile să le degaje din context.

De ce considerăm că nu e vorba numai de identificare perceptivă, ci şi de o identificare cu semnificaţie geometrică ?

În primul rînd, pentru că elevul nu se limitează la figurile date, ci oferă un răspuns generalizat, a cărui provenienţă didactică este certă : „Punctele sînt la fel de mari, oricîte linii s-ar întîlni".

În al doilea rînd, deoarece egalitatea nu este numai de „mărime", ci şi de „greutate". Rezolvarea pur perceptivă în

sensul egalităţii punctelor nu s-ar referi decît la „mărime". Faptul că şi greutatea este aceeaşi arată că liniile, respectiv punctele, sînt concepute ca nesubstanţiale, deci în sens geometric.

Pe de altă parte însă, „formele" rămîn deosebite. În aceeaşi structură neomogenă pătrunde formaţia mai veche, neevoluată a punctelor influenţate de ambianţă.

În sfîrşit, răspunsul la prima întrebare, „Punctul de pe tablă este mai mare şi mai greu", atestă de fapt preponderenţa fenomenului perceptiv.

Fis. Ion.: (B) „Punctul de pe tablă este mai mare. Punctul de pe tablă este la fel de greu".

(C) „Punctele sînt la fel de mari şi la fel de grele. Punctele au aceeaşi formă. Punctele sînt la fel de mari, că-i tot una cîte linii se întîlnesc".

Avem aici unele deosebiri interesante faţă de răspunsul precedent. Primul fapt important este procesul de desubstanţializare a punctului. Aşa cum rezultă şi din datele statistice, în toate clasele un număr mai mare de copii se referă la deosebirile de mărime decît la cele de greutate.

Pentru Fis. Ion., punctele sînt deosebite ca mărime şi din considerentele perceptive, care i se impun şi totuşi egale ca greutate. Evident, nu intră aici în joc, pentru el, deosebiri de densitate. Mai curînd ar fi vorba de un soi de densitate nulă, de absenţa substanţei cu păstrarea, totuşi, a suprafeţei. Punctul este considerat a exista numai în suprafaţă, ca orice figură plană bidimensională.

În cazul întrebării C, imaginea perceptivă a punctelor de intersecţie degajate din ansamblul figurii se sumează cu ideea obţinută pe calea cunoştinţelor geometrice, a independenţei punctului de numărul liniilor intersectate.

Dem Ed.: (B) „Punctul de pe tablă e mai mare şi este mai greu".

(C) „Punctul (1) e mai mare şi nu există greutate. Punctele au aceeaşi formă. Punctul (2) e mai mare, deoarece au fost trase mai multe linii pe acelaşi centru".

Am reţinut şi aceste răspunsuri, pentru că ni s-au părut interesante în raport cu răspunsurile precedente.

De astă dată se admite o deosebire de greutate între punctul de pe tablă şi cel de pe caiet. În schimb, se consideră că punctele de intersecţie n-au greutate. În al doilea rînd, numă-

Scanned with OKEN Scanner

rul liniilor care se intersectează influenţează mărimea punctelor, spre deosebire de răspunsul precedent. Aceste linii influenţează mărimea punctelor, şi totuşi punctele n-au greutate.

Iată încă cîteva exemple, numai pentru a ilustra marea varietate de structură a răspunsurilor.

Gh. Nic.: (B) „Punctul de pe tablă e mai mare, dar nu e mai greu".

(C) „Punctul (1) e mai mare şi are aceeaşi greutate. Punctele nu au aceeaşi formă. La primul punct se întîlnesc mai multe linii, iar la cel de-al doilea se întîlnesc 2 linii".

Pop. Mih.: (B) „Punctele sînt la fel".

(C) „Punctele sînt egale. Punctele nu se cîntăresc. Punctele nu au aceeaşi formă. Punctele nu au aceeaşi formă pentru că la punctul (1) se întîlnesc 4 linii şi la punctul (2) se întîlnesc 2 linii".

Brînj. Gh.: „Punctele nu au aceeaşi formă, fiindcă unul e mai rotund şi altul mai lunguieţ".

După cum se vede, la întrebarea C însuşirea cea mai tenace este aceea a formei, chiar dacă punctele sînt considerate ca fiind egale ca mărime şi greutate. Ceea ce înseamnă, fapt rezultat şi din datele statistice, că în procesul acesta de contragere a punctului pînă la o entitate necorporală, greutatea este prima însuşire abandonată, deoarece nu numai că nu este susţinută de date perceptive, dar ea este, dimpotrivă, contrazisă de ele. Urmează mărimea. La întrebarea B, deosebirile de mărime rezistă mai mult sub presiunea datelor perceptive. La întrebarea C apare mai devreme, dar intrînd în conflict cu considerentele logice, o fază de egalizare, după care se va ajunge la abandonarea acestei însuşiri. Forma însă rezistă cel mai mult. Copilul Pop. Mih. este un bun exemplu în acest sens. Deşi punctele sînt egale ca mărime, deşi punctele „nu se cîntăresc", totuşi deosebirile de formă persistă.

Clasa a V-a

La clasa a V-a nu apar deosebiri esenţiale în raport cu clasa a IV-a. Datele statistice au scos în evidenţă, în primul rînd, un progres de ordin perceptiv.

Unul dintre copii exprimă foarte bine acest fapt.

Ned. Ştef.: (B) „Cele două puncte par egale, însă dacă ne apropiem de cel de pe tablă e mai mare".

Evident, elevul n-a avut posibilitatea să se deplaseze şi să se apropie efectiv de tablă.

Este deosebit de interesant faptul că acest copil de 11 ani a izbutit să ne redea într-o formă explicită procesul mintal prin care el a realizat comparaţia, ceea ce înseamnă că acest proces a ajuns la un grad avansat de conştientizare.

Silv. L.: (B) „Punctul de pe tablă este mai mare şi mai greu datorită dimensiunilor dintre cretă şi creion".

(C) „Cele două puncte sînt la fel de mari, dar primul este mai greu. Ele au aceeaşi formă, deoarece sînt la fel de mari".

Diferenţa dintre cele două puncte, cel de pe tablă şi cel din caiet, nu este numai remarcată şi înregistrată ca atare. După cum se vede, la clasa a V-a se manifestă, la unii copii, trebuinţa de a justifica această diferenţă. Progresul perceptiv înregistrat merge mai ales în sensul unei „logicizări" a percepţiei, în sensul unei structurări logice a percepţiei.

Răspunsul la întrebarea C exprimă acelaşi fapt. Sprijinit pe intuiţie, copilul susţine că cele două puncte sînt la fel de mari, admiţînd însă o diferenţă de greutate. Punctul (1) ar avea oarecum o densitate mai mare.

Iată un alt exemplu unde se constată imixtiunea cunoştinţelor geometrice.

And. Pet.: (B) „Mai mare este punctul de pe tablă. Mai greu este tot punctul de pe tablă, deoarece are şi un volum mai mare".

(C) „Este mai mare punctul (1), deoarece are o suprafaţă mai mare. De asemenea, tot punctul (1) este mai greu, datorită ariei sale".

În general se remarcă efonturile de coherenţă a răspunsurilor. Coherenţa este fără îndoială superioară celei constatate la clasa a IV-a. Dar, aşa cum am remarcat şi la clasa a IV-a ,utilizarea cunoştinţelor geometrice este încă reglată de imaginea perceptivă.

Problema formei continuă să-i preocupe pe copii.

Paj. And.: (B) „Nici unul din puncte nu este mai mare şi nici mai greu pentru că nu au greutate".

(C) „Punctul (1) are altă formă, pentru că trec mai multe linii prin el şi are altfel de margini".

Cav. Dan.: (C) „Cele două puncte nu sînt la fel de mari. Unul este mai mare, celălalt mai mic. Cele două puncte au aceeaşi formă, fiindcă sînt rotunde".

Alp. Mar.: (C) „N-au aceeaşi formă, pentru că punctul (1) are mai multe braţe".

Scanned with OKEN Scanner

Alt. Sim.: „Punctele nu au aceeaşi formă, pentru că punctul (1) e rotund, iar punctul (2) e pătrat".

Formele punctului pot fi, după cum se vede, variate: rotund (mai frecvent), pătrat, cu braţe, cu diferite margini. Am mai întîlnit şi puncte lunguieţe, triunghiulare etc.

Există totuşi — puţine, răzleţe — şi răspunsuri care denotă elemente de progres în raport cu clasa a IV-a în ceea ce priveşte procesul acesta de desubstanţializare a punctului. Aceste elemente sînt în legătură mai ales cu însuşirea greutăţii. Am văzut mai sus că chiar la clasa a IV-a apare frecvent ideea că punctele, deşi îşi păstrează mărimea şi forma, n-au greutate.

La clasa a V-a, aceeaşi direcţie se precizează.

Ken. Dan.: (B) „Punctul de pe tablă e mai mare decît cel de pe caiet. Punctele nu pot avea greutate, nefiind corpuri".

Este limpede că, pentru acest copil, punctul înainte de a deveni, conform definiţiei geometrice, entitatea ideală „fără dimensiuni" trece prin stadiul de figură geometrică plană cu întindere, dar fără corporalitate.

Am citat mai sus răspunsul copilului Paj. And. la întrebarea (B) „Nici unul din puncte nu este mai mare şi mai greu, pentru că nu au greutate".

Acest răspuns marchează un progres evident în acest sens. Afirmaţia că punctele nu au greutate am mai întîlnit-o de multe ori. În clasa a II-a şi a III-a, în sensul că greutatea nu se poate concepe în legătură cu nişte obiecte atît de mici. În clasa a IV-a, pe această tendinţă se grefează noua accepţiune a punctului ca entitate geometrică şi, cum am văzut, „greutatea" va fi aceea care va ceda prima, în raport cu celelalte însuşiri concrete.

Iată, în sfîrşit, că în clasa a V-a se întrezăreşte o fază superioară. Ideea că punctele nu au greutate s-a precizat. Ea înseamnă că punctele nu sînt corpuri, cum afirmă copilul Ken. Dan., dar înseamnă şi mai mult pentru copilul Paj. And.: punctul, neavînd greutate, n-are nici o mărime, adică întindere în suprafaţă. Şi totuşi, nici acest copil nu poate renunţa la „formă".

Construcţia e corectă, dar insuficient consolidată, şi sub presiunea imaginii perceptive se deteriorează. Punctul care n-are greutate, care n-are de aceea nici mărime, are totuşi margini!

Scanned with OKEN Scanner

★

Clasa a VI-a

Aşa cum a reieşit din datele statistice, progresul înregistrat în clasa a VI-a este evident. Vom da pentru exemplificare cîteva răspunsuri în care se oglindeşte însuşirea de către elevii respectivi a noţiunii geometrice corecte.

Buz. Ion.: (B) „Ambele puncte sînt la fel, pentru că punctul nu are nici o dimensiune".

(C) „Amîndouă sînt la fel, pentru că orice punct este intersecţia a două sau mai multe linii".

Dinc. Nic.: (B) „Punctul de pe tablă şi punctul de pe caiet sînt egale, pentru că nu au nici o dimensiune şi nici o greutate".

(C) „Punctele de intersecţie ale liniilor nu au nici o greutate, nici o formă şi nici o mărime (pentru că nu au nici o dimensiune").

Lup. Cor.: (B) „Punctele în geometrie sînt egale, pentru că în geometrie sînt socotite ca neavînd mărime, greutate, lungime, înălţime.

(C) „Punctele sînt la fel, din aceleaşi cauze ele nu au formă".

Bel. Al.: (B) „Cele două puncte sînt la fel de mari, pentru că nu se ia în consideraţie stratul de cretă".

(C) „Punctele sînt la fel din aceleaşi cauze. Ele nu au formă".

Laz. Cor.: (B) „Punctele n-au nici o mărime, nici greutate, dar ele sînt reprezentate printr-o urmă cît mai mică şi circulară". (C) „Amîndouă punctele sînt egale, după cum se vede la punctul B. Punctele n-au formă".

Rod. Rod.: (B) „Punctul nu are nici o dimensiune".

(C) „Punctele nu au dimensiune. Printr-un punct trece o infinitate de drepte. Punctele nu au nici o formă.

Rus. Adr.: (B) „Punctele sînt la fel de mari, deoarece ştim că punctele nu au nici o dimensiune". (C) „Punctele sînt la fel de mari ca ştiind definiţia punctului. Nu au formă".

Aceste răspunsuri dovedesc faptul că elevii respectivi au înţeles, în general, noţiunea geometrică de punct. Totuşi, există şi aici diferenţe de nuanţă.

Unii dintre copii afirmă, ca urmare a absenţei dimensiunilor, că punctele „sînt egale". Unii afirmă chiar că sînt „la fel de mari" (Rus. Adr.). Această denotă că, în fond conflictul dintre abstracţie şi intuiţie nu e deplin lichidat, „la fel", constituind doar un compromis între imaginea perceptivă şi ideea absenţei dimensiunilor.

Sînt însă unii copii care dovedesc a fi înţeles foarte bine relaţiile dintre noţiune şi imaginea intuitivă şi rezolvă conflictul dintr-o perspectivă superioară.

Scanned with OKEN Scanner

Lup. Cor., de pildă, arată că „Punctele în geometrie sînt egale, pentru că în geometrie sînt socotite ca neavînd mărime, greutate, lungime, lăţime". Copilul a sesizat deci acest fapt esenţial : punctul, ca orice entitate geometrică, este expresia unei definiţii şi nu un obiect concret.

Tot aşa şi Laz. Cor., pentru care punctele n-au nici mărime, nici greutate, dar ele sînt *„reprezentate* (subl. ns.) printr-o urmă cît mai mică şi circulară".

Desenul îi apare deci lui Laz. Cor. nu ca o reproducere a entităţii geometrice, ci doar ca o reprezentare a ei.

Întîlnim şi răspunsuri mai simpliste, în care apare ideea egalităţii punctelor fără referire la absenţa dimensiunilor.

Pan. Mih.: (B) „Toate punctele sînt la fel de mari şi toate la fel de grele". (C) „Aceste puncte au aceeaşi mărime, aceeaşi greutate şi aceeaşi formă".

Gh. Mar.: (B) „Punctele sînt la fel". (C) „Sînt egale, au greutatea egală şi au aceeaşi formă".

Este evident că la aceşti copii nu este vorba de o indistincţie perceptivă. Pan. Mih., pentru întrebarea B apelează la o propoziţie generală : „Toate punctele sînt la fel de mari" etc. Nu e vorba deci de faptul că el nu sesizează diferenţele, ci de aplicarea unei reguli, a unui principiu (fără ca subiectul să ne ofere însă, într-o formă explicită, aşa cum am găsit la Laz. Cor., ideea justă a relaţiilor dintre noţiune şi imagine).

Dar pe lîngă aceste răspunsuri mai mult sau mai puţin apropiate de soluţia corectă, există încă în clasa a VI-a un număr foarte mare de răspunsuri în care tot şirul de conflicte, contradicţii, compromisuri mintale acumulate de copii de-a lungul anilor de şcoală se manifestă cu toată vigoarea.

Unele răspunsuri au încă un caracter rudimentar, ignorînd total cunoştinţele geometrice.

Kre. Tib.: (B) „Punctul de pe tablă este mai mare. Este mai greu punctul de pe tablă". (C) „Aceste puncte nu au aceeaşi mărime, nu au aceeaşi greutate, nu au aceeaşi formă".

Tud. Flor.: (B) „Punctul mai mare este punctul de pe tablă. Punctul mai greu este tot punctul de pe tablă". (C) „Punctul (1) este mai mare decît punctul (2). Punctul (1) are o formă mai mare decît punctul (2).

Aceste răspunsuri se situează în afara considerentelor geometrice.

Dar există alte răspunsuri, în care cunoştinţele geometrice sînt prezente, copilul ajungînd chiar la conceptul euclidian al punctului fără dimensiuni, şi totuşi, imediat, se referă la mărime, formă etc.

Rom. An.: (B) „Nici unul nu-i mai greu şi mai mare pentru că punctul nu are nici o dimensiune".

(C) „Figura (1) are punctul mai mare, pentru că se întretaie mai multe linii. Punctul din figura (2) este mai mic, pentru că se întretaie mai puţine linii. Punctele au aceeaşi greutate".

Acest răspuns ni se pare extrem de interesant. Contradicţia este aici manifestă. Nu avem o situaţie de compromis, un conflict latent, o suprapunere de semnificaţii. *Alături* de răspunsul corect în care conceptul euclidian al punctului fără dimensiuni apare explicit, în fraza imediat următoare copilul vorbeşte, netulburat, de faptul că „figura (1) are punctul (1) mai mare, pentru că se întretaie mai multe linii".

De remarcat că acest conflict nu are loc între imaginea intuitivă, direct perceptibilă, şi accepţia geometrică a punctului. Cînd e vorba să compare punctul de pe tablă cu cel din caiet, care, la această vîrstă, apar evident ca deosebite, copilul se referă la definiţia geometrică : punctul nu are nici o dimensiune. (E cert că nu e vorba de vechea indistincţie peste care s-a depus noua formaţie, semnificaţia geometrică, deoarece copilul nu foloseşte formularea dubioasă „punctele sînt la fel", ci o formulare mai apropiată de sensul corect : „Nici unul nu-i mai greu şi mai mare", ceea ce înseamnă „Nu le putem compara din punctul de vedere al mărimii şi greutăţii".)

Conflictul apare atunci cînd copilul trebuie să rezolve o a doua problemă, unde nu imaginea directă este cea care intervine, ci o reprezentare tot intuitivă, dar *elaborată logic*. Este un conflict mai subtil, şi de aceea mai greu de rezolvat.

Aceeaşi este situaţia şi în răspunsul următor.

Ion. Mar.: (B) „Punctul de pe tablă şi punctul de pe caiet sînt la fel, pentru că ştim că punctul nu are nici o dimensiune".

(C) „Mărimea nu este aceeaşi. Greutatea este mai mare la punctul (1), ca şi mărimea, iar forma nu este aceeaşi".

Aici construcţia logică în baza căreia se formulează răspunsul C nu este explicită, dar confuzia este aceeaşi.

În aceste răspunsuri devine evident conflictul situat în primul rînd la nivelul operaţiilor logice. Dar conflictul apare

pentru că trecînd la întrebarea (C), copilul abandonează de fapt sistemul de noţiuni geometrice şi, — după cum spuneam, operează logic, dar cu entităţi substanţiale.

Iată acum un alt tip de răspuns, de asemenea semnificativ pentru nivelul de dezvoltare mintală al copiilor din această clasă.

Bru. Geo.: (B) „Cele 2 puncte sînt la fel, căci punctul se socoteşte făcut de un creion foarte, foarte subţire". (C) „Amîndouă punctele sînt la fel, deoarece linia se socoteşte extrem de subţire, iar la intersecţie nu lasă o grămăjoară de grafit. Punctul nu are formă".

Aici intervine un factor nou: desenul.

Conflictul este rezolvat, evident într-o formă provizorie, printr-o soluţie de compromis, care însă, în ultimă instanţă, este situată tot în planul intuitiv-concret : punctul este foarte mic, linia este foarte subţire. Ceea ce este important este în primul rînd faptul că elevul nu confundă totuşi realitatea efectivă a punctului material cu punctul ca entitate geometrică. El îşi dă seama că nu compară punctele aşa cum se găsesc de fapt pe tablă sau în caiet, ci nişte entităţi imaginate. Relaţia dintre aceste entităţi imaginate şi obiectul concret este o relaţie de „ca şi cînd", cu totul nouă în evoluţia mintală a copilului, apărută, după cum am constatat, pentru prima oară la elevii din clasa a VI-a. Elevul nu spune : „punctul este făcut cu un creion foarte subţire", ci „punctul se socoteşte a fi făcut cu un creion foarte subţire". Momentul este extrem de important pentru dezvoltarea gîndirii geometrice a copilului.

În paginile precedente (vezi capitolul al IX-lea — „Imaginile-abstracţii şi conceptele figurale"), noi am susţinut că relaţiile dintre obiect, imaginea grafică şi figura geometrică (entitate abstractă conceptualo-intuitivă) sînt de domeniul *modelării*. Imaginea grafică este modelul obiectului concret care ne interesează, iar entitatea conceptualo-intuitivă ideală, conceptul figural, reflectă structura comună, sub raportul proprietăţilor spaţiale, a celor două realităţi. Operînd deci cu imaginea grafică, noi avem „în vedere" figura ideală, geometrică, iar aceasta, la rîndul ei, reflectă, în generalitatea şi esenţialitatea lor, proprietăţi spaţiale obiective.

Toate acestea înseamnă posibilitatea de a opera cu modelul grafic, „ca şi cum" ar fi imaginea ideală corespunzătoare, adică intervenţia unui procedeu logic caracteristic pentru întreaga gîndire ştiinţifică. Utilizarea conştientă a acestui procedeu pen-

Scanned with OKEN Scanner

tru cazul specific al geometriei, cu referire la relaţiile dintre abstract şi concret, apare, după cum am văzut, pentru prima dată la copilul din clasa a VI-a.

Dar nu avem aici decît un aspect al unui procedeu cu un caracter mult mai general pe care-l întîlnim nu numai în ştiinţă, ci şi în artă sau chiar în rezolvarea problemelor practice curente. Originea sa se află încă în jocurile copilului. Copilul efectuează o asemenea substituţie cînd socoteşte un cub de lemn ca fiind o casă, un băţ ca fiind o puşcă sau o dîră în nisip ca fiind o apă curgătoare. Acelaşi procedeu îi va servi, cînd îşi va însuşi noţiunea de număr, să treacă de la mere la beţe de chibrit, de la acestea la linioare sau puncte şi pînă la urmă la simbol. Ceea ce se modifică, faţă de „modelarea" primară din comportamentul ludic, este faptul că de astă dată, în însuşirea noţiunilor şi procedeelor ştiinţifice, substituirea nu se face în mod arbitrar, pe considerente întîmplătoare, neesenţiale, ci prin înţelegerea structurii comune esenţiale între original şi modal.

În sfîrşit, într-o a treia etapă — la ale cărei începuturi asistăm prin considerarea răspunsurilor date de unii copii la întrebările noastre — acest procedeu al substituirii, al lui „ca şi cum", devine o formă logică mînuită conştient de copil.

Importanţa acestui procedeu mintal a atras atenţia multor psihologi şi filozofi, căpătînd însă adeseori, în gîndirea occidentală, o interpretare mistică, idealistă.

„Domeniul jocului este paradisul lui „ca şi cum", nota Claparède [1], care însă, pornind de aici, vede în joc un procedeu de derivare, de realizare prin ficţiune a unor tendinţe practic irealizabile (apropiindu-se astfel de concepţia psihanalitică şi de „psihologia individuală" a lui A. Adler). K. Lange, pe considerente analoge, vorbeşte de *bevusste Selbstteuschung* (autoînşelare conştientă).

Se ştie că Hans Vaihinger şi-a construit un întreg sistem filozofic, denumit uneori ficţionalism, sistem pragmatisto-idealist, pornind de la procedeul lui „ca şi cum", „als ob" [2].

Întreaga noastră activitate mintală, afirmă Vaihinger, este plină de asemenea ficţiuni, artificii *(Kunstgriffe)* cu utilitate practică. O mare parte din conceptele matematice sînt, de fapt, ficţiuni. Aşa sînt numerele ne-

---

[1] Dr. Ed. Claparède, *Psihologia copilului şi pedagogia experimentală*, Bucureşti, 1924, p. 626.

[2] Hans Vaihinger, *Die Philosophie des Als Ob. System der theoretischen, praktischen und religiösen Fiktionen der Menschheit auf Grund eines idealistischen Positivismus*, Berlin, 1911.

gative, fracționare, irațională. „Nu mai vorbim de cele imaginare, care sînt „cea mai monstruoasă plăsmuire numerică" [1]. Apoi spațiul matematic, infinitul etc. etc.

„Trucul", „artificiul" de care se servește Vaihinger însuși, este acela de a descompune fluxul gîndirii în parcele care luate separat nu mai au corespondențe directe în realitate. El reconstituie apoi gîndirea din aceste parcele, din aceste „ficțiuni", și declară întreaga cunoaștere ca fiind o ficțiune.

De fapt însă, așa cum am văzut, conceptele științifice și în special conceptele matematice oglindesc realitatea numai în dinamica interdependențelor lor. Contracțiile despre care vorbește Vaihinger sînt contracții reale, obiective. Ele nu anulează valoarea gnoseologică a conceptelor respective. Dar această valoare nu apare, cum spuneam, decît în fluxul viu al gîndirii.

Procedeul lui „ca și cum" nu este, în ultimă instanță, altceva decît o variantă a fenomenului de semnalizare, variantă nestudiată pînă în prezent în lumina acestei concepții. Cîinele salivează la aprinderea becului, ca și cum ar avea mîncarea în gură, omul retrage mîna cînd i se strigă: „vezi că frige!", ca și cum s-ar frige într-adevăr, fizicianul se gîndește la un model intuitiv al atomului, ca și ar cerceta imaginea însăși a atomului, geometrul trasează figuri concrete cu creionul, dar se preocupă de semnificația lor abstractă. Procedeul modelării este un procedeu esențial al gîndirii în activitatea ei de cunoaștere. Acest procedeu derivă, în ultimă instanță, din funcția fiziologică esențială a creierului, funcția de semnalizare. Relațiile dintre excitantul primar și semnal, dintre original și model se bazează pe legi obiective. De aceea, semnalele, modelele, chiar artificiile nu sînt ficțiuni, ci modalități de reflectare ale realității obiective.

Să revenim la exemplul de mai sus. În răspunsul copilului Bru. Geo. se relevă deci conștientizarea acestui aspect esențial pentru gîndirea geometrică : imaginea grafică nu este obiectul însăși al gîndirii, ci doar reprezentarea acestuia. De fapt, însă, calea nu a fost în întregime parcursă.

Am arătat cu alt prilej că în evoluția ontogenetică a gîndirii nu putem reduce totul la linia concret-abstract. Creșterea coeficientului de abstractizare a mijloacelor cu care operează gîndirea și perfecționarea formelor logice constituie de fapt două căi de evoluție care se condiționează reciproc, dar nu se reduc una la alta, fapt important mai ales pentru momentele de decalaj.

[1] Hans Vaihinger, *op. cit.*, p. 81.

O asemenea discrepanţă apare şi în răspunsul citat.

Progresul pe linie logică îi permite copilului să ajungă la conştiinţa relaţiei de substituire. Dar insuficienţa capacităţii de abstractizare îl împiedică să realizeze operaţiile respective cu abstracţii pure şi astfel el operează, în fond, tot cu mijloace intuitive, parţial simplificate, schematizate. Este un aspect extrem de interesant al dezvoltării gîndirii matematice a elevului. Asemenea decalaje pot să apară în diferite momente ale evoluţiei mintale a copilului, în funcţie de dificultăţile întîlnite.

Apar încă în clasa a VI-a multe răspunsuri care ilustrează nivelul intuitiv-concret al gîndirii.

Mor. Aur.: (B) „Punctul de pe foaie este mai mic şi mai uşor pentru că este făcut cu creionul, iar celălalt cu creta". (C) „Punctul prin care trec mai multe drepte este la fel cu cel prin care trec numai 2 drepte".

Ilie Nic.: (B) „Punctul de pe foaie este mai mic şi mai uşor pentru că noi l-am făcut cu creionul şi la tablă cu creta". (C) „Punctele prin care trec mai multe drepte sînt la fel şi au aceeaşi formă".

Ste. Adr.: (B) „Cele două puncte nu sînt la fel de mari şi de grele. Punctul mai mare şi mai greu este cel de pe tablă, deoarece pentru a fi făcut s-a lăsat un strat mai gros de cretă, iar cel de pe foaie e mai mic şi mai uşor". (C) „Nu sînt la fel de mari şi de grele (aceeaşi explicaţie ca şi la B). Ele nu au aceeaşi formă".

Aceste răspunsuri, dintre care primele două sînt aproape identice, ilustrează persistenţa nivelului intuitiv-concret la care sînt situate răspunsurile multor copii din clasa a VI-a. Ceea ce apare în plus la copiii respectivi este abundenţa precizărilor privitoare la aspectele concrete în discuţie. Asemenea indicaţii am întîlnit şi la clasa a V-a. În clasa a VI-a le găsim însă mai frecvent (utilizarea creionului, a cretei).

Progresul perceptiv se manifestă şi în răspunsurile la întrebarea C, unde copiii izbutesc să degajeze punctul cu suficientă siguranţă din ambianţă. Subiectul Ste. Adr., spre deosebire de primii doi, nu consideră punctele de intersecţie ca fiind la fel, dar aceasta nu sub influenţa imaginii de ansamblu (cum se întîmplă frecvent la elevii mici), ci pe considerentul cumulării părţilor comune.

La unii elevi din clasa a VI-a se mai poate întîmpla însă ca chiar utilizarea elementelor intuitive să se facă necoordonat.

Gru. Pan.: (B) „Punctul de pe tablă este mai mare, pentru că suprafaţa tablei este mai mare. Este mai greu punctul de pe caiet, pentru că

mina de creion este mai grea decît creta". (C) Punctele sînt de aceeaşi mărime, au aceeaşi greutate şi aceeaşi formă".

Copilul acesta mînuieşte mijloace logice insuficient evoluate, prezentîndu-ne un exemplu de cauzalitate relaxată cu angrenaje arbitrare. El este, evident, foarte departe de soluţia justă, geometrică a problemei.

În sfîrşit, în afara unui număr relativ mare de copii care declară că punctele n-au formă, mai există totuşi în clasa a VI-a copii pe care forma punctului continuă să-i preocupe.

Aşa, de pildă, *Bob. Ana* oferă şi o clasificare originală a formei punctelor :

(B) „Punctele nu sînt egale". (C) „Punctul (1) este mai mare decît punctul (2). Punctele sînt de două feluri : (. şi x)".

Iar *Gh. Gil.* declară :

(B) „Punctele sînt egale, deoarece punctele n-au mărime şi nu se pot măsura". (C) „Cele 2 puncte sînt egale, deoarece printr-un punct pot trece un număr infinit de drepte, fără ca el să-şi schimbe dimensiunea, fiind în formă de cerc".

Isp. Gr. : (B) „Punctul de pe tablă este egal cu cel din foaie. Amîndouă sînt la fel de grele".

(C) Punctele nu sînt egale ca mărime, din cauză că se întretaie mai multe linii şi nu au aceeaşi greutate şi nu sînt la fel că la (2) are forma pătrată şi la (1) are forma rotundă, (1) atîrnă mai greu".

Bob. Luc. : (B) „Punctele sînt egale. Amîndouă au aceeaşi greutate".

(C) Punctele nu sînt egale, punctul (1) este mai mare decît punctul (2). El este şi mai greu decît punctul (1). Ele nu au aceeaşi formă, punctul (1) este mai complicat decît punctul (2).

Iată deci ce varietate de „forme" ale punctelor mai persistă la clasa a VI-a : rotunde, pătrate, în formă de cruciuliţe, puncte mai mult sau mai puţin „complicate". Din structura răspunsurilor reiese clar că elevul nu se referă conştient la puncte extrageometrice (ortografice, geografice), ci la noţiunea de punct, utilizată în geometrie. În realitate însă, noţiunea sa este încărcată, încă, — la clasa a VI-a ! — de reziduurile îndelungatei şi variatei sale experienţe în materie de puncte.

Dar răspunsurile sînt interesante şi pentru structura lor de ansamblu. Răspunsul lui Gh. Gil., de pildă, ne oferă încă un exemplu de stratificare a semnificaţiilor în care apar, în expunerea aceluiaşi copil, ca într-o formaţiune geologică straturile succesive depuse în diferite etape de evoluţie : a) punctul

nu are mărime ; b) printr-un punct pot trece o infinitate de drepte ; c) el nu-şi schimbă dimensiunea (are deci dimensiune, dar nu şi-o schimbă în funcţie de numărul dreptelor de intersecţie, constanţă marcînd tranziţia) şi, în sfîrşit, d) punctul e în formă de cerc.

Imaginea de conglomerat, de structură eteromorfă a reapărut şi la clasa a VI-a, lăsîndu-ne să mai întrezărim şi la acest nivel procesul... dramatic al constituirii noţiunilor geometrice.

Experimente individuale

Experimentele individuale au adus aceleaşi elemente ca şi cele care au reieşit din experimentele colective. De aceea ne vom mărgini la un mic număr de exemple.

Clasa a III-a

Pr. Sim. (9,8) : El. Punctul (2) e mai mare.

Exp. De ce ?
El. Pentru că are numai două linii (?!)
Exp. Eu te-am întrebat de puncte.
El. Din mijloc ?
Exp. Da, aici.
El. Punctul (1) e mai mare.
Exp. De ce e mai mare ?
El. Pentru că are mai multe linii.
Exp. Un punct are mărime ?
El. Se poate face unul mai mare şi unul mai mic.
Exp. Dar tu ştii ce e un punct ?
El. Un punct e un semn.
Exp. Ce fel de semn ?
El. Un semn de orientare.

Com. Cor. (9,10) : El. Cele două puncte nu sînt la fel. Punctul (1) e mai mare.

Exp. De ce crezi că punctul (1) e mai mare ?
El. Pentru că punctul (1) are 8 unghiuri şi punctul (2) are numai două unghiuri.
Exp. Fii atent. Eu te întreb numai de puncte.
El. (priveşte). Punctul (2) e mai mic. Punctul (1) e mai mare.
Exp. De ce ?
El. Pentru că punctul (2) are mai puţine unghiuri.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a IV-a

Proț. Aur. (10):

El. Punctul (1) e mai mare decît punctul (2).
Exp. Dar greutatea ?
El. Punctul (1) e mai greu.
Exp. În ceea ce privește forma ?
El. Punctul (1) are linii mai multe.

Clasa a V-a

Bra. Zol. (11,8):

Exp. Există vreo deosebire între aceste puncte ?
El. Nu există deosebiri între puncte.
Exp. Punctele acestea au aceeași mărime ?
El. Nu. Punctul (1) e mai mare decît punctul (2).
Exp. Dar ca greutate ?
El. Dacă ar fi să aibă greutate, mai greu ar fi punctul (1).
Exp. Dar punctele au greutate ?
El. (ezită). N-au greutate.
Exp. Dar ca formă ?
El. Unul este un cerc mai gros și mai mare și altul este un cerc mai mic și mai subțire.

Se face experimentul: comparația punctului de pe tablă cu punctul din caiet.

Exp. Crezi că au aceeași mărime ?
El. Punctul de la tablă e mai mare.
Exp. Dar ca greutate ?
El. N-au greutate. Dacă ar avea greutate, ar fi mai greu cel de la tablă.

Clasa a VI-a

Geo. Sor. (12,6):

Exp. Compară aceste puncte. Ce putem spune despre ele ?
El. Nimic.
Exp. De ce ?
El. Toate punctele sînt formate de drepte.
Exp. Dar ca mărime ? E vreunul mai mare ?
El. Nu. Sînt egale. Toate punctele se aseamănă între ele.
Exp. Dar ca greutate se deosebesc ?
El. Nu, nici ca greutate nu se deosebesc. Toate punctele sînt egale.
Exp. Dar ce greutate au ?
El. Asta nu pot să știu.

Exp. Dar dacă s-ar întretăia 200 de drepte punctul n-ar deveni mai greu ?

El. Ba da. Ar fi mai multe drepte.

Exp. Dar ca mărime ? Ce s-ar întîmpla în cazul acesta ?

El. Punctul s-ar mări.

Exp. Dar mai înainte mi-ai răspuns că punctul (1) nu poate să fie mai mare decît punctul (2), pentru că toate punctele sînt la fel.

El. Cred că punctul (1) e mai mare (!)

Hor. Syb. (13,0) :

El. Nici unul din puncte nu e mai mare.

Exp. De ce ?

El. Nu ştiu... Sînt prea mici ca să poţi spune care e mai mare.

Exp. Dar ca greutate, dacă le compari ?

El. Punctele n-au greutate.

Exp. Dar ca formă ?

El. Sînt la fel.

Exp. Dar ce formă au ?

El. N-au formă. Pe noi ne-a învăţat că ceea ce se face cu creionul e mult prea mare, pentru că este un punct. Numai locul acela... N-are formă.

Exp. Dar tu cum îţi închipui punctul? Există? E ceva mic?

El. Nu, e numai locul arătat de el.

Răspunsurile citate la clasele a III-a şi a IV-a readuc aspecte familiare din exemplele anterioare. Răspunsurile la clasele a V-a şi a VI-a sînt interesante pentru că subliniază mai bine, prin dinamica convorbirii dinamica procesului mintal al copilului.

Răspunsurile elevului Bra. Zol. pun în evidenţă într-un mod sugestiv etapa respectivă de evoluţie. Punctele nu au greutate. Ele mai au însă mărime şi formă. Forma, mai ales, este clar reprezentată (cerc mai gros, cerc mai subţire etc.). Cel mai interesant este însă răspunsul cu privire la greutate. În primul rînd, însuşi faptul pe care l-am mai întîlnit, că aceste puncte, care au mărime şi formă, nu au greutate. Dar mai ales această observaţie ni se pare plină de interes : „Punctele nu au greutate, dar dacă ar avea punctul (1) ar fi mai mare decît punctul (2)". Răspunsul pune în evidenţă, în mod deosebit de pregnant, această instabilitate a relaţiilor dintre elementul conceptual şi cel perceptiv, figural, ca şi fluctuaţia pe care o generează.

Scanned with OKEN Scanner

Răspunsurile elevului Geo. Sor. din clasa a VI-a marchează o etapă superioară. La începutul convorbirii toate punctele sînt la fel. Dar modul în care se continuă conversaţia ne arată instabilitatea fuziunii conceptualo-figurale, instabilitatea subordonării elementului figural în raport cu cel conceptual. Dacă numărul dreptelor de intersecţie creşte şi prin aceasta, deci, creşte presiunea componentei perceptive, echilibrul se rupe, structura conceptuală se destramă, îşi pierde rolul reglator, iar componenta perceptivă se degajează şi devine dominantă.

În ultimul exemplu (Hor. Syb. clasa a VI-a), ideea punctului ca semn al locului este clar exprimată. Copilul este însă conştient de sursa ei : „Aşa ne-a învăţat". Faptul că nu e vorba deocamdată de o restructurare completă, rezultă dintr-o observaţie a copilului făcută la începutul convorbirii : „Sînt prea mici ca să poţi spune care e mai mare". Copilul se află încă, de fapt, la jumătatea drumului între interpretarea concret-perceptivă şi cea conceptuală. Ştie, a înţeles clar că nu trebuie să compare semnele aşa cum le vede efectiv. Dar de aici pînă la punctul, entitate abstractă, e un drum lung, pe care copilul nu l-a străbătut în întregime. Punctele devin mici, mici de tot, dar oricît am înainta ele nu-şi pierd, am zice, dimensionalitatea exprimată în însăşi micimea lor.

Şi totuşi, la sfîrşitul convorbirii, pus să confrunte conştient latura concret-intuitivă cu cea conceptuală, copilul neagă că punctul ar fi ceva mic. El revine la ideea că punctul indică locul. Balanţa se înclină din nou în favoarea cunoştinţelor geometrice.

Acest exemplu ilustrează deci momentul în care, în structura conceptului figural în curs de stabilizare, latura conceptuală cîştigă rolul dominant. Factorul esenţial îl constituie autoritatea cunoştinţelor şcolare. Procesul nu este însă terminat. Dovadă că uneori componenta perceptiv-figurală scapă de sub control şi se reafirmă în mod independent. Conceptul figural reprezintă încă o formaţie instabilă.

Concluzii parţiale

Ce concluzii se degajă din datele analizate pînă aici ?

1. În procesul formării conceptelor figurale la copii în cadrul procesului de învăţămînt trebuie să avem în vedere trei parametri relativ interdependenţi, dar ireductibili unul la celălalt :

— nivelul reflectării perceptive;

Scanned with OKEN Scanner

— nivelul operaţiilor logice ;
— nivelul cunoştinţelor geometrice.

Atît reflectarea perceptivă, cît şi posibilitatea utilizării cunoştinţelor geometrice depind de nivelul de dezvoltare al operaţiilor logice, dar bineînţeles nu derivă din acestea.

Aceasta înseamnă că nu putem conta pe o direcţie unică de evoluţie a proceselor mintale, de la intuitiv-concret la abstract. Avem, în realitate, cel puţin trei factori care, fiecare, progresează cu vîrsta în dependenţă de activitatea copilului, sub influenţa cunoştinţelor şcolare.

Or, cercetările noastre ne arată că în cursul constituirii conceptelor figurale aceşti trei factori, în funcţie de etapa la care au ajuns în cursul evoluţiei lor, se pot favoriza sau, dimpotrivă, se pot perturba reciproc. Un element de progres pe una din direcţii nu are ca urmare, neapărat, un progres în constituirea conceptului figural. După cum rezultă din paginile precedente, progresul pe o direcţie poate fi defavorizant pentru structura de ansamblu a conceptului figural. Dar sînt posibile şi cazuri în care rămînerea în urmă pe o direcţie poate favoriza formarea unei rezultante care concordă cu răspunsul corect.

Aşa, de exemplu progresul perceptiv, marcînd mai bine diferenţa concretă a două puncte, împiedică egalizarea lor sub raport geometric în cazul întrebării B, după cum, tot progresul perceptiv favorizează egalizarea punctelor în cazul întrebării C.

Progresul logic, independent de cunoştinţele geometrice, duce la diferenţierea punctelor în cazul întrebării C, dar asociat cu cunoştinţele geometrice duce la egalizarea lor („printr-un punct pot trece oricîte drepte"). Chiar şi achiziţia de cunoştinţe geometrice insuficient organizate poate avea un rol negativ (puncte care se deosebesc ca diametru, puncte care se deosebesc datorită unghiurilor etc.).

Aceste condiţii duc, cum am văzut, la o evoluţie complexă a conceptului figural, la curbe cu aspect sinusoidal, cu alternanţe de progres şi regres (sub raportul interpretării geometrice). În structura gîndirii copilului apar fenomene de interferenţă, stratificare, contradicţii sau fenomene de simbioză între motivaţii cu sens opus.

2. Analiza efectuată pînă aici referitoare la constituirea ideii de punct ne sugerează existenţa următoarelor etape în formarea conceptului figural :

a) Etapa pregeometrică, în care interpretarea imaginilor este concret-perceptivă (interpretare reglată însă logic cu mai

multă sau mai puţină eficienţă). În această etapă avem formaţii reflectorii (structuri logico-perceptive) stabile.

b) Etapa de mixtare a elementelor concret-perceptive cu cele geometrice. Apar formaţii mixte conceptualo-figurale insuficient fuzionate, cu predominarea elementului figural, formaţii instabile în care cele două componente se disociază uşor. Se manifestă fenomenele de stratificare, interferenţă, contradicţiile, simbiozele mintale.

c) Etapa caracterizată printr-o creştere a ponderii elementului conceptual, geometric, pînă la predominarea acestuia din urmă asupra laturii figurale. Formaţiile mixte capătă astfel aspectul conceptelor figurale, dar sînt încă instabile şi disociabile.

d) Conceptele figurale constituite, stabile cu predominarea elementului conceptual în structura fuzionată.

3. Dacă ne referim la ideea de punct în special, putem desprinde anumite tendinţe în ceea ce priveşte desubstanţializarea laturii figurale.

a) Greutatea este aceea la care copilul renunţă în primul rînd, ca urmare a influenţei jucate de motivaţia mai veche (punctul e atît de mic, încît n-are greutate).

b) A doua însuşire, în ordinea dificultăţii eliminării ei, este mărimea.

c) Cea mai rezistentă dintre însuşiri este forma, care cedează ultima.

Acestea nu constituie propriu-zis etape, ci tendinţe manifestate în atitudinea copilului în raport cu ideea de punct, întrucît nu se poate vorbi de momente distincte de evoluţie. Fiecare din aceste însuşiri îşi pierde treptat rolul în considerarea punctului. Aceasta este interpretarea care rezultă din datele statistice : coloanele de cifre exprimînd părerea copilului asupra deosebirilor de greutate, mărime şi formă sînt la fiecare nivel în relaţia următoare : $g < m < f$.

4. Dacă ne referim la direcţia principală în care se realizează progresul cunoaşterii de către copil a realităţii obiective (inclusiv interesele sale cognitive), din datele noastre se desprinde faptul că această direcţie este predominant cea realist-concretă pînă în clasa a V-a şi, într-o anumită măsură, şi în clasa a VI-a. Aşa se explică dificultăţile întîmpinate în constituirea conceptelor figurale, ca şi instabilitatea acestora chiar după ce, într-o primă formă, ele s-au constituit.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XV-lea

PUNCTUL

II. NUMĂRUL PUNCTELOR SITUABILE ÎNTR-UN INTERVAL DAT

I. Cîte puncte se pot pune între A şi B

Pentru a putea analiza statistic răspunsurile la această întrebare (F), le-am grupat pe următoarele variante principale.

1. Copilul indică un anumit număr de puncte.
2. „Depinde de distanţa dintre *A* şi *B*“ sau „Cîte încap“,
3. „Depinde de distanţa dintre puncte“, „Depinde de mărimea punctelor“. Fiind un număr mic de răspunsuri din aceste categorii şi deoarece au fost date de obicei împreună, le-am calculat în aceeaşi grupă.
4. „Multe“, „Mai multe“, „Foarte multe“.
5. „Pînă cînd se formează o linie“ sau „Pînă se unesc punctele“.
6. „Oricîte puncte“.
7. „Cîte puncte vrem“.
8. „O infinitate de puncte“.
9. Alte răspunsuri.

Rezultatele pe procente sînt indicate în tabela nr. 3.

La primul tip de răspunsuri găsim indicate cele mai diverse numere, în general cam între 10 şi 30, cu o uşoară tendinţă de creştere peste 30 la clasa a V-a. Singurul elev din clasa a VI-a care indică un număr anumit ajunge însă la 1 000. O statistică a acestor numere indicate de copii nu era posibilă datorită marii diversităţi de numere indicate. Ea nu ni s-a părut de altfel nici utilă.

Indicarea unui anumit număr dovedeşte faptul că pentru copiii respectivi punctul nu are încă altă semnificaţie decît aceea a punctului material.

Scanned with OKEN Scanner

Dar, considerînd punctul ca o realitate perceptibilă, copilul care indică un număr dat nu-şi pune nici problemele pe care această soluţie le deschide : punctul are oare o mărime determinată ? Distanţele dintre puncte sînt ele variabile ?

Constatăm din tabel că aceste probleme, deşi par a decurge firesc din considerarea punctului ca o realitate perceptibilă, nu apar decît la elevii din clasa a IV-a indicînd, de fapt, un stadiu superior, deşi nu e vorba încă de atitudinea mintală corectă cu privire la noţiunea pe care o considerăm.

Tabela nr. 3

Tipuri de răspunsuri	II	III	IV	V	VI
1. Este indicat un anumit număr de puncte	42,0	28,5	23,5	26,3	0,8
2. Depinde de distanţă, cîte încap	8,0	14,3	35,8	26,3	5,9
3. Depinde de distanţa dintre puncte, de mărimea punctelor	—	—	3,8	5,0	5,9
4. Multe, mai multe, foarte multe	2,0	8,6	8,6	6,2	1,7
5. Pînă se formează o linie, pînă se unesc	1,0	—	0,9	2,5	15,2
6. Oricîte puncte	—	2,9	0,9	—	5,0
7. Cîte puncte vrem	11,0	19,0	17,9	6,2	5,0
8. O infinitate de puncte	—	—	3,8	8,8	39,5
9. Alte răspunsuri	1,0	1,9	—	6,2	20,2
10. Fără răspuns	35,0	24,8	4,8	12,5	0,9

Admiterea variabilităţii dimensiunilor punctului l-ar putea conduce pe copil la ideea că, de fapt, punctul poate descreşte necontenit, poate ajunge oricît de mic, şi deci la noţiunea corectă de punct. Dacă ne propunem să eşalonăm etapele constituirii noţiunii de punct considerînd însă problema numai din perspectiva logicii adultului, ar trebui să admitem ideea variabilităţii dimensiunilor punctului ca una din etape. Statistic însă, fenomenul nu apare. Procentul copiilor care-şi pun

aceste probleme creşte constant începînd de la clasa a IV-a. Aceşti copii rămîn însă foarte puţini : 3,8%, 5%, 6%. Ei nu formează un număr important în nici una din clase şi deci acest gen de răspunsuri nu marchează o etapă în considerarea noţiunii de care ne ocupăm.

Acest dezacord între o ordine logic admisibilă, a constituirii noţiunii, şi ordinea reală este însă numai aparent.

De fapt, aşa cum am văzut, este inadmisibil să vorbim de o „geometrie spontană a copilului", de o construcţie a noţiunilor geometrice, ca şi a gîndirii în genere, printr-un proces de complicare şi perfecţionare internă.

Mai repede decît ajunge copilul să-şi poată da seama, ca urmare a creşterii capacităţii de abstractizare a gîndirii sale, că în cazul punctului dimensiunea micului semn care-l reprezintă poate descreşte oricît, el este pus dintr-odată în faţa unor afirmaţii ca : „punctul nu are nici o dimensiune", „segmentul *AB* are o infinitate de puncte". Cu alte cuvinte el este împins spre extremitatea acestei evoluţii, spre noţiunea abstractă, euclidiană a punctului, din afară, în cadrul procesului instructiv.

Etapa exprimată în propoziţii ca : „depinde de mărimea punctului", „punctele pot fi mai mici sau mai mari" etc. nu are timp să se desăvîrşească, înăbuşită de viziunea abstractă impusă de procesul predării geometriei.

Şi aşa cum se petrece şi cu alte noţiuni geometrice, are loc de fapt la cei mai mulţi copii nu o asimilare completă a noului sens al noţiunii, nu subordonarea componentei intuitive faţă de schema logică, ci o suprapunere a celor două straturi contradictorii, cel intuitiv şi cel abstract, care continuă să conviețuiască şi să se tulbure reciproc. Dovada completă a acestui fapt o vom obţine atunci cînd vom face o analiză în detaliu a situaţiei răspunsurilor clasei a VI-a.

Lucrurile sînt de fapt mai complicate decît apar în tabelul schematic. Există nenumărate nuanţe pline de interes pentru psiholog pe care schema nu le poate reţine.

Iată, de pildă, în ceea ce priveşte răspunsurile trecute la rubrica „Indică un anumit număr". Bod. Mar. (clasa a II-a) răspunde scurt : „Sînt 12 puncte". Ce. Ro (clasa a II-a) „Noi punem 20 de puncte".

St. Oct. (clasa a II-a) „Noi putem pune 23 puncte".

Sînt aici deosebiri de nuanţă.

Scanned with OKEN Scanner

Bod. Mar. pare să constate un fapt obiectiv. Cele 12 puncte constituie un fel de dat obiectiv.

La Ce. Ro. însă, şi mai ales la Ste. Oct., ideea dependenţei rezultatului de condiţiile de moment, de posibilităţile proprii, şi deci, în genere, ideea caracterului nedeterminat al răspunsului apare în acest „Noi putem pune...“ etc.

Bir. Zul. (clasa a II-a) răspunde „Vreo 20 de puncte“, cînd, de fapt, în desenul lui nu sînt decît 4 puncte.

Adm. Gh. (clasa a II-a) desenează 12 puncte şi răspunde „15—16 puncte“.

Cri. Mar. (clasa a II-a) este şi mai nehotărît. „Noi putem să punem 40 sau 100 de puncte. Nu ştiu...“ Copilul, indicînd aceste cifre, îşi dă de fapt seama că răspunsul este arbitrar, că nu sînt destule elemente pentru a-l determina.

Trecerea este deci aproape insensibilă la răspunsul de tipul „Multe, mai multe“. În clasa a II-a sînt numai 2 copii care răspund astfel, dintre care unul, de fapt, Mar. Vio. răspunde : „Noi putem pune mai multe puncte decît în desen“. Răspunsul marchează un moment psihologic extrem de interesant : momentul în care copilul face efortul să se degajeze de constrîngerea intuiţiei nemijlocite şi simte nevoia să se hazardeze în planul acţiunilor potenţiale.

Numărul răspunsurilor de tipul „Multe, foarte multe“ creşte, după cum rezultă din tabelă la clasele a III-a şi a IV-a, scăzînd apoi treptat la clasele a V-a şi a VI-a. Este forma pe care o ia la unii copii descoperirea faptului că numărul de puncte nu este determinat, sau că cel puţin există posibilităţi foarte mari în acest sens pe care desenul nu le poate realiza deplin. Ni se pare interesant a arăta că unul dintre copiii din clasa a II-a, Dum. Cri., răspunde : „Între aceste două linii se pot pune sextilioane de mii de puncte“.

Răspunsurile de tipul „Multe, foarte multe“, deşi par a marca o etapă în înţelegerea noţiunii de punct, nu apar ca formînd un grup important în nici una din clase. Cum spuneam, ele nu reprezintă decît una din modalităţile prin care copilul din clasele a III-a şi a IV-a exprimă ideea nedeterminării numărului de puncte al segmentului *AB*, modalitatea cu o frecvenţă relativ redusă.

Răspunsurile de tipul „Cîte încap“, „Depinde de depărtarea dintre *A* şi *B*“ etc. devin, după cum rezultă din tabelă, mai numeroase spre clasa a IV-a cînd ating o maximă. Numărul scade la clasa a V-a şi devine foarte mic la clasa a VI-a. Aceasta

este o altă modalitate de exprimare a nedeterminării numărului de puncte la care, după cum se vede, aderă un număr relativ mare de copii. Evident, indicarea dependenţei numărului de puncte de distanţa *AB* atestă faptul că pentru aceşti copii punctul este încă o realitate materială, perceptibilă intuitiv. Cu cît distanţa este mai mare, cu atît vor încăpea mai multe „grăunţe". Fără a părăsi domeniul intuitivului în înţelegerea noţiunii de punct şi fără a pune chiar problema variabilităţii dimensiunilor punctului, copiii sesizează faptul că în realitate nimeni nu le-a indicat o măsură fixă a intervalului *AB*, că acest interval poate deci varia de la un copil la altul şi că deci a răspunde cu un număr dat, cum fac foarte mulţi copii din clasa a II-a, înseamnă a da un răspuns cu totul particular, neconvenabil decît propriului lor desen. Ei simt nevoia generalităţii, ceea ce este extrem de important, şi o exprimă în această formulă de dependenţă a numărului de puncte de distanţa *AB*. Acest gen de răspunsuri reprezintă fără îndoială o etapă superioară în raport cu indicarea unui număr determinat. Ea apare firesc, ca urmare a dezvoltării generale a gîndirii copilului în sensul unei creşteri a capacităţii de interpretare obiectivă a datelor realităţii şi a capacităţii de generalizare. Dar aceasta nu este, după cum ne dăm seama, calea care duce la noţiunea abstractă de punct matematic. În ceea ce priveşte noţiunea însăşi de punct, amplitutidinea curbei nu indică nici o achiziţie nouă, nici un progres. De fapt, aceasta este ceea ce ne indică şirul de numere din tabelă : la mulţi copii, creşterea capacităţii de generalizare nu afectează sensul ideii de punct, care continuă să rămînă cantonat în planul intuiţiei.

Există însă o altă direcţie de evoluţie care merită să ne reţină interesul. E vorba de răspunsurile de tipul „Cît vrem". Şi această a treia modalitate de exprimare a nedeterminării este maximă la clasele III-IV. Aici însă nu se mai pune problema intervalului AB. Singurul lucru care contează este voinţa noastră, dorinţa noastră, adică absenţa obstacolului obiectiv.

Nu este acesta un punct de vedere pur subiectiv ? Nu înseamnă acest gen de răspuns ignorarea existenţei unei condiţionări obiective şi nu exprimă el un punct de vedere inferior faţă de răspunsul de tipul 2, de pildă ?

Problema este mai complicată. Acest gen de răspunsuri se constituie din două surse radical opuse, iar cifrele din tabelă exprimă de fapt realitatea contradictorie care stă la baza sa.

Scanned with OKEN Scanner

Faptul obiectiv cel mai important în legătură cu punctul pe care copilul din clasele III-IV îl poate sesiza şi îl poate conduce la înţelegerea corectă a noţiunii matematice de punct este acela că mărimea punctelor şi deci numărul lor în interval, nu sînt determinate (pentru a ajunge apoi la ideea că nu avem aici o limită). Acest fapt, pe care realitatea obiectivă îl impune dar este greu de sesizat, îşi găseşte un suport neaşteptat într-o atitudine mintală opusă, în tendinţa de absolutizare a propriului punct de vedere.

Copilul mai mic, cu o experienţă de viaţă redusă, se desprinde cu greu de viziunea concretă, imediată, deşi fragmentară, parţială, unilaterală, pe care o obţine la un moment dat, pentru a se situa într-un punct de vedere obiectiv, general valabil.

Nu e vorba, ca în concepţia lui Piaget, de o mentalitate egocentrică, de un egocentrism structural caracteristic gîndirii infantile. Nu e vorba de un mod deformat de a cunoaşte realitatea exprimînd un viciu de esenţă în mentalitatea şi gîndirea copilului. E vorba, ca în genere în deficienţele raţionamentelor sale de o insuficientă experienţă, de insuficiente cunoştinţe, de un exerciţiu insuficient în mînuirea aparatului logic, lacune care se remediază treptat şi care sînt departe de a avea universalitatea pe care le-o atribuie Piaget. Acelaşi copil, în acelaşi moment al evoluţiei sale intelectuale, poate da dovadă de obiectivitate în aprecierea, în interpretarea unora dintre faptele realităţii şi poate rămîne prizonierul celui mai desăvîrşit, aparent, subiectivism în aprecierea altora, pe care n-a avut prilejul să le aprecieze decît dintr-o persepectivă personală.

În răspunsurile de tipul „Putem pune cîte puncte vrem" este vorba de reunirea într-o soluţie unică a două atitudini mintale contradictorii, care într-un anumit moment al evoluţiei mintale a copilului (în problema de care ne ocupăm) nu se anulează, ci se sumează dînd maxima pe care o constatăm la clasele a III-a şi a IV-a.

Pe de o parte, sesizarea timidă, vagă, aproape inexprimabilă pentru copil a faptului nelimitării obiective a şirului de puncte cuprinse într-un segment (ca urmare a nelimitării micşorării continue a punctului), tendinţă superioară abia bănuită.

Pe de altă parte, manifestarea nelimitării subiective, un gen de arbitrar absolutizat (care nu este, de fapt, decît expresia ignorării, şi nu a neînţelegerii structurale, a necesităţii logice): „pot să pun cîte puncte vreau" („cît îmi place").

Scanned with OKEN Scanner

La elevul din clasa a II-a acesta este sensul aproape pur al lui „cîte puncte vrem".

La elevii din clasa a III-a şi a IV-a însă, cum spuneam, presimţirea caracterului obiectiv nedeterminat (în sens de nelimitat) al numărului de puncte se grefează pe atitudinea, care mai persistă încă, a unui anumit grad de arbitrar subiectiv şi obţinem astfel maximele respective.

La elevii din clasa a V-a însă cifrele cad brusc la un procent de 6,2%. La aceşti elevi datorită nivelului mai înalt de gîndire abstractă subordonată obiectivităţii, cele două sensuri opuse nu se mai sumează aşa cum s-a întîmplat la clasele a III-a şi a IV-a, ci dimpotrivă, se anulează în mare măsură. Termenul „cîte vrem" apare ca un termen suspect, pe care formularea subiectivistă îl compromite. El nu mai este apt pentru redarea impreciziei obiective. Soluţia „o infinitate de puncte" nu apare spontan, ca urmare a unui proces de maturizare internă, pentru a salva situaţia. Acest lucru deosebit de important, după părerea noastră, ni-l spune tabela nr. 3. Numai circa 7 copii (8,8%) din cele trei clase a V-a cercetate dau acest răspuns. Chiar copilul care mai păstrează soluţia „cîte vrem", mai simte uneori nevoia unor precizări.

Aşa, de exemplu, copilul Nas. Cri. răspunde : „Cîte vrem, pentru că le putem pune cît de depărtate vrem". Elementul obiectiv capătă o pondere evidentă în acest răspuns. Şi astfel, majoritatea copiilor care răspund la această întrebare continuă să se împartă între cei care indică un anumit număr (26,3) şi cei care fac să depindă impreciziunea răspunsului de nedeterminarea datelor obiective. Răspunsurile de tipul „Depinde de distanţă", „Cîte încap", reprezintă încă 26,3% din total.

La elevii din clasa a VI-a, procentul celor care mai răspund „Cîte vrem" scade, cum este şi firesc, şi mai mult, ajungînd la 5%.

În ceea ce priveşte răspunsurile de tipul „O infinitate de puncte". Asemenea răspunsuri nu apar la clasele a II-a şi a III-a. Ele apar abia începînd din clasa a IV-a. Frecvenţa lor este la această clasă foarte mică, 3,8% (4 copii). La clasa a V-a, numărul lor creşte, dar continuă să rămînă mic 8,8% (7 copii). În fiecare clasă aceştia reprezintă cîţiva copii izolaţi.

Abia la clasa a VI-a are loc o creştere bruscă, ajungîndu-se la aproape 40% (39,5%).

După părerea noastră, acest salt brusc este o bună dovadă a faptului că noţiunea respectivă este departe de a fi produsul

unei maturizări interioare, așa cum pare a reieși din concepția lui Piaget. Creșterea se datorește, se înțelege, și treptei superioare de dezvoltare la care ajunge gîndirea copilului la această vîrstă. Dar saltul foarte mare de la clasa a V-a la a VI-a, salt pe care în atîtea alte domenii nu-l întîlnim, nu se poate explica decît prin intervenția unui factor extern și acesta constă, evident, în trecerea la predarea sistematică a geometriei în clasa a VI-a. Ignorarea acestei influențe nu poate duce decît la interpretări false. În realitate, saltul foarte mare pe care-l fac copiii în utilizarea termenului de infinit ca răspuns la problema discutată exprimă introducerea sistematică a acestuia în predarea geometriei.

Și atunci problema care se pune este următoarea :

Care este sensul real pe care acești copii îl dau termenului de infinit (sau „nesfîrșit") folosit? Au ajuns ei la o înțelegere corectă, cel puțin apropiată ? Evident cifrele din tabelă nu dau nici un răspuns la aceste întrebări. Analiza noastră va putea fi întregită după ce vom apela și la celelalte răspunsuri ale copiilor referitoare la problema de care ne ocupăm.

În sfîrșit, un răspuns plin de interes este cel de tipul „Pînă se formează o linie" (la clasa a V-a avem și varianta: „Pînă se unesc"). Putem oare considera că acest răspuns este dovada faptului că elevii respectivi au ajuns la acel grad de reversibilitate al operațiilor de gîndire, încît, izbutind să cuprindă simultan, într-o viziune unică, cele două sensuri ale parcursului, de la linie la punct și de la punct la linie, ei pot să înțeleagă și continuitatea și divizibilitatea nelimitată?

Evident, și în acest caz e greu să răspundem numai pornind de la cifre.

Ceea ce este limpede e faptul că și acest tip de răspuns cunoaște la clasa a VI-a un salt remarcabil.

II Unde se pot pune mai multe puncte: între A și B sau între C și D ?

E limpede că dezavantajul mare al acestei întrebări este acela că incită la un răspuns pripit, mai ales la copii, prin simplitatea sa aparentă. De aceea adăugăm și îndemnul: „Gîndiți-vă bine înainte de a răspunde".

Răspunsurile la această întrebare au calitatea de a ne oferi o imagine mai completă a fenomenului discutat: formarea la copii a ideii de punct.

Ne dăm seama de la început că răspunsurile de tipul „Pot fi puse mai multe puncte între *C* şi *D*“ nu concordă logic decît cu următoarele tipuri de răspunsuri la întrebarea F : a) indicarea unui anumit număr, b) „Depinde de distanţă“. Cu toate celelalte tipuri de răspuns obţinute la întrebarea F, răspunsul „Încap mai multe puncte între *C* şi *D*“ nu concordă logic.

Tabela nr. 4

Tipuri de răspunsuri	II	III	IV	V	VI
1. Mai multe puncte încap între *C* şi *D*	73,0	72,4	70,7	76,3	65,4
2. Cîte încap, depinde de distanţă	—	1,9	2,9	—	1,7
3. Depinde de distanţa dintre puncte, de mărimea punctelor	—	—	1,9	8,7	5,0
4. Oricîte puncte	—	—	—	—	2,5
5. Cîte puncte vrem	1,0	0,9	0,9	2,5	1,7
6. O infinitate de puncte	—	—	0,9	1,2	11,0
7. Alte răspunsuri	3,0	0,9	13,2	6,3	1,7
8. Fără răspuns	23,0	23,9	9,5	5,0	11,0

Să urmărim acum cifrele din tabela nr. 4. Se constată imediat că avem aici o grupare masivă în jurul unui singur tip de răspuns, cum nu găsim nicăieri în tabela nr. 3. Şi anume, tocmai răspunsul de tipul : „Mai multe puncte încap între *C* şi *D*“.

La clasa a II-a, 73% dintre copii dau acest răspuns. La aceştia, cum era şi de aşteptat, nu există vreo îndoială în această privinţă.

Un singur copil dintre cei care au răspuns la întrebarea F : „Cîte vrem“ răspunde la întrebarea G : „La fel“. Un singur copil răspunde că se pot pune între *A* şi *B* mai multe puncte. Doi copii dau răspunsul „la fel“, după ce indicaseră la F un anumit număr. (Unul dintre ei „23 de puncte“, iar celălalt este copilul care a dat răspunsul „sextilioane de mii de puncte“). 23 de copii nu răspund de loc.

Numărul răspunsurilor de tipul „Între *C* şi *D* încap mai multe puncte“ scade treptat spre clasele mai mari. Dar faptul cel mai important este că această scădere este extrem de lentă, apărînd chiar o creştere la clasa a V-a. La clasa a VI-a, procentul răspunsurilor de acest tip este încă foarte ridicat : 65,4% !

Să confruntăm acum curba acestui tip de răspuns (G_2) cu curba răspunsurilor obţinute la întrebarea F, de tipul „Indică un anumit număr“ şi „Depinde de distanţă“ (fig. 21). După ce sumăm pe clase procentele acestora din urmă, obţinem : 50%, 42,8%, 59,3%, 52,6%, 6,7% (curba G_1).

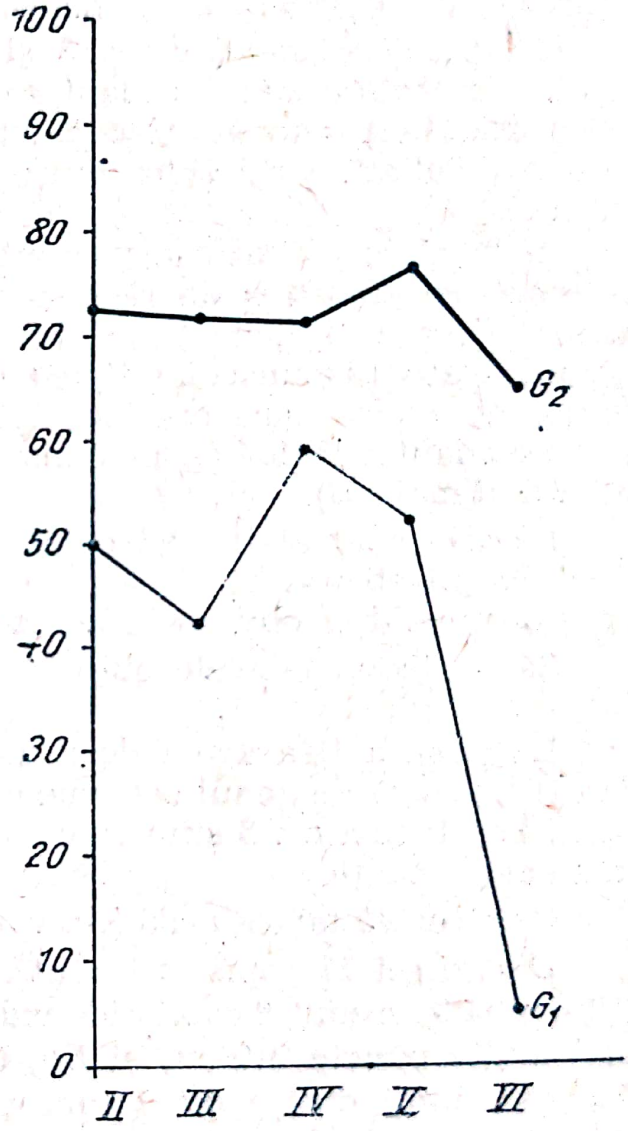


Fig. 21

Concordanţa logică ar fi cerut ca cele două curbe să coincidă, cel puţin, cu aproximaţie.

Or, ce se constată ? În primul rînd, valorile curbei G_2 sînt mult mai mari decît cele ale curbei G_1.

Aceasta înseamnă că, dintre copiii care răspund „Între *C* şi *D* încap mai multe puncte“, foarte mulţi se recrutează dintrei cei care la F au dat alte răspunsuri decît cele cerute de concordanţa logică cu răspunsul de mai sus.

În al doilea rînd în timp ce constatăm la clasa a VI-a, la răspunsurile de tipul (1) şi (2) date la întrebarea F, o scădere masivă (se ajunge la 0,8% şi 5,9%), răspunsurile de tip 1 la întrebarea G se menţin încă la un nivel extrem de ridicat : 65,4%. Ruptura este aici evidentă. Aceasta înseamnă că, chiar la clasa a VI-a, foarte mulţi dintre copiii care la întrebarea F dau răspunsuri de tipul „Ori-

cîte vrem, infinit" nu sînt consecvenţi cînd trebuie să răspundă la întrebarea G. Asemenea răspunsuri ar fi cerut în mod logic şi la întrebarea G răspunsuri de acelaşi gen. Dacă putem pune oricîte puncte între *A* şi *B* fără să ne punem deci problema distanţei), atunci tot oricîte puncte trebuie să putem pune şi între *C* şi *D*, tot fără să ne punem problema distanţei. La fel pentru „Cîte vrem", la fel şi, cu atît mai mult, pentru „Infinit".

Comparaţia tabelelor nr. 3 şi nr. 4 nu ne oferă decît o imagine globală a neconcordanţei dintre cele două categorii de răspunsuri la foarte mulţi copii. Şi mai instructivă însă este analiza detaliată a relaţiilor dintre cele două categorii de răspunsuri.

În tabelele pe care le prezentăm mai jos, dăm o imagine a repartiţiei tipurilor de răspunsuri obţinute la întrebarea G pentru fiecare răspuns tipic obţinut la întrebarea F. Nu am reţinut toate răspunsurile tipice obţinute la întrebarea F, ci numai pe acelea care prezintă interes din punctul de vedere al concordanţei logice cu răspunsurile la întrebarea G (în sensul arătat mai sus).

Fiecare rînd al tabelei corespunde unui răspuns tipic obţinut la întrebarea F, fiecare coloană a tabelului corespunde unui răspuns tipic obţinut la întrebarea G.

Să analizăm tabelele obţinute astfel la fiecare clasă.

La clasa a II-a avem doar un număr redus de copii care dau răspunsuri de genul celor pe care le luăm acum în consideraţie. Din tabela nr. 3 ştim că circa 80% dintre copii nu se află în această situaţie.

Ce ne arată tabela nr. 5 (clasa a II-a) ?

Dintre cei 11 copii care arată că între *A* şi *B* putem pune „Cîte puncte vrem", 9 copii răspund la întrebarea G „Putem pune mai multe puncte între *C* şi *D*", un singur copil răspunde „la fel", iar unul dintre cei 11 nu răspunde de loc. Există deci un singur copil din cei o sută cercetaţi care la această vîrstă conferă răspunsului „Cîte vrem" semnificaţia de nedeterminare obiectivă.

Să urmărim ce se întîmplă la celelalte clase cu răspunsul „Cîte vrem" în raport cu răspunsurile la întrebarea G.

La clasa a III-a, 19% dintre copii răspund că se pot pune între *A* şi *B* „Cîte puncte vrem" (vezi tabela nr. 3) clasa a

III-a). 15,2% însă (raportat tot la totalul clasei) manifestă aceeași inconsecvență la întrebarea G, răspunzînd că se pot pune mai multe puncte între *C* și *D*. Un singur copil este consecvent, răspunzînd tot „Cîte vrem" și la întrebarea G. Ceilalți trei nu răspund de loc la întrebarea G.

Urmărind tabelele analitice, constatăm că situația rămîne aceeași la toate clasele, inclusiv clasa a VI-a.

Tabela nr. 5

	Mai multe puncte în *CD*	La fel	Oricîte	Cîte vrem	Infinit
Clasa a II-a					
Cîte vrem	9,0	1,0	—	—	—
Oricîte	—	—	—	—	—
Pînă se formează o linie	1,0	—	—	—	—
Pînă se unesc	—	—	—	—	—
Infinit	—	—	—	—	—
Clasa a III-a					
Cîte vrem	15,2	—	—	0,9	—
Oricîte	2,9	—	—	—	—
Pînă se formează o linie	—	—	—	—	—
Pînă se unesc	—	—	—	—	—
Infinit	—	—	—	—	—
Clasa a IV-a					
Cîte vrem	12,2	1,9	—	0,9	—
Oricîte	0,9	—	—	—	—
Pînă se formează o linie	0,9	—	—	—	—
Pînă se unesc	—	—	—	—	—
Infinit	1,9	0,9	—	—	0.9
Clasa a V-a					
Cîte vrem	3,7	1,3	—	1,3	—
Oricîte	—	—	—	—	—
Pînă se formează o linie	2,5	—	—	—	—
Pînă se unesc	2,5	—	—	—	—
Infinit	6,2	1,3	—	1,3	—
Clasa a VI-a					
Cîte vrem	3,4	0,8	—	0,8	—
Oricîte	0,8	2,5	—	—	—
Pînă se formează o linie	11,8	—	—	—	—
Pînă se unesc	—	—	—	—	—
Infinit	26,9	6,9	—	—	4,2

La clasa a IV-a, dintre cei 19 copii (17,9% care răspund „Cîte vrem“ la întrebarea F, 13 copii (12,2%) răspund „Mai multe între C şi *D*“, 2 copii (1,9%) răspund „La fel“, iar unul răspunde tot „Cîte vrem“. Ceilalţi 3 nu răspund la întrebarea G.

La clasa a V-a au rămas numai 5 elevi (6,2%) care răspund la întrebarea F „Cîte vrem“. Dintre aceştia, 3 răspund la G „Mai multe între C şi *D*“, unul răspunde „La fel“ şi unul tot „Cîte vrem“.

La clasa a VI-a, dintre cei 6 elevi (5,0%) care răspund „Cîte vrem“, unul singur răspunde „La fel“ la întrebarea G şi unul răspunde tot „Cîte vrem“.

Am sintetizat în tabela alăturată această situaţie, raportînd de astă dată numărul celor care dau diferite răspunsuri la întrebarea G la numărul celor care, în fiecare clasă, răspund „Cîte vrem“ la întrebarea F. Numărul mic de elevi care-l avem de luat în consideraţie face ca procentele să nu poată fi apreciate decît cu toată rezerva.

Tabela nr. 6

Clasa	1	2	3	4	5
II	11	11,0	81,8	9,1	9,1
III	20	19,0	80,0	5	15
IV	19	17,9	68,4	15,8	15,8
V	5	6,2	60,0	40,0	—
VI	6	5,0	66,7	33,3	—

Explicaţia tabelei nr. 6.

Pe coloana 1, totalul elevilor din fiecare clasă care răspund „Cîte puncte vrem“ la întrebarea F.

2. Procentul obţinut din raportarea aceloraşi cifre la totalul elevilor.

3. În procente — dintre elevii care la F răspund „Cîte vrem“ — cîţi răspund „Mai multe puncte putem pune în *CD*“.

4. În procente, prin aceeaşi raportare, elevii care răspund „La fel“ sau tot „Cîte vrem“.

5. Elevii care la G nu răspund de loc (dintre cei luaţi aci în consideraţie).

Se constată că procentul celor care răspund la întrebarea G „Se pot pune mai multe puncte între C şi D“ (din totalul

celor care la F răspund „Cîte vrem“) scade treptat către clasele a V-a şi a VI-a şi, în schimb, creşte — deşi mai neregulat— procentul celor care dau la G răspunsuri de tipul „La fel“ sau „Cîte vrem“.

Numărul elevilor care intră aici în consideraţie este relativ mic, ceea ce explică şi neregularitatea procentelor. Este, totuşi, indiscutabil faptul că, în mare, se constată următorul fenomen :

În timp ce numărul elevilor care răspund cu „Cîte puncte vrem“ la întrebarea F creşte către clasele a III-a şi a IV-a şi scade apoi brusc extrem de mult la clasele a V-a şi a VI-a, procentul celor care păstrează acelaşi răspuns şi la întrebarea G (prin raportare la numărul elevilor care răspund „Cîte vrem“) creşte vizibil către ultimele clase.

Alura cu totul deosebită a celor două curbe confirmă ipoteza emisă de noi mai sus cu privire la semnificaţia reală a răspunsului „Cîte puncte vrem“.

Existenţa celor două tendinţe divergente, contradictorii este pusă în evidenţă de răspunsurile date de acelaşi copil la cele două întrebări (F şi G).

Problema pe care trebuiau, de fapt, s-o rezolve copiii în acest caz era aceea de a disocia aprecierea numărului posibil de puncte situabile între cele două repere de aprecierea distanţei dintre aceste repere.

Problema se pune, cum spuneam, numai pentru cazul copiilor care gîndesc — sau presupunem noi că gîndesc — nedeterminarea numărului de puncte (sau, mai exact, nelimitarea numărului de puncte).

Statistica noastră ne arată că, dintre copiii care răspund că putem pune „Cîte puncte vrem“, se desprind din ce în ce mai mulţi copii (relativ) pe măsură ce urcăm spre clasele mai mari, pentru care acest „Cîte vrem“ dobîndeşte o semnificaţie obiectivă, oglindeşte o nelimitare obiectivă a numărului de puncte.

Această modificare exprimă însă o creştere a capacităţii generale a copilului de a lua în consideraţie varietatea condiţiilor obiective în reflectarea fenomenelor realităţii, ceea ce face ca expresia „Cîte vrem“ să fie considerată din ce în ce mai puţin adecvată de către copii.

Aşadar, în timp ce cele două tendinţe opuse ale copilului cu privire la întrebarea G se sumează la clasele a III-a şi a

IV-a, la clasele a V-a și a VI-a contradicția lor devine manifestă și constatăm o scădere masivă a numărului copiilor care răspund „Cîte puncte vrem".

★

Foarte interesantă este, după noi, problema răspunsurilor de tipul „Pînă se formează o linie".

Tabela nr. 3 ne arată că, în timp ce în clasele II-IV nu există decît cîte un copil răzleț care dă un astfel de răspuns, că, în timp ce în clasa a V-a numărul acestor copii este încă extrem de redus, dintr-o dată în clasa a VI-a, pentru prima oară, ei ocupă un loc relativ important : 15,2%.

Este evident că un astfel de răspuns presupune dezvoltate anumite aspecte esențiale ale gîndirii logice, care au un rol de prim ordin în însușirea geometriei.

Faptul cel mai important este posibilitatea copilului de această vîrstă de a realiza mintal o construcție perfect definită dintr-o cantitate nedeterminată de elemente nedeterminate.

El sesizează — și acest lucru ni se pare de cea mai mare importanță pentru gîndirea sa — posibilitatea de a construi definitul prin compunerea a două nedeterminări.

Aceasta presupune :

— posibilitatea de a gîndi iterația nedeterminată.

— sudarea într-o viziune unică a celor două operații opuse: divizarea și recompunerea întregului, ceea ce exprimă dezvoltarea reversibilității gîndirii.

S-ar putea crede că, avînd aceste calități, elevul respectiv este apt să înțeleagă noțiunea abstractă de punct.

În realitate însă, așa cum rezultă din considerarea răspunsurilor date de elevii respectivi la întrebarea G, întregul proces se desfășoară încă la un nivel intuitiv, care nu permite constituirea deplină a noțiunii propriu-zise.

Absolut toți acești copii, din toate clasele, răspund invariabil la întrebarea G: „Se pot pune mai multe puncte între C și D".

Cu alte cuvinte, pentru toți acești copii — deci și pentru cei din clasa a VI-a! — recompunerea segmentului din puncte nu constituie, ceea ce am fi putut bănui, expresia unui șir infinit de operații de diviziune și de recompunere. Punctele sînt realități concrete, intuitive, sînt niște mici obiecte, care prin îmbinare pot da naștere unui alt obiect, mai mare.

Scanned with OKEN Scanner

Răspunsul de tipul „Pînă se formează o linie" poate fi considerat ca un răspuns de tip superior prin nivelul operațiilor mintale pe care le implică. Această opinie este confirmată și de forma curbei : o creștere importantă la clasa a VI-a. La elevii mai mici, din clasele II-V, asemenea răspunsuri sînt foarte rare. Și, cu toate acestea, toți elevii care dau acest răspuns, fără excepție, răspund invariabil la întrebarea G : „Mai multe puncte se pot pune între C și D". Răspunsul la întrebarea F de tipul „Pînă se formează o linie" este singurul tip de răspuns căruia elevii nu-i asociază niciodată un alt tip de răspuns decît cel socotit de tip inferior: „Mai multe puncte se pot pune între *C* și *D*".

Cum se explică această situație ?

Avem și aici doi parametri deosebiți (deși influențîndu-se reciproc). Este vorba, pe de o parte, de nivelul de dezvoltare al aparatului logic la care ajunge copilul la un moment dat.

Este vorba, pe de altă parte, de capacitatea de a realiza operațiile mintale în planul simbolic, abstract.

Putem presupune că, într-o anumită măsură, cele două direcții de evoluție se influențează și se sprijină reciproc. Dar ele nu exprimă o singură caracteristică a gîndirii.

În funcție de împrejurări, de datele problemei ce urmează a fi rezolvată, e posibil să apară un decalaj între cele două linii de evoluție.

Aceasta este situația în cazul răspunsului de tipul „Pînă se formează o linie". Dînd acest răspuns, copiii respectivi dovedesc că dispun de mijloacele logice necesare sintetizării celor două operații, diviziunea și recompunerea, într-o viziune unică, mijloace necesare pentru formarea ideii de punct.

Răspunsul dat la întrebarea G de către aceiași copii — „Se pot pune mai multe puncte între *C* și *D*" — nu este dovada unei inconsecvențe logice, nu este dovada unei căderi la un nivel logic inferior.

În condițiile problemei puse, aceleași mijloace logice pot opera fie cu elemente intuitive, fie, prin intermediul simbolurilor, cu elemente abstracte.

Soluția „Pînă se formează o linie", corectă în sine ca formă logică, permite — la nivelul de dezvoltare intelectuală la care ne referim: 11-12 ani — intrarea în funcțiune a unor mijloace intuitive care duc apoi — fără a se părăsi stringența logică ! aceasta este important — la o interpretare necorespunzătoare. Dacă punctele trebuie să dea prin aglomerarea și

alăturarea lor continuă, pînă la urmă, o linie, nu putem afirma că vor fi mai multe puncte dacă linia va fi mai lungă? Se înţelege că da.

Din datele obţinute pînă aici constatăm deci faptul că, ajungînd la procedeul reversibilităţii — descompunerea şi recompunerea segmentului — pentru a defini punctul, copilul rămîne, totuşi, în planul intuiţiei. Putem formula următoarea ipoteză. Nu este sigur că copilul nu e capabil de ideea diviziunii nelimitate a segmentului (mai ales copilul din clasa a VI-a). Dar e posibil ca reversibilitatea însăşi, care-l readuce pînă la urmă la segment (imagine intuitivă), să frîneze mersul operaţiei de divizare şi să-l oprească la hotarele imaginii intuitive. Iată deci, dacă ipoteza este justă, un exemplu deosebit de interesant privitor la instabilitatea conceptelor figurale la această vîrstă, instabilitate a cărei sursă rezidă în contradicţiile interne, nedepăşite, ale structurii conceptului figural în curs de constituire.

★

În ceea ce priveşte răspunsurile de tipul „Putem pune între *A* şi *B* oricîte puncte vrem", la clasa a III-a avem trei copii (2,9%) care dau astfel de răspunsuri, toţi aceştia răspunzînd la întrebarea G: „Mai multe puncte pot fi puse între *C* şi *D*".

La clasa a IV-a avem un singur copil, şi acesta dînd acelaşi răspuns la întrebarea G.

La clasa a V-a, nici un copil nu răspunde „Oricîte puncte".

Copiii abandonează deci treptat răspunsul de tipul „Oricîte puncte", pe măsură ce trec în clasele mai mari. El nu-i mai satisface, aşa cum nu-i mai satisface nici răspunsul de tipul „Cîte vrem". Analiza corelaţiei cu răspunsurile la G ne arată că răspunsul de tipul „Oricîte" nu are încă la copiii din clasele III-IV (cei cîţiva care apelează la această soluţie) semnificaţia sigură a nedeterminării obiective.

Dar iată că la clasa a VI-a lucrurile se schimbă (fenomen pe care, după cum am văzut, nu-l constatăm la răspunsurile de tipul „Pînă se formează o linie"). Dintre cei 6 copii care dau asemenea răspunsuri, 3 — deci jumătate — răspund la întrebarea G „La fel" (deci tot „oricîte"). Doi subiecţi nu răspund la întrebarea G şi numai unul singur este în mod manifest inconsecvent, răspunzînd la G cu „Mai multe puncte se pot pune între *C* şi *D*".

Comparaţia între evoluţia răspunsurilor de tipul „Pînă se formează o linie“ şi „Oricîte“ este foarte instructivă. Pînă la clasa a V-a, toţi copiii care dau asemenea răspunsuri nu rezistă la întrebarea G şi răspund greşit, susţinînd că se pot pune mai multe puncte între *C* şi *D*.

La clasa a VI-a, numărul copiilor care utilizează cele două tipuri de răspunsuri creşte brusc. Dar tot aici apare deosebirea. În timp ce toţi copiii care au răspuns „Pînă se formează o linie“ continuă să răspundă la G cu „Mai multe puncte între *C* şi *D*“, jumătate dintre copiii care răspund „Oricîte“ se dovedesc, la întrebarea G, consecvenţi (pentru prima dată) şi răspund „La fel“.

În aparenţă, cele două tipuri de răspuns „Pînă se formează o linie“ şi „Oricîte“ sînt echivalente. Ele par să marcheze o etapă apropiată de răspunsul corect: „O infinitate de puncte“.

De fapt însă, o analiză mai atentă pune în evidenţă deosebiri interesante.

Răspunsul de tipul „Pînă se formează o linie“ oglindeşte direct dezvoltarea mijloacelor logice utilizate de copil, posibilitatea sa de a apela simultan la operaţiile de diviziune şi recompunere logică pentru descrierea unui fenomen. Situarea de la început în planul elementelor intuitive elimină dificultăţile. Creşterea este continuă, deşi cu un salt brusc la clasa a VI-a.

Contradicţia există aici, cum spuneam, între superioritatea mijloacelor logice puse în acţiune şi inferioritatea elementelor cu care se operează. Rezultatul este, cum am văzut, generalitatea răspunsului greşit, chiar şi la clasa a VI-a la întrebarea G.

În cazul răspunsului de tipul „Oricîte“, lucrurile stau altfel. Contradicţia rezidă în însăşi noţiunea utilizată (ca şi în cazul răspunsului de tipul „Cîte vrem“, de care, de altfel, este într-o anumită măsură apropiat). „Oricîte“ exprimă bine nedeterminarea obiectivă a numărului de puncte situate între cele două repere, dar aceasta numai cu condiţia ca termenul respectiv să facă parte dintr-un angrenaj logic suficient de evoluat. În realitate însă, la clasele III-IV, aşa cum arată datele obţinute de noi, termenul „Oricîte“ este încă grevat de ideea unui grad de arbitrar, deci de o nedeterminare de origine subiectivă („oricîte“ confundat cu „Oricîte vrem“, „Cîte doresc eu“). Din această cauză, numărul copiilor care dau acest răspuns scade de la 3 la 1 şi apoi la 0 în clasa a V-a.

Scanned with OKEN Scanner

În clasa a VI-a lucrurile se schimbă „Oricîte", beneficiind de un angrenaj logic superior (în raport cu stadiile precedente), își modifică semnificația dobîndind-o pe cea de nedeterminare obiectivă, fapt pe deplin atestat de procentul copiilor care se dovedesc consecvenți la întrebarea G și răspund „La fel".

La răspunsul de tipul „Pînă se formează o linie", situarea, din cauza intervenției liniei, în planul mijloacelor intuitive împiedică apariția răspunsurilor corecte.

★

Să revenim acum la răspunsurile de tipul „O infinitate de puncte". Tabela nr. 3 ne-a arătat că asemenea răspunsuri apar abia din clasa a IV-a, crescînd spre clasa a V-a și marcînd un progres masiv la clasa a VI-a, cînd aproape 40% din copii oferă această soluție. Așa cum s-a văzut, în clasa a VI-a răspunsurile de acest tip sînt cele mai numeroase.

Dar există la toți copiii din clasa a VI-a o înțelegere suficient de temeinică a noțiunii respective ?

Tabela nr. 4, ca și tabela analitică (nr. 5), dezvăluie următoarea situație. Curba răspunsurilor date la întrebarea G de tipul „infinit" crește aproape paralel cu curba aceluiași răspuns la întrebarea F, ceea ce de asemenea este semnificativ. Dar cu cît este mai scăzut nivelul acestor răspunsuri la întrebarea G față de întrebarea F!

Clasa	F	G
IV	3.8	0,9
V	8,8	1,2
VI	39,5	11,0

Un număr relativ mic de copii dintre cei care susțin că între *A* și *B* avem o infinitate de puncte sînt consecvenți cînd se trece la întrebarea „Unde se pot pune mai multe puncte ?", răspunzînd cu „La fel" sau „Tot o infinitate". La clasele a IV-a și a V-a, numai cîte un copil, iar la clasa a VI-a 11% dau astfel de răspunsuri.

Aceasta înseamnă că chiar în clasa a VI-a, pentru circa 72% dintre copiii care folosesc termenul de infinit, termenul acesta nu are încă semnificația corectă deplină.

Experimente individuale

Să completăm imaginea obținută prin analiza datelor statistice cu cîteva exemple extrase din experimentele individuale.

Clasa a III-a

Pred. Aur. (10,0): (Începe prin a face o serie de puncte între *A* și *B*.

Apoi numără și găsește 16 puncte):
Exp. S-ar putea și mai multe puncte?
El. Dacă le-am face mai mici și mai strînse.
Exp. Dar care ar fi cel mai mare număr de puncte ce ar putea fi cuprinse?
El. (mai completează cu o serie de puncte și apoi numără) 35 de puncte.

Max. Le. (9,5): (desenează punctele): 20 de puncte.
Exp. Dar mai multe nu se poate?
El. 100 de puncte.
Exp. Și mai multe?
El. Nu se mai poate.

Clasa a IV-a

Ion Șerb. (10,8) (fără a desena): 50 de puncte.
Exp. Și maximum?
El. 70—80.

Nic. Gabr. (10,9): Să le punem unul lîngă altul?
Exp. Da. Cît de multe s-ar putea pune?
El. (tace) Nu pot să-mi închipui.

Pop. Eug. (10,9) Zece puncte.
Exp. Mai multe nu se poate?
El. Dacă le facem mai mici încap mai multe.

Clasa a V-a

Che. Iul. (11,10): Punem un singur punct.
Exp. Mai multe nu?
El. Ba și mai multe.
Exp. Cîte?
El. Pînă se formează o linie.
Exp. Da, dar cîte puncte sînt în cazul acesta?
El. Cam vreo 20, ca să rămînă distanță între ele.
Exp. Ai spus „Pînă se formează o linie". Deci cîte puncte punem fără să rămînă distanță între ele?
El. (se gîndește) Cam vreo 40.

Clasa a VI-a

Il. Just. (12,8) : Eu cred că un număr infinit de puncte.

Exp. Ce înțelegi printr-un număr infinit de puncte ?

El. Adică atîtea cîte vrem. Nu ne oprim niciodată. Depinde de mărimea punctelor. E în funcție cum vrem noi, cît de mari.

Întrebarea G. El : Între C și D putem pune mai multe puncte.

Geo Sor. (12,6) : Punem atîtea puncte pînă atinge punctul celălalt.

Exp. Și cîte vor fi în cazul acesta ?

El. Nu știu cîte.

Exp. Și n-am putea afla ?

El. (tace).

Exp. Gîndește-te.

El. Un număr de puncte infinite. Depinde cît de mare este distanța.

Hor. Syb. (13) : Oricît de multe

Exp. Cîte? O sută? O mie ?

El. O infinitate.

Exp. Compară distanțele *AB* și *CD*. Putem avea mai multe puncte între *C* și *D* ?

El. Nu știu ce să spun...

Exp. Dacă și aici, și aici avem o infinitate de puncte... Gîndește-te.

El. Da, totuși. Parcă între *C* și *D* s-ar putea pune mai multe puncte.

Bun. Ghe. (12,6) : O infinitate de puncte.

Exp. De unde știi ?

El. Dacă le unim se formează un segment de dreaptă și într-un segment de dreaptă sînt o infinitate de puncte.

Exp. Dar aici (între *C* și *D*) ? Unde se pot pune mai multe puncte ?

El. Tot atîtea.

Exp. De ce

El. Și aici, și aici, tot o infinitate de puncte.

Exp. Ce înseamnă o „infinitate de puncte" ?

El. Un număr oricît de mare. Care nu se sfîrșește niciodată.

Aceste exemple completează rezultatele statistice.

Ceea ce caracterizează răspunsurile copiilor din clasa a III-a şi a IV-a este formarea ideii de număr nedeterminat de puncte în funcţie de mărimea acestora şi de distanţa dintre ele.

Acest stadiu cuprinde două substadii: în primul substadiu copilul admite posibilitatea de a depăşi, printr-o reprezentare mintală numărul de puncte efectiv realizat, depăşire care însă îi apare ca fiind limitată. În al doilea substadiu, depăşirea pe cale mintală nu este limitată şi copilul declară doar că „nu-şi poate închipui cîte ar mai putea fi puse (ex. Nic. Gab.).

Din clasa a V-a procedeul reversibilităţii începe să fie utilizat mai frecvent dar, aşa cum ne sugerau şi datele statistice, copilul care-l utilizează rămîne cantonat în intuitiv, prezentînd, într-o anumită măsură, chiar un regres în raport cu ideea de nedeterminare: numărul de puncte necesare pentru a se forma o linie este limitat.

La copiii din clasa a VI-a, în legătură cu cunoştinţele de geometrie, apare frecvent răspunsul „O infinitate de puncte". Dar, după cum rezultă din exemple (şi după cum era de prevăzut şi din analiza datelor statistice), conţinutul real al acestui tip de răspuns la elevii din clasa a VI-a este încă legat de o structură intuitivă.

II. Just, afirmă că între *A* şi *B* avem o infinitate de puncte, dar adaugă: „E în funcţie cum vrem noi, cît de mari". Aşadar, termenul „infinit" utilizat se sprijină pe o accepţie mai veche, numai în aparenţă depăşită. Infinit are aici, în realitate, sensul de nedeterminat, de variabil, iar variabilitatea este legată de o structură intuitivă (mărimea variabilă a punctului).

Găsim din nou aspectul stratificat al acestor formaţii mentale în curs de constituire: ideea de inifinit s-a suprapus peste formaţii mai vechi („Cîte vrem", „Depinde cît sînt de mari"), fără să fi avut loc procesul de restructurare profundă cerut de constituirea conceptului figural. În stadiul respectiv, formaţia mixtă, concepto-figurală, nu este încă complet amalgamată, avînd un caracter labil evident, cu preponderenţa componentei intuitive.

Cu copilul Hor. Syb. ne aflăm într-un stadiu superior. Raportarea la mărimea punctelor, la distanţele dintre ele nu apare. Pus să compare distanţele *AB* şi *CD*, copilul ezită. Cele două direcţii — cea intuitivă şi cea abstract-simbolică — se

echilibrează pentru moment. Şi, totuşi, în această problemă, balanţa se înclină în favoarea componentei intuitive.

În sfîrşit, la copilul Bun. Ghe., noţiunea apare ca fiind complet însuşită. Reversibilitatea operaţiilor îi oferă posibilitatea de a cuprinde într-o viziune unică divizibilitatea nelimitată a segmentului, ca şi reconstituirea acestuia din numărul nelimitat de elemente obţinute.

Concluzii parţiale

1. Cu privire la etapele de evoluţie ale conceptelor figurale:

a_1) Etapa pregeometrică, figurală, se caracterizează aici prin fixarea unui număr limitat de puncte ce pot fi cuprinse în intervalul *AB*.

a_2) Urmează o etapă de tranziţie, specifică acestei probleme, cu un număr de variante a căror caracteristică comună este ideea nedeterminării numărului de puncte. Nedeterminarea se exprimă în formulările „Cîte puncte vrem", „Depinde de distanţa dintre puncte", „Depinde de mărimea punctelor", „Depinde de distanţa dintre *A* şi *B*", „Oricîte puncte". Între aceste formulări există diferenţe de nuanţă care ne apropie gradat de răspunsul corect.

b) Etapa formaţiilor concepto-figurale instabile cu predominare perceptivă. Pentru problema în discuţie, este caracteristică combinaţia de răspunsuri: „Între *A* şi *B* avem o infinitate de puncte", „Între *C* şi *D* avem mai multe puncte decît între *A* şi *B*". Formaţia concepto-figurală care permite răspunsul „O infinitate de puncte" include de fapt, în cazul respectiv, o suprapunere de planuri — cel intuitiv şi cel abstract — insuficient fuzionate. La un „şoc" — confruntarea dintre *AB* şi *CD* — formaţia se dislocă şi componenta perceptivă devine determinantă.

c) O asemenea etapă pentru problema în discuţie nu apare din experimentele individuale. Nu întîlnim formaţii concepto-figurale labile cu predominare conceptuală, cu alte cuvinte cazuri în care copilul să ezite la comparaţia segmentului *AB* cu *CD* sub raportul numărului de puncte şi totuşi să opteze pentru egalitatea acestui număr (în ambele infinit).

d) În schimb întîlnim stadiul ultim la circa 13% dintre copii în cazul experimentelor colective şi la alţi cîţiva în cadrul experimentelor individuale (exemplul Bun. Ghe.). Pentru problema în discuţie, etapa se caracterizează prin aceea că copilul a ajuns la sinteza dintre diviziunea nelimitată a segmentului şi recompunerea acestuia din numărul nelimitat de entităţi rezultante.

2. Procentul relativ mic de copii din clasa a VI-a care ajung la această etapă ne dovedeşte faptul că la vîrsta respectivă operarea cu entităţi simbolice-abstracte reprezintă încă o dificultate importantă. Gîndirea copiilor de 12-13 ani se află încă sub semnul orientării realist-concrete (servită însă din ce în ce mai bine de perfecţionarea procedeelor logice).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XVI-lea

PUNCTUL

III. DEFINIŢIA PUNCTULUI

Pentru a completa datele noastre privitoare la evoluţia ideii de punct la copil, am cerut şi o definiţie a punctului („Ce este un punct? Ce se înţelege printr-un punct“?). Şi în acest caz a fost obţinută o mare varietate de răspunsuri, dintre care reţinem următoarele variante principale: 1) „Punctul este un semn“. 2) „Punctul este un semn de punctuaţie“ sau „Punctul este un semn ortografic“ etc. 3) „Urma lăsată de un creion, cretă etc.“. 4) „Punctul este un rotund“. 5) „Punctul este ceva mic“. 6) „Punctul este cel mai mic semn“. 7) „Punctul este cea mai mică figură“. 8) „Ceea ce arată locul“. 9) „Capătul unei linii“. 10) „Figură fără dimensiuni“. 11) „Intersecţie a două linii“. 12) Răspunsuri tautologice. 13) Alte variante.

Răspunsurile din prima grupă („Un semn“) au un sens prea vag pentru a ne permite o discuţie în legătură cu ele (poate fi vorba de un semn ortografic sau de orice alt domeniu).

Răspunsurile din grupa a doua se situează, evident, în afara geometriei, deşi, după cum se vede, pînă la clasa a V-a inclusiv reprezintă procentaje foarte importante.

Răspunsurile din grupele 3, 4, 5, 6, 7 şi care interesează direct discuţia noastră se situează în sfera interpretării punctului ca imagine perceptivă. Răspunsurile 8, 9, 10, 11 pot fi considerate ca răspunsuri „geometrice“.

Tabela nr.7 cuprinde procentele diferitelor tipuri de răspunsuri.

Punctul ca „semn“ apare la un singur copil în clasa a II-a, apoi curba creşte pînă la 10,5% în clasa a III-a, pentru a

scădea apoi la 6,6% la clasa a IV-a și la 1,3 la clasa a V-a. În clasa a VI-a, nici un copil nu mai dă acest răspuns. Noțiunea de „semn" pentru punct apare la copii ca o generalizare

Tabela nr. 7

Definiția	II	III	IV	V	VI
1. Semn	1,0	10,5	6,6	1,3	—
2. Semn de punctuație	14,0	46,7	43,4	53,7	0,8
3. Urma lăsată de un creion	13,0	1,9	—	—	—
4. Un rotund	1,0	4,9	—	1,2	—
5. Ceva mic	—	2,8	—	2,5	1,7
6. Cel mai mic	—	—	—	13,8	—
7. Cea mai simplă figură	—	—	—	—	4,2
8. Loc	—	—	2,8	2,5	—
9. Capătul unei linii	—	—	10,4	—	16,8
10. Figură fără dimensiuni	—	—	—	—	7,6
11. Intersecția a două linii	—	—	1,9	2,5	49,5
12. Răspunsuri tautologice	1,0	1,9	0,9	—	0,9
13. Alte răspunsuri	1,0	—	8,5	7,5	5,1
14. Fără răspuns	69,0	31,3	25,4	15,0	13,4

a experienței lor mai ales în legătură cu punctuația. Maxima atinsă la clasa a III-a pentru acest tip de răspuns este rezultatul creșterii capacității de generalizare a copilului. Procentul răspunsurilor de acest tip scade însă ulterior, pentru că intervine și posibilitatea de specificare, mai ales în legătură cu dobîndirea cunoștințelor geometrice.

Un răspuns foarte frecvent la toate clasele, în afară de clasa a VI-a, este cel care definește punctul ca un „semn ortografic". La clasele III, IV, V, mai mult pe jumătate din copiii care răspund la întrebarea „Ce este un punct?" se referă la funcțiunea ortografică. De la 14% la clasa a II-a, procentul crește masiv la clasa a III-a pînă la 46,7%, evident în legătură cu cunoștințele de punctuație căpătate de copii. La clasa a IV-a se înregistrează o ușoară scădere: 43,4%. Apoi curba crește iar pînă la 53,7% și se anulează aproape (0,8%) la clasa a VI-a. Am putea considera variațiile curbei ca rezultat al disputei dintre cele două accepții principale ale punctului: punctul ca semn de punctuație și punctul ca entitate geometrică. Scăderea ușoară la clasa a IV-a, este, evident, rezultatul intervenției cunoștințelor geometrice, care deplasează o parte din răspunsuri spre cealaltă semnificație. Noua ridicare, destul de pro-

nunţată, a procentului la clasa a V-a este expresia afluxului proaspăt de cunoştinţe gramaticale şi ortografice, în timp ce cunoştinţele geometrice împlinesc o vechime de un an. Abia la clasa a VI-a copiii izbutesc să despartă în mod hotărît cele două domenii şi răspunsurile lor nu se mai referă la punctuaţie [1].

Copiii folosesc o mare varietate de răspunsuri în cadrul acestei categorii. Ne vom mulţumi doar cu cîteva exemple, întrucît, definind punctul ca semn de punctuaţie, subiecţii se situează, de fapt, în afara domeniului geometriei.

Spir. Ghe. (clasa a II-a): „Un punct este o pauză".

Bob. Beatr. (clasa a II-a): „Un punct este acolo unde ne oprim".

Mai. Ana. (clasa a II-a): „Un punct se pune la sfîrşitul propoziţiilor".

Ion. Cri.: „Un punct este un semn care se pune la sfîrşitul unei propoziţii".

Ion Lil. (clasa a III-a): „La sfîrşitul propoziţiei se pune punct".

Ban. Cor. (clasa a III-a): „Un semn de punctuaţie".

Car. Sor. (clasa a IV-a): „Punctul este semnul care se pune după o propoziţie".

Dem. Ed. (clasa a IV-a): „Punctul este semnul de punctuaţie care se pune la sfîrşitul unei propoziţii".

Urmează apoi cîteva tipuri de răspunsuri pe care le putem considera ca soluţii „intuitive" sau „descriptive". Să ne oprim întîi la răspunsurile de tipul „Urma lăsată de creion (cretă)".

E curios faptul că răspunsurile de tipul acesta nu există decît la clasele a II-a şi a III-a. La clasa a II-a, procentul este relativ ridicat: 13% (dacă ne gîndim că 69% nu răspund de loc), scăzînd la clasa a III-a la 1,9%. Apoi acest tip de răspuns dispare. Aceasta denotă că tipul acesta de răspuns reprezenta o soluţie primitivă, pe care copiii, chiar cei din clasa a III-a, nu o mai aceptă.

Dum. Crist. (clasa a II-a): „Un punct este urma lăsată de vîrful creionului".

Şerb. Lum. (clasa a II-a): „Un punct este semnul creionului".

Ant. Bogd. (clasa a II-a): „Un punct este cînd un toc sau creion este pus pe hîrtie".

---

[1] Faptul că o mare parte dintre copiii claselor II—V dau răspunsuri în legătură cu funcţiunea ortografică a punctului constituie pentru noi o mare dificultate. Rămîne un număr destul de mic de copii ale căror răspunsuri interesează lucrarea noastră. Facem această rezervă în legătură cu interpretarea pe care o vom da mai departe rezultatelor.

Scanned with OKEN Scanner

Moc. Iul. (clasa a III-a): „Un punct este dacă apăsăm odată cu creionul facem un punct".

Pop. Fl. (clasa a III-a): „Un punct este cum ai pune cu creta pe tablă".

Acest gen de răspunsuri subliniază rolul deosebit de important pe care îl joacă acțiunea la copii, pentru dezvăluirea caracterelor ce urmează a fi generalizate în noțiune.

Urmează apoi alte soluții intuitiv-descriptive.

Cîțiva copii caracterizează punctul ca fiind „ceva rotund".

Ion. Tud. (clasa a III-a): „Punctul este un rotund".

Tud. Ștef. (clasa a III-a): „Un punct este un rotund".

Avem, așadar, aici o simplă descriere a punctului sub raportul imaginii concret-perceptive.

Procentul crește de la 1% la clasa a II-a la 4,8% la clasa a III-a; se anulează la clasa a IV-a. La clasa a V-a avem un singur răspuns de acest gen (1,2%). La clasa a VI-a nu mai apare.

Răspunsurile care descriu punctul ca fiind „ceva mic" sînt și ele puțin numeroase. Apar la clasa a III-a (2,9%), dispar la a IV-a, reapar la clasa a V-a (2,5%) și apoi la a VI-a (1,7%).

Exemple

Drag. Luiz. (clasa a III-a): „Un punct este format din ceva mic".

Com. Tom. (clasa a III-a): „Un punct este un cerculeț mic".

Nas. Gri. (clasa a V-a): „Un punct este un cerc înnegrit mic".

Este foarte interesant că răspunsurile de tipul „Punctul este cel mai mic... (semn, obiect etc.)" nu există decît la clasa a V-a, și aici cu un procent relativ ridicat: 13,8%. Aceasta înseamnă, evident, că acest gen de răspuns este caracteristic pentru vîrsta respectivă.

Reg. Ric.: „Punctul este cea mai scurtă linie.

Paj. And.: „Un punct este cel mai mic corp care se poate vedea".

And. Pet.: „Figura geometrică cea mai mică se numește punct".

Ken. Dan.: „Un punct este cea mai mică formă din spațiu".

Gol. Dan.: „Un punct este cel mai mic obiect vizibil. Este mic și rotund. După acest lucru se poate recunoaște".

Soluția aceasta și prezența ei numai la clasa a V-a ni se pare un fenomen psihologic deosebit de interesant.

De fapt există două categorii de răspunsuri. Unii copii, ca de pildă Reg. Ric., And. Pet., Ken Dan, definesc punctul ca fiind „cel mai mic obiect", „cea mai mică formă". Alţii, cum sînt Paj. And. sau Gol. Dan, mai adaugă o caracteristică : „vizibil", „care se poate vedea". Soluţia este într-adevăr exactă dacă ne menţinem la planul intuitiv-descriptiv. Copiii utilizează o importantă achiziţie intelectuală: capacitatea de seriere, de ordonare, care le permite nu numai să descrie, ca atare, obiectul, cum fac de pildă cei care descriu punctul ca fiind un „obiect mic", „un cerculeţ mic", ci să-l şi plaseze într-o serie ordonată. Caracteristica punctului nu este doar micimea sa — şi un triunghi poate fi mic —, ci faptul că se plasează la polul extrem al unei serii ordonate. El este „cel mai mic".

Pentru a putea ajunge la această soluţie, copilul trebuie să poată nu numai descrie verbal elementele imaginii date, ci să şi poată gîndi structura serială în alura ei de ansamblu.

Totuşi, indicaţia că punctul este „cel mai mic lucru" nu este suficientă. Unii copii au înţeles şi faptul acesta. Ei simt necesitatea unei limite, de fapt a unui cadru, a unui domeniu care să facă entitatea respectivă utilizabilă în condiţii obişnuite. Şi atunci ei ştiu să adauge nota de vizibilitate. Un obiect a cărui mărime ar scădea mereu ar ajunge să treacă dincolo de hotarele perceptibilităţii, şi atunci ar fi practic inutilizabil ca semn geometric. El trebuie să fie cel mai mic, dar dintre obiectele vizibile.

Această definiţie a punctului poate fi considerată ca fiind soluţia optimă în planul intuitiv, soluţie la care un număr de copii ajung în clasa a V-a.

O altă problemă pe care ne-o pune această categorie de răspunsuri este următoarea.

Atunci cînd studiem particularităţile definiţiilor infantile, noi comparăm definiţiile obţinute în experimente de acest gen cu definiţiile ştiinţifice, comparaţie care are în vedere atît forma logică (genul proxim şi diferenţa specifică) cît şi sensul exprimat.

Pe baza unei asemenea confruntări clasificăm definiţiile ca fiind mai depărtate sau mai apropiate de soluţia corectă. Dar noi nu utilizăm în general, ca termen de comparaţie, o definiţie care ar exprima cît mai exact nu punctul nostru de vedere, ci punctul de vedere al copilului în problema respectivă. Copilul îşi formează despre diferitele obiecte şi fenomene întîlnite o anumită idee, mai mult sau mai puţin exactă, mai mult sau

Scanned with OKEN Scanner

mai puțin apropiată de adevărul științific. Dar această idee a sa, așa cum există la un moment dat, poate fi și ea mai precis sau mai vag exprimată într-o formulare verbală, într-o definiție.

Atunci cînd copilul ne spune, de pildă, că un animal este ceva „cu păr și patru picioare" sau ceva „care ne aduce foloase" înseamnă oare aceasta că definiția dată circumscrie într-adevăr toate fenomenele pe care copilul, în mod practic, le încadrează în categoria respectivă? Sîntem siguri că, de pildă, văzînd o reptilă, el îi va contesta calitatea de animal?

Iată deci că, în general, în cercetările asupra definițiilor infantile se confundă două puncte de vedere: a) gradul de exactitate al noțiunii pe care o posedă și o utilizează practic copilul, b) exactitatea cu care copilul definește propria sa noțiune.

Or, etapele reprezentate în formulările a) ceva mic b) cel mai mic lucru, c) cel mai mic lucru vizibil, constituie mai ales etape ale preciziei exprimării în definiție a ideii pe care copilul însuși și-o face despre punct.

Cu aceasta trecem la categoria răspunsurilor pe care le-am putea considera, cel puțin după modul de formulare, ca abstracte.

În locul răspunsurilor de tipul „Punctul este cel mai mic obiect, semn etc." apar, e drept într-un procentaj mic, răspunsuri de tipul „Cea mai simplă figură". Acest gen de răspunsuri nu există decît la clasa a VI-a. El reprezintă, fără îndoială, echivalentul abstract al răspunsurilor menționate mai sus, apărut sub influența cunoștințelor geometrice.

Să trecem la grupele de răspunsuri pe care le-am putea considera „geometrice". Cîțiva elevi definesc punctul ca fiind „locul a ceva". Asemenea răspunsuri, foarte puține la număr, există la clasa a IV-a (2,8%) și la clasa a V-a (2,5%).

Răz. Const. (clasa a IV-a): „Un punct este locul de unde pleacă cineva".

Pop. Mih. (clasa a IV-a): „Un punct este într-un anumit loc".

Mar. Rad. (clasa a V-a): „Locul stabilit de către noi".

Lup. Const. (clasa a V-a): „Un punct este locul luat într-o figură".

Între răspunsurile elevilor de la clasa a IV-a și cele ale elevilor de la clasa a V-a este o diferență. Definiția lui Răz. Con. (clasa a IV-a) este prea restrînsă; ea introduce nota „de

unde pleacă cineva", probabil sub influenţa unui alt gen de formulări întîlnite la această clasă.

Cealaltă definiţie, dată de Pop. Mih., generalizează mai bine ideea de „loc", dar formularea este defectuoasă.

La clasa a V-a ideea apare mai corectă ca sens şi formulare.

După cum am arătat, după părerea noastră acesta este chiar sensul real, profund, al noţiunii de punct, al noţiunii geometrice de punct, ca proprietate: punctul exprimă locul, plasarea în spaţiu.

O categorie interesantă, cu o frecvenţă mai mare, este aceea a răspunsurilor de tipul „Capătul unei linii". Aceste răspunsuri apar numai la clasele a IV-a (10,4%) şi la clasele a VI-a (16,8%). Prezenţa acestor răspunsuri numai la clasele a IV-a şi a VI-a denotă faptul că ele apar ca urmare a cunoştinţelor de geometrie dobîndite şi nu constituie o soluţie spontană.

În clasa a IV-a, copiii folosesc, în general formularea de tipul „locul de unde pleacă o linie".

Mar. Ion (clasa a IV-a): „Un punct este capătul de unde porneşte o linie"

Ton. Ghe. (clasa a IV-a): „De unde porneşte o linie se numeşte punct".

La clasa a VI-a, definiţia are un caracter mai „static", mai apropiat de exprimarea geometrică.

Nuţ. Const. (clasa a VI-a): „Capătul unei linii se numeşte punct".
Kre. Tib. (clasa a VI-a): „Punctul este capătul unei linii drepte".
Pan. Mih. (clasa a VI-a): „Un punct este capătul unei linii".

Definiţia abstractă, didactică, „Punctul este o figură fără dimensiuni", apare numai la elevii din clasa a VI-a, într-un procent de 16,8%.

Zis Jac.: „Punctul este figura geometrică care n-are nici o dimensiune.
Bej. Mih.: „Un punct este figura geometrică fără nici o dimensiune (lungime, lăţime, înălţime)".

În sfîrşit, o altă definiţie abstractă pe care o întîlnim este aceea a punctului ca intersecţie a unor linii.

Asemenea răspunsuri apar la doi copii din clasa a IV-a (1,9%) şi la doi copii din clasa a V-a (2,5%), aşadar, procentaje foarte mici. La clasa a VI-a însă, din nou, evident sub influenţa cunoştinţelor geometrice dobîndite în această clasă, procentul este foarte ridicat: 49,5%.

Scanned with OKEN Scanner

Geo. Ser. (clasa a IV-a): „Un punct este locul unde se întîlnesc două linii".

Mar. Aur. (clasa a V-a): „Punctul este intersecția a două linii și nu are nici o dimensiune".

Mart. And. (clasa a VI-a): „Punctul este intersecția a două linii".

Por. Ser. (clasa a VI-a): „Intersecția a două linii se numește punct".

O privire de ansamblu asupra tabelei nr. 7 ne arată că răspunsurile pe care le-am situat în categoria intuitiv-descriptive apar în special la clasele a II-a a III-a și a V-a, iar cele pe care le-am situat în categoria „geometrice" în special la clasele a IV-a și a VI-a (eliminînd răspunsurile de tipul „semn" și „semn de punctuație)".

În al doilea rînd, urmărind procentajele, putem stabili cu aproximație și anumite etape de evoluție pentru cele două categorii. Pentru răspunsurile intuitiv-descriptive, la clasa a II-a frecvența cea mai ridicată o are răspunsul de tipul „Urma lăsată de creion (sau cretă)", despre care ne amintim că apare fiind descrierea rezultatului unui act (actul de a apăsa, de a trage). Urmează apoi, la clasa a III-a, răspunsurile de tipul „un rotund" și „un obiect (cerculeț etc.) mic". La clasa a V-a, cel mai frecvent este răspunsul „Cel mai mic". Dintre acestea, noi am deosebit răspunsurile „Cel mai mic obiect vizibil" ca fiind formularea cea mai bună. Așadar, etapele principale ar fi acestea:

a) definirea punctului în raport cu acțiunea efectuării lui;

b) definirea punctului în raport cu forma (rotund) sau dimensiunea (mic);

c) definirea punctului ca pol al unei serii ordonate (cel mai mic) sau definirea punctului ca pol al seriei ordonate cu indicarea domeniului (vizibil).

În ceea ce privește a doua categorie de răspunsuri, statistica ne arată două momente de evoluție:

a) definirea punctului ca fiind capătul unei linii;

b) definirea punctului ca fiind: 1) figură fără dimensiuni și 2) intersecție a două linii.

Toate acestea nu ne dau însă o imagine completă asupra structurii reale a noțiunii utilizate, ci doar învelișul extern al semnificației. Pentru aprofundarea analizei am întocmit tabele de corelație în care am confruntat definițiile date de copii cu răspunsurile date de aceeași copii la întrebările B și C (tabelele nr. 8 pentru fiecare clasă). În ceea ce privește întrebă-

Tabela nr. 8

Definiţii	La fel	Nu sînt la fel			Nu răspund	Total	%
		Întrebarea B	Întrebarea C	Ambele întrebări			
Clasa a II-a							
Semn	—	—	—	—	1	1	1
Semn de punctuaţie	2	—	8	4	—	14	14
Urma lăsată de un creion	3	2	4	4	—	13	13
Un rotund	—	—	—	1	—	1	1
Tautologie	—	—	—	1	—	1	1
Alte răspunsuri	—	—	1	—	—	1	1
Nu răspund	4	9	16	32	8	69	69
Clasa a III-a							
Semn	1	1	3	5	1	11	10,5
Semn de punctuaţie	4	3	11	31	—	49	46,7
Urma lăsată de creion	1	—	1	—	—	2	1,9
Un rotund	—	—	—	5	—	5	4,9
Ceva mic	—	1	—	1	1	3	2,8
Tautologie	—	1	—	1	—	2	1,9
Nu răspund	1	—	9	22	1	33	31,5
Clasa a IV-a							
Semn	—	—	—	7	—	7	6,6
Semn de punctuaţie	6	5	7	28	—	46	43,4
Locul	1	—	1	1	—	3	2,8
Capătul unei linii	—	—	5	6	—	11	10,4
Intersecţie	—	1	1	—	—	2	1,9
Tautologie	—	—	1	—	—	1	0,9
Alte răspunsuri	1	4	1	3	—	9	8,5
Nu răspund	3	6	9	9	—	27	25,4
Clasa a V-a							
Semn	—	—	—	1	—	1	1,3
Semn de punctuaţie	5	6	15	17	—	43	53,7
Un rotund	—	—	—	1	—	1	1,2
Ceva mic	—	—	—	2	—	2	2,5
Cel mai mic	—	1	1	9	—	11	13,8
Locul	—	—	—	2	—	2	2,5
Intersecţie	1*	—	—	1	—	2	2,5
Alte răspunsuri	1	1	—	4	—	6	7,5
Nu răspund	—	3	2	7	—	12	15,0

Scanned with OKEN Scanner

Tabela nr. 8 (urmare)

Definiții	N-au dimensiuni	La fel	Nu sînt la fel			Total	%
			Intrebarea B	Intrebarea C	Ambele întrebări		
			Vlasa a VI-a				
Cea mai simplă figură	3	1	—	—	1	5	4,2
Capătul unei linii	—	4	3	3	10	20	16,8
Figură fără dimensiuni	5	—	—	2	2	9	7,6
Intersecția a două linii	17	18	13	4	7	59	49,5
Semn de punctuație	—	—	—	1	—	1	0,8
Ceva mic	2	—	—	—	—	2	1,7
Tautologii	—	—	—	1	—	1	0,9
Alte răspunsuri	1	—	1	1	3	6	5,1
Nu răspund	5	1	6	2	2	16	13,4

rile B și C, am recurs la o serie de simplificări pentru a nu complica excesiv tabelul de corelație. Atunci, cînd copilul răspundea „Nu sînt la fel" numai pentru unul dintre aspecte (mărime, greutate, formă), răspunsul a fost trecut în categoria „Nu sînt la fel". De pildă, dacă un copil a răspuns la întrebarea B: „Sînt la fel de mari, nu au aceeași greutate", răspunsul a fost trecut la rubrica „Nu sînt la fel". Atunci cînd apărea răspunsul „Sînt la fel" chiar numai pentru unele aspecte și nici un alt răspuns pentru rest, răspunsul era trecut la rubrica „Sînt la fel". De exemplu, dacă la întrebarea C un copil răspundea „Sînt la fel ca mărime și greutate" și nu susținea nimic în ceea ce privește forma, răspunsul era trecut la rubrica „Sînt la fel".

La clasele mici, tabelele ne permit puține observații semnificative. Definițiile predominant intuitive corespund cu soluții predominant intuitive la întrebările B și C. Unele aspecte merită, totuși, să rețină atenția.

Ne amintim că în tabela B și în tabela C am constatat, în trecerea de la clasa a II-a la clasa a III-a, o scădere a procentajelor răspunsurilor de tipul „Sînt la fel". Această scădere ar fi apărut stranie dacă am fi considerat răspunsurile de acest gen ca marcînd un nivel superior. Noi am arătat însă că scăderea respectivă poate fi explicată dacă introducem în considerațiile noastre ideea unei schimbări de semnificație a răspunsurilor de tipul „Sînt la fel". La copiii mici, acest gen de

răspuns nu semnifica o identificare pe considerente logico-abstracte prin neglijarea diferenţelor intuitive, ci cu totul altceva: insuficienţa discriminării perceptive.

Tabela de corelaţie nr. 8 la clasa a II-a confirmă această teză. Să urmărim coloana „La fel". În dreptul definiţiei „Semn de punctuaţie" avem două răspunsuri de acest gen. Din totalul de 14 răspunsuri care dau această definiţie, două reprezintă 14,3%.

În dreptul definiţiei „Urma lăsată de creion" avem trei răspunsuri de acest gen. Din totalul de 13 aceasta reprezintă 23%.

În sfîrşit, dintre cei care nu răspund la întrebarea „Ce este un punct?", patru din totalul de 69 răspund „La fel" pentru B şi C. Aceasta reprezintă 5,8%. Aşadar, cel mai mare procent de copii care identifică punctele ni-l oferă cei care definesc punctele ca „Urmă lăsată de creion (sau cretă)". Or, acest gen de răspuns l-am considerat a reprezenta treapta inferioară a evoluţiei definiţiilor de tip intuitiv-descriptiv.

Noile tipuri de definiţii care apar la clasa a III-a: „Un rotund" şi „Un obiect mic" nu furnizează nici un răspuns de tipul „Sînt la fel" pentru întrebările B şi C.

Cu alte cuvinte, definiţiile din categoria intuitiv-descriptive pe care le-am considerat ca fiind de nivel mai înalt, avînd în vedere data apariţiei lor, nu sînt corelate în ceea ce priveşte întrebările B şi C cu răspunsuri de tipul „Sînt la fel" (cum ar fi trebuit să se întîmple dacă pentru vîrsta respectivă răspunsurile de tipul „Sînt la fel" ar fi reprezentat şi ele o treaptă mai înaltă). Dimpotrivă, ele sînt masate la rubricile „Nu sînt la fel".

Să trecem acum la clasa a IV-a, unde predomină definiţiile „geometrice" (abstracte). Ne referim la definiţiile de tipurile „Locul", „Capătul unei linii" şi „Intersecţia a două linii". Acestor definiţii le corespund soluţii pentru întrebările B şi C, grupate în special la „Nu sînt la fel" pentru C şi „Nu sînt la fel" pentru ambele chestiuni: B şi C.

Constatăm aici un fapt surprinzător. Copiii care consideră punctul din caiet şi punctul de pe tablă ca fiind la fel, care consideră în acelaşi timp punctele de intersecţie ca fiind la fel, nu se recrutează dintre cei care utilizează definiţiile „abstracte" aşa cum ne-am fi aşteptat. Cei care folosesc definiţii „abstracte" consideră punctele ca fiind deosebite (fie la ambele chestiuni B şi C, fie numai la C). Cei care consideră punctele ca fiind

Scanned with OKEN Scanner

„la fel" se recrutează dintre copiii care nu răspund la problema definiției sau care definesc punctul ca un semn de punctuație. Este aici un rezultat care, cel puțin în aparență, contrazice explicația dată de noi privitoare la creșterea numărului răspunsurilor de tipul „Sînt la fel".

Situația aceasta ni se pare deosebit de semnificativă pentru etapa respectivă a evoluției gîndirii copilului. Dacă nu putem pune pe seama dobîndirii cunoștințelor geometrice la clasa a IV-a creșterea masivă a răspunsurilor de tipul „Sînt la fel", atunci această creștere pare inexplicabilă. Un progres de ordin perceptiv putea să ducă la o creștere a numărului celor care consideră punctele de intersecție ca fiind la fel, dar trebuia să ducă în același timp la o scădere a procentului celor care consideră punctul de pe tablă și cel din caiet ca fiind deosebite. Or, o asemenea scădere nu apare, ci, dimpotrivă, crește de la clasa a III-a la a IV-a numărul celor care consideră punctul de pe tablă și cel din caiet ca fiind la fel. În același timp, scade de la clasa a III-a la clasa a IV-a numărul celor care consideră punctul de pe tablă și cel din caiet ca fiind deosebite și crește numărul celor care consideră punctele de intersecție ca fiind deosebite (ambele situații în opoziție cu explicația unui progres perceptiv). Așadar, numai considerentul progresului perceptiv de la clasa a III-a la clasa a IV-a nu poate explica modificările constatate. De aceea am apelat și la considerentul intervenției noilor cunoștințe de geometrie.

Și iată că acum constatăm că cei care identifică punctele nu se recrutează dintre copiii care, la clasa a IV-a, folosesc definiții „abstracte" concordante cu cunoștințele de geometrie!

Ni se pare admisibilă o singură explicație, care în același timp ne oferă o imagine nouă a etapei reale de evoluție în gîndirea copilului.

Dacă creșterea procentului copiilor care identifică punctele nu se poate explica decît prin achiziția noilor cunoștințe geometrice, atunci să păstrăm această explicație. Să admitem în același timp, fapt constatat din tabela nr. 8, că acești copii nu se recrutează dintre cei care folosesc definițiile abstracte.

Aceasta înseamnă — numai astfel se poate elimina contradicția — că, pentru subiecții respectivi, cunoștințele geometrice și definițiile geometrice nu reprezintă unul și același lucru, cum am fi crezut pe baza experienței noastre.

Scanned with OKEN Scanner

Definiţiile geometrice pentru copiii respectivi nu reglează, de fapt, semnificaţia imaginilor intuitive, nu duc la restructurarea de fond a acestor semnificaţii, ci, dimpotrivă, definiţiile „abstracte" emise de noi sînt transformate în gîndirea copilului şi subordonate acţiunii fenomenului intuitiv.

Cunoştinţele despre punct sînt cunoştinţe practice, cunoştinţe exprimînd, în fond, generalizarea, în gîndirea copilului, a experienţei sale în legătură cu punctul. Această experienţă îl învaţă treptat că, în ceea ce priveşte punctele, diferitele însuşiri, ca dimensiune, formă, nu contează. Ea nu-l duce la concluzia că punctele n-au dimensiuni, că punctele sînt entităţi geometrice fără volum, ci doar la neglijarea diferenţelor de mărime, formă etc.

Această experienţă despre care vorbim este hrănită de construcţiile geometrice simple pe care le face copilul, unde punctele apar ca extremităţi de segmente, ca vîrfuri ale unor figuri plane, ca centre (în special centrul cercului), construcţii făcute pe tablă şi în caiet şi în raport cu care nu se pune niciodată problema vreunei însuşiri proprii, problema unor diferenţe între puncte, în afară de poziţie.

Dar această experienţă nu se sintetizează sub forma unei definiţii şi cu atît mai puţin sub forma unei definiţii geometrice „abstracte".

Definiţiile care apar sînt introduse din afară şi fie că joncţiunea cu experienţa directă a copilului nu se face, fie că aceste definiţii dobîndesc de fapt un sens intuitiv, altul decît sensul corect, geometric, abstract, care există în intenţia profesorului.

Aşadar, modificările constatate în trecerea de la clasa a III-a la clasa a IV-a nu pot fi explicate decît prin afluxul de cunoştinţe de geometrie (aşa cum am arătat şi în capitolul XIV).

Dar aceste cunoştinţe nu sînt, de fapt, sintetizate în definiţii geometrice corespunzătoare (de altfel asemenea definiţii, în general, nici nu se dau la clasa a IV-a în mod sistematic). Definiţiile geometrice ale punctului, dacă sînt utilizate uneori de copii, nu antrenează cu necesitate şi restructurarea radicală a viziunii lor intuitive.

De ce însă apar răspunsuri de tipul „Sînt la fel" pentru punctele în discuţie la copiii care fie că definesc punctul ca un semn de punctuaţie, fie că nu răspund de loc? Nu credem că este vorba de o legătură directă, ci de un fenomen statistic.

Scanned with OKEN Scanner

Din cei 46 de copii care definesc punctul ca un „semn de punctuație", 6 consideră punctele, la întrebările B și C, ca fiind la fel. Aceasta reprezintă un procent de 13%. Dintre cei 27 de copii care nu răspund la problema definiției, 3 răspund la întrebările B și C: „Punctele sînt la fel". Aceasta reprezintă un procent de 11%, deci apropiat cu cel de mai sus. Dacă dintre cei 16 copii (3 + 11 + 2) care folosesc definiții abstracte, un procent apropiat ar răspunde la întrebările B și C că punctele sînt la fel, ar trebui să avem aci 1—2 copii. Or 1 copil există într-adevăr dintre aceștia 16 care răspunde la întrebările B și C că punctele sînt la fel. Așa încît nu e vorba de o corelație, la copiii de clasa a IV-a între anumite tipuri de definiții și răspunsuri de tipul „Punctele sînt la fel" ci doar de o repartiție statistică.

Faptul că la clasa a IV-a, după cum rezultă din tabelul nr. 8, există mai mulți copii care consideră ca inegale punctele de intersecție, decît copii care consideră ca inegale punctul de pe tablă și cel din caiet, se explică în primul rînd prin aceea că în privința intersecțiilor intervine, în afară de mărime și greutate, și problema formei. Tabelul nr. 2 ne-a arătat că 53,7% dintre copii, la această clasă, consideră încă punctele inegale ca formă.

Această situație influențează evident și imaginea globală din tabelul nr. 8 cl. IV-a unde am trecut la rubrica „inegale" toate răspunsurile care susțineau inegalitatea punctelor cel puțin în privința unei singure însușiri (mărime, formă, greutate).

Dar nu este numai atît. Dacă comparăm tabelele B și C constatăm că și în privința „mărimii" și a „greutății" punctelor este mai mare procentul copiilor care consideră ca inegale punctele de intersecție (Tabelul nr. 2) decît al celor care consideră ca inegale punctul de pe tablă și cel din caiet (tabelul nr. 1). Deci și această diferență influențează rezultatele tabelului 8 cl. IV-a.

Faptul acesta reprezintă o confirmare a celor susținute de noi mai sus în privința relațiilor dintre definiții, cunoștințe și imaginile intuitive în etapa pe care o discutăm (clasa a IV-a) și întregește imaginea pe care ne-am format-o în privința acestei etape.

Pentru a ne face mai bine înțeleși să ne oprim la un exemplu.

Cost. Pa. (clasa a IV-a):

(A_1) „Un punct este semnul prin care pot trece cîte linii vrem",

(B) „Punctele sînt egale. Punctele sînt egale între ele".

(C) Punctul 1 este mai mare decît punctul 2. Punctul 1 este mai greu decît punctul 2. Punctul 1 are o altă formă decît punctul 2. Punctul 1 are o altă formă deoarece prin el trec mai multe linii".

Cîtă vreme punctul este izolat — ca în cazul punctului de pe tablă şi a celui din caiet — el constituie un „semn", marchează un loc şi nu interesează dimensiunea întîmplătoare.

În problema intersecţiilor însă condiţiile sînt schimbate. Copilului i se cere să aprecieze dimensiunea celor două puncte în funcţie de numărul liniilor care se intersectează. Şi atunci la o bună parte din copii intră în joc considerente de care, altfel, cum spuneam, în condiţii obişnuite, copilul nu ţine seama. Din modul în care raţionează copilul în situaţia experimentală la care ne referim, putem deduce care este structura reală a entităţilor geometrice cu care operează.

Nu mai e vorba de case, arbori, chipuri de oameni, nu mai e vorba de imagini care reproduc direct obiecte cunoscute ci de un joc de imagini prin care făurim construcţii mai mult sau mai puţin inedite dintr-un material nou : puncte, linii unghiuri etc.

Aceasta este, într-adevăr, o experienţă nouă pentru copil, o experienţă nouă atît pentru imaginaţia sa, cît şi pentru operaţiile sale de gîndire.

Dar aceste figuri cu care el învaţă să opereze în desen şi mintal nu sînt de fapt abstracţiunile din geometria euclidiană. Liniile care se intersectează reprezintă într-adevăr o experienţă nouă dar acestea nu sînt figurile euclidiene cu o singură dimensiune — de fapt inimaginabile — ci linii intuitive, fine dungi substanţiale.

Or, într-o asemenea geometrie, în cazul unor intersecţii se impune luarea în consideraţie a ceea ce la punctul izolat se putea neglija: dimensiunea.

Nu e vorba de o simplă comparaţie între două figuri date. Copilul e capabil să opereze mintal cu aceste entităţi. Acest lucru e foarte important pentru determinarea nivelului de evoluţie. Această posibilitate de a opera rezultă şi din definiţia pe care o dă punctului: „Punctul este semnul prin care trec oricîte linii". Copilul poate multiplica mintal — şi respectiv, reduce — liniile care se intersectează în punctul dat. Nu e vorba deci de simpla reflectare perceptivă a unor imagini date ci de o adevărată capacitate de construcţie mintală care determină,

Scanned with OKEN Scanner

în cazul respectiv, natura entității definite, natura punctului. Dacă în cazul subiectului Cost. Paul n-am fi cunoscut răspunsurile la C, am fi fost gata să presupunem din formularea copilului că e vorba de înțelegerea pînă la capăt a entităților respective în sensul geometriei euclidiene. Dar cele ce constatăm ulterior, pe fondul datelor statistice, ne arată că subiectul nostru operează într-adevăr cu aceste entități în spirit geometric, dacă ne referim la procedeele logice, dar entitățile și operațiile au încă o structură intuitivă.

Faptul că nu numai în privința mărimii avem un procent mai mare de copii care consideră punctele de intersecție ca fiind deosebite ci și în privința greutății, ne arată că nu e vorba de un fenomen pur perceptiv ci de o construcție mintală constînd în suprapunerea liniilor respective într-o zonă comună.

Toate acestea sînt confirmate și de următorul fapt. Pentru prima oară apar la clasa a IV-a justificări explicite ale diferențelor dintre punctele de intersecție pe baza diferenței de număr între liniile care se intersectează (la 15 subiecți). Iată cîteva exemple în acest sens:

Inc. Șerb. „Punctul 1 este mai mare și mai greu. Ele au aceeași formă. Punctul 1 este mai mare pentru că se întîlnesc mai multe linii".

Sto. And. „Punctul 1 este mai mare deoarece se întîlnesc mai multe linii. Punctele nu au greutate. Punctele au aceeași formă".

Nic. M. „Punctul nr. 1 este mai mare. Punctul nr. 1 este mai greu. Punctele au aceeași formă. Punctul nr. 1 este mai mare decît punctul nr. 2 pentru că au legătură mai multe linii.

Găi. C. „Punctul nr. 1 este mai mare. Punctul nr. 1 este mai greu. Nu au aceeași formă. Punctul nr. 1 este mai mare pentru că acolo se întîlnesc mai multe linii drepte".

Toate acestea ne duc deci la concluzia următoare.

Pentru copilul de clasa a IV-a entitățile geometrice cum sînt punctele, liniile și figurile compuse din acestea, devin obiectul operațiilor sale logice constructive. Dar aceste entități au o structură sui-generis. Ele nu sînt în fond entități geometrice pure, determinate strict de definițiile euclidiene ci niște semi-abstracțiuni fluctuînd între bi— și tridimensional în formarea cărora participă atît experiența desenului, în special geometric cît și activitatea practică, constructivă, a copilului. Semnificațiile definițiilor, atunci cînd joncțiunea cu experiența copilului se face, sînt transfigurate de această experiență.

Scanned with OKEN Scanner

La clasa a V-a, după cum am văzut din tabelul nr. 7 definiţiile introduse de procesul didactic la clasa a IV-a sînt aproape complet eliminate — o nouă dovadă a lipsei lor de vitalitate — macerate, în definitiv, de structura intuitivă de ansamblu a gîndirii geometrice a copilului. Modificările procentajelor la răspunsurile de tipul „Nu sînt la fel" atestă o slăbire a influenţei cunoştinţelor geometrice dobîndite şi un progres de ordin perceptiv.

Distribuţia răspunsurilor la întrebările B şi C în raport cu definiţiile ne arată următoarele. Cele 5 răspunsuri de tipul „Sînt la fel" pe care le găsim în dreptul definiţiei „Semn de punctuaţie" reprezintă 11,6% din numărul elevilor care folosesc această definiţie — procentaj apropiat de cel găsit la clasa a IV-a pentru situaţia similară. Deci, în această privinţă nimic nou.

Există însă un fapt care ne atrage atenţia.

Să reluăm cele două tabele la clasa a III-a şi clasa a IV-a. Ne amintim că cifrele înscrise în rubrica verticală în dreptul specificării „Ambele" se referă la subiecţii care au susţinut că punctele nu sînt la fel pentru ambele întrebări, B şi C. Deci aceste cifre indică răspunsuri pe care le-am putea considera, în mare, ca fiind concordante.

În schimb cifrele din coloanele verticale B şi C se referă la subiecţi care consideră neegale numai punctele în legătură cu întrebarea respectivă (B sau C).

Or ce se constată? La clasa a IV-a găsim în dreptul tuturor definiţiilor atît răspunsuri concordante (coloana „Ambele") cît şi răspunsuri neconcordante (coloanele B şi C).

La clasa a V-a această situaţie se menţine numai pentru definiţiile „Semn de punctuaţie" şi pentru rubrica „Nu răspund", rubrici comune cu cele din clasa a IV-a.

În dreptul definiţiilor intuitiv-descriptive apărute la clasa a V-a, răspunsurile pentru B şi C, cu foarte puţine excepţii sînt grupate la coloana „Ambele", adică reprezintă răspunsuri concordante (în sensul opiniei că punctele sînt neegale).

Este pentru prima dată în evoluţia cunoştinţelor geometrice la copii cînd putem vorbi de o anumită corelaţie între definiţiile enunţate şi soluţiile date în raport cu aceleaşi fapte.

Dar să vedem mai îndeaproape în ceea ce constă această corespondenţă.

Scanned with OKEN Scanner

Una din definiții se referă la faptul că punctul e un rotund, iar alte două la faptul că punctul e un ceva mic. Aci putem vorbi de o concordanță deplină între definițiile intuitiv-descriptive și susținerea inegalității punctelor. Dacă e „un rotund" sau un mic semn, el poate fi mai mic sau mai mare și descris ca atare.

Pînă aci am fi fost îndreptățiți să vorbim de o adevărată reglare realizată de definiții — reglare realizată, e drept, în planul intuitiv — asupra aprecierii imaginilor respective.

Dar lucrurile se complică dacă trecem la definițiile care consideră punctul ca fiind „Cel mai mic obiect (vizibil)". Avem 11 copii în această situație, dintre care 9 răspund la ambele întrebări B și C că punctele diferă. Există într-adevăr o concordanță între soluțiile date la B și la C, există într-adevăr o concordanță între caracterul intuitiv al acestor soluții și caracterul intuitiv al definiției, dar nu există o concordanță între *sensul* definiției și *sensul* soluției.

Să considerăm răspunsurile cîtorva copii aflați în această situație.

And. Pet. (clasa a V-a).

(A_1) „Figura geometrică cea mai mică se numește punct".

(B) „Mai mare este punctul de pe tablă. Mai greu este tot punctul de pe tablă deoarece are și un volum mai mare".

(C) „Este mai mare punctul 1, deoarece are o suprafață mai mare. De asemenea tot punctul 1 este mai greu datorită tot ariei sale".

Dil. Cri. (clasa a V-a).

(A_1) „Punctul este cel mai mic corp vizibil".

(B) „Punctul făcut de mine pe foaie este mai mare și mai greu".

(C) Punctul 1 este mai mare și mai greu. Amîndouă au aceeași formă".

Stă. Ini. (clasa a V-a).

(A_1) „Punctul este cel mai mic semn".

(B) „Cele două puncte nu sînt la fel de mari. Greutatea nu este la fel".

(C) „Punctul 1 este mai greu și mai mare, pe cînd punctul 2 este mai mic și mai ușor. Nu au aceeași formă pentru că la punctul 1 sînt mai multe linii și la punctul 2 sînt mai puține linii".

Aceste răspunsuri ale copiilor ne oferă o imagine, în aparență stranie. Pe de o parte copiii afirmă că punctul este „cel mai mic obiect vizibil". Pe de altă parte aceeași copii susțin că punctele asupra cărora sînt chestionați pot diferi ca mărime. Avem aci, cel puțin aparent, o contradicție.

Scanned with OKEN Scanner

Această contradicţie ne obligă să reflectăm din nou asupra celor susţinute de noi mai sus cu privire la semnificaţia psihologică a definiţiilor respective. Noi am susţinut că subiectul care defineşte punctul ca fiind „cel mai mic obiect" sau „cel mai mic obiect vizibil" se dovedeşte capabil de serierea mintală a unui şir indefinit (şi nedeterminat efectiv) al unor elemente după un criteriu anumit (în cazul acesta: dimensiunea). Punctul ar reprezenta în acest caz polul extrem al seriei. Iată însă că aceiaşi copii menţin posibilitatea unor diferenţe de mărime între aceste entităţi. Aşa încît n-ar mai fi vorba de o seriere mintală reală, iar toate consideraţiile noastre privitoare la etapa respectivă în evoluţia mintală a copilului ar cădea. Modul acesta de a raţiona rezultă din aplicarea strictă a procedeelor noastre logice la materialul psihologic dat. Privite lucrurile prin prizma acestor procedee ar însemna, pur şi simplu, că afirmaţia „Punctul este cel mai mic obiect vizibil" este cu totul lipsită de sens. O asemenea concluzie e greu de admis pentru toţi copiii aflaţi în situaţia respectivă.

Este necesar, pentru a rezolva problema, să încercăm o apropiere mai directă de mentalitatea infantilă.

Trebuie să admitem că pentru copil polul extrem al seriei nu reprezintă o limită, unică, invariabilă, ci de fapt, un ansamblu, o „mulţime" de elemente, o categorie. Punctul este „cel mai mic", nu în sensul unei limite stricte, unice, ci în sensul că formează categoria celor mai mici entităţi, — cum am spune, de pildă, că o anumită specie de păsări cuprinde cele mai mici exemplare ale clasei respective. Firește, că în cazul acesta putem admite existenţa, în continuare, a unor diferenţe şi între membrii categoriei respective. Pluralitatea polului, *polul categorial,* constituie, astfel, o etapă înainte de constituirea mintală *a polului unic* al seriei ordonate.

Admiţînd această optică putem vorbi într-adevăr de o corelaţie între structura intuitiv-descriptivă a definiţiilor unora dintre subiecţii din clasa a V-a şi orientarea intuitivă a răspunsurilor la întrebările puse.

Să trecem la clasa a VI-a (Tabelul nr. 8 cl. VI-a). Faptul cel mai important constatat la această clasă este că pentru prima oară putem vorbi de o concordanţă reală, la un număr de copii între definiţiile geometrice abstracte, enunţate şi soluţiile date la întrebările B şi C.

În dreptul definiţiei „Cea mai simplă figură" avem 3 copii care, la întrebările B şi C, neagă posibilitatea unor diferenţe,

Scanned with OKEN Scanner

întrucît punctele „n-au dimensiuni", iar un copil consideră punctele la fel. Numai un singur copil dintre cei care folosesc această definiție consideră că punctele sînt deosebite.

Aceasta înseamnă că pentru 4 din cei 5 copii (80%) definiția „Cea mai simplă figură" exprimă de astă dată polul singular al seriei. Chiar și înlocuirea lui „cel mai mic" cu „cea mai simplă figură" arată trecerea la un grad de abstractizare mai înalt.

Definiția „Punctul este o figură fără dimensiuni" antrenează la 5 din cei 9 copii care o folosesc (55%) o rezolvare deplin concordantă a problemelor B și C. Definiția „Punctul este intersecția a două linii" folosită de un mare număr de copii din clasa a VI-a determină la peste jumătate dintre aceștia (59,3%) soluții concordante pentru B și C („Punctele n-au dimensiuni" la 17 copii și „Punctele sînt la fel" la 18 copii).

Există însă o singură definiție destul de frecvent folosită la această clasă (20 de copii) pe care, fără altă cercetare, am fi fost decișI s-o considerăm ca o definiție corectă geometrică : „Punctul este capătul unei linii". Dar iată ce ne arată tabelul de corelație. Nici unul din copiii care folosesc această definiție nu rezolvă problemele B și C cu soluția „Punctele n-au dimensiuni". Numai 4 din cei 20 de copii răspund „Punctele sînt la fel" (20%), iar restul consideră punctele ca inegale.

Nu poate fi vorba de un fenomen întîmplător. Dintre definițiile geometrice folosite de copii la această clasă, aceasta este singura căreia îi corespunde un procentaj atît de mare de soluții neadecvate la întrebările B și C. Aceasta înseamnă că definiția „Punctul este capătul unei linii", care nouă ni se pare a fi echivalentă cu celelalte definiții geometrice uzuale (în special „intersecția a două linii") nu este de fapt echivalentă cu ele, nu are aceeași putere de reglare asupra conținutului la care se referă; sensul ei este, dimpotrivă, invadat, modificat de structura intuitivă a figurilor respective.

De unde și o consecință didactică imediată: definiția „Punctul este capătul unei linii" trebuie considerată ca nerecomandabilă pentru lecțiile de geometrie și trebuie preferate celelalte („figură fără dimensiuni" sau „intersecție a două linii").

Dar și o concluzie teoretică foarte interesantă.

Definițiile trebuie deosebite și prin „puterea" lor, prin efectul real pe care-l pot avea în organizarea, sistematizarea, precizarea unor cunoștințe din domeniul respectiv. În acest sens ar trebui să vedem dacă nu trebuie să vorbim de definiții „tari", „influente" și definiții „slabe". Aceste definiții pot fi perfect

echivalente din punct de vedere logic şi totuşi deosebite ca efect psihologic şi didactic.

În sfîrşit, tabelul nr. 8 cl. VI-a ne mai arată existenţa unui număr mare de copii la care procesul restructurării, al abstractizării noţiunilor geometrice nu s-a încheiat. Putem considera că numai la 48 din 119 copii (40,3%) obţinem atît definiţii geometrice corecte cît şi soluţii adecvate la întrebările B şi C. La 62 dintre copii soluţiile la B şi C atestă o viziune intuitivă neadecvată a punctului. Ceilalţi nouă copii deşi ne dau la B şi C răspunsuri conforme cu sensul geometric al punctului, fie că nu pot enunţa nici o definiţie (6 copii) fie că dau definiţii negeometrice. Aşadar în total 71 dintre copiii din clasa a VI-a chestionaţi (59,7%) nu au ajuns, în ceea ce priveşte problema punctului, la o înţelegere corectă, geometrică a acestei noţiuni pe care o folosesc în mod curent.

Concluzii parţiale

1. Sub raport formal găsim două categorii de definiţii ale punctului: definiţii intuitiv-descriptive şi definiţii cu caracter geometric. Primele apar în special în clasele II, III şi V. Celelalte apar, în special în clasele IV şi VI.

În ceea ce priveşte definiţiile intuitiv-descriptive se pot admite, în linii mari, următoarele etape:

a) Definirea punctului în raport cu acţiunea efectuării lui (clasa a II-a).

b) Definirea punctului în raport cu forma (de ex. rotund) sau cu dimensiunea (ceva mic) (clasa a III-a).

c) Definirea punctului ca pol (categorial) al unei serii ordonate, fără a se depăşi limitele concretului (de ex. cel mai mic obiect vizibil) (clasa a V-a).

În ceea ce priveşte definiţiile cu caracter geometric problema se complică, întrucît acestea pot acoperi, în special înaintea clasei a VI-a, un sens intuitiv, fapt rezultat din confruntarea definiţiilor cu soluţiile la B şi C. Aceasta este în special situaţia formulării: „Punctul este capătul unei linii“, care apare frecvent în clasa a IV-a, şi pe care o regăsim şi în clasa a VI-a, într-un procent şi mai mare. Această formulare geometrică este de fapt asociată cu o imagine intuitiv-concretă a punctului, nu numai în clasa a IV-a ci şi în clasa a VI-a.

Pe de altă parte, tot în clasa a VI-a, apar frecvent formulările „Punctul este intersecţia a două linii“ sau „Punctul este

Scanned with OKEN Scanner

o figură fără dimensiuni", ambele, în majoritatea cazurilor, cu un sens geometric corespunzător.

2. Aceste considerente ne-au sugerat unele generalizări în legătură cu problema definițiilor sub raport psihologic.

a) Evoluția definițiilor utilizate nu exprimă întotdeauna evoluția cunoștințelor reale ale copilului. Pot avea loc următoarele fenomene:

— Definiția este însușită formal, fără a fi angrenată în ansamblul cunoștințelor copilului. Definiția rămîne o formație izolată (fenomen banal, bine cunoscut de profesori).

— Definiția este angrenată în structura activității mintale a copilului, dar ca urmare a acestui fapt sensul ei este modificat, potrivit cu aspectele specifice ale gîndirii copilului. În acest caz definiția capătă o dublă înfățișare. Privită din afară ea concordă cu punctul de vedere al adultului; considerată din interior (sub raportul sensului real) ea exprimă punctul de vedere al copilului.

b) În ceea ce privește capacitatea copilului de a formula definiția unei noțiuni oarecare trebuie să avem în vedere două criterii de apreciere:

— Confruntarea definiției cu definiția științifică a adultului.

— Confruntarea definiției cu noțiunea însăși, cu noțiunea care există de fapt în mintea copilului.

O definiție, independent de gradul corectitudinii ei științifice, poate exprima, într-un mod mai mult sau mai puțin adecvat, ideea pe care copilul în mod real și-o face despre o clasă de obiecte sau fenomene.

c) Mai multe definiții ale aceleiași noțiuni, formal echivalente, pot fi neechivalente sub raport psihologic și didactic. În această privință trebuie să luăm în considerație eficiența definiției învățate, adică măsura în care ea contribuie la organizarea cunoștințelor copilului, corespunzător cu exigențele științifice. Sub acest raport am putea vorbi de definiții slabe și definiții puternice, eficiente.

3. În ceea ce privește evoluția ideii de punct, în calitate de concept figural, trebuie să luăm în considerație (așa cum rezultă din datele noastre) și următoarele aspecte:

— Concomitent cu progresul cognitiv, pe linia unei reflectări mai corecte, mai riguroase și mai nuanțate a fenomenelor în realitatea lor concretă (în cazul nostru al imaginilor grafice) are loc și un progres conceptual în sensul capacității de a ex-

prima conceptual, printr-o definiţie adecvată, imaginile respective. În această evoluţie punctul ca imagine este treptat detaşat din ambianţa figurală, apreciat deşi mic, în individualitatea lui concretă. În acelaşi timp evoluează şi definiţiile, de la formulări care descriu operaţia desenării punctului, la formulări care descriu punctul însuşi ca entitate dată şi pînă la definiţiile complet adecvate (în limitele senzorialităţii) : „Punctul este cel mai mic obiect vizibil".

Peste această evoluţie logico-perceptivă se suprapune influenţa cunoştinţelor geometrice, în special la clasele a IV-a şi a VI-a (în perioada în care s-a făcut cercetarea). În legătură cu punctul, cunoştinţele geometrice pot interveni fie indirect prin practica construcţiilor geometrice, fie direct sub forma unor formulări speciale (punctul ca intersecţie a unor drepte, punctul ca entitate fără dimensiuni).

Rezultatul este, aşa cum am văzut, apariţia, în etapele iniţiale, a unor formaţiuni mixte concepto-figurale cu componente stratificate sau parţial fuzionate, formaţiuni labile, fisionabile care la un şoc lasă să iasă la suprafaţă structura intuitivă ce redevine dominantă.

Numai treptat, caracterul eterogen al acestor formaţii se elimină şi se ajunge la conceptul figural propriu-zis caracterizat prin structura sa omogenă, prin puritatea, stabilitatea, esenţialitatea sa conceptuală fără pierderea componentei intuitiv-spaţiale.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XVII-lea

LINIA DREAPTĂ

I. NATURA LINIEI DREPTE

J. Piaget a studiat construcția dreptei în cadrul cercetărilor referitoare la spațiul proiectiv [1].

Tehnica folosită a fost următoarea: pe mese pătrate sau rotunde, copilul trebuia să așeze o serie de chibrituri în linie dreaptă — reprezentînd niște stîlpi pentru o linie telefonică (fiecare chibrit era împlîntat, pentru a se putea menține în poziție verticală, într-o mică rondelă de plastilină).

Au rezultat următoarele stadii. În stadiul I, înainte de 4 ani copilul nu poate construi dreapta chiar dacă ea trebuie să fie paralelă cu una din marginile mesei pătrate. În stadiul II, 4-7 ani, copilul construiește o dreaptă paralelă cu marginea mesei, dar nu izbutește în cazul în care linia face un unghi cu un colț al mesei. Numai treptat, începînd de la aproximativ 6 ani copilul începe să se libereze treptat de sugestiile perceptive exercitate de marginile mesei.

În stadiul III (începînd de la 7 ani) dreapta este construită fără a fi influențată de marginile mesei. Copilul realizează construcția prin procedeul „vizării".

În cerceările noastre ne-am ocupat de subiecți trecuți, în general, de 9 ani și care, deci, cunoșteau construcția dreptei fie în sens „proiectiv", fie grafic prin utilizarea riglei.

Ceea ce ne-a interesat a fost formarea ideii geometrice de dreaptă — dreapta abstractă, infinită.

În legătură cu această problemă au fost puse întrebările E, D și A_2 (vezi cap. XIII).

---

[1] J. Piaget, B. Inhelder, *La représentation de l'éspace chez l'enfant*, PUF 1948, p. 185—203.

Se rupe linia din cauza îndoirii? (E)

Cu privire la posibilitatea liniei „de a se rupe" din cauza îndoirii avem următoarele grupe principale de răspunsuri:

1. Linia se rupe.
2. Linia nu se rupe.
3. Dependența ruperii de anumite condiții.
4. Linia se frînge.
5. Se obține o linie frîntă.

Rezultatele sub formă statistică apar în tabelul nr. 9.

Tabela nr. 9

	II	III	IV	V	VI
1. Linia se rupe	49,0	36,2	28,3	41,3	20,2
2. Linia nu se rupe	23,0	41,9	62,1	45,0	39,5
3. Ruperea liniei este condiționată	1,0	1,9	6,7	7,5	—
4. Linia se frînge	—	—	—	—	19,3
5. Devine linie frîntă	—	—	—	—	16,0
6. Fără răspuns	27,0	20,0	2,9	6,2	5,0

Putem considera că răspunsurile în care subiecții susțin că „Linia se rupe în punctul C" denotă o viziune intuitivă, substanțialistă a imaginii respective. Afirmația opusă „Linia nu se rupe în punctul C" poate exprima o treaptă superioară, fie că e vorba de interpretarea grafică, fie că e vorba chiar de semnificația geometrică a imaginii. E posibil ca și în acest caz motivația să fie substanțialistă, dar din explicațiile copiilor rezultă că acest fenomen este mai puțin frecvent. În ansamblu deci putem admite că răspunsurile de tipul „Linia nu se rupe în punctul C" denotă un progres mai mult sau mai puțin important în constituirea noțiunilor geometrice în raport cu răspunsurile de tipul „Linia se rupe în punctul C" — care exprimă întotdeauna o viziune substanțialistă.

Tabelul nr. 9 indică în procentaje evoluția acestor categorii de răspunsuri de la o clasă la alta.

În clasa a II-a, jumătate dintre copii (49%) afirmă că linia se rupe în punctul C.

La clasa a III-a procentul scade la 36,2%, iar la clasa a IV-a scade și mai mult, ajungînd la 28,3%. Se înregistrează, evident, un progres net în această privință pe măsură ce urcăm spre clasele mai mari.

Scanned with OKEN Scanner

La clasa a V-a însă coborîrea este întreruptă şi se înregistrează o creştere masivă a procentului răspunsurilor de tipul „Linia se rupe în punctul C", obţinîndu-se chiar valori mai ridicate decît la clasa a treia (41,3%). La clasa a VI-a curba înregistrează o nouă scădere foarte pronunţată şi procentual ajunge la 20,2%.

Astfel, în ansamblu, se constată o scădere, de la clasele mici spre clasele mari, a procentului subiecţilor care susţin că „linia se rupe în punctul C" cu o puternică abatere la clasa a V-a. Curba obţinută ne oferă o imagine simplă şi pregnantă, redată procentual, a modului în care scade la copii viziunea substanţialistă în interpretarea figurilor geometrice (fig. 22).

Curba care exprimă răspunsurile opuse, „linia nu se rupe în punctul C" descrie un drum invers. La clasa a II-a 23% dintre copii fac această afirmaţie. Apoi curba creşte la clasa a III-a (41,9%). Creşte din nou mult la clasa a IV-a ajungînd la 62,1%. La clasa a V-a avem o scădere masivă (45%), reversul creşterii notate mai sus şi în sfîrşit, la clasa a VI-a procentajul scade din nou ajungînd la 39,5%.

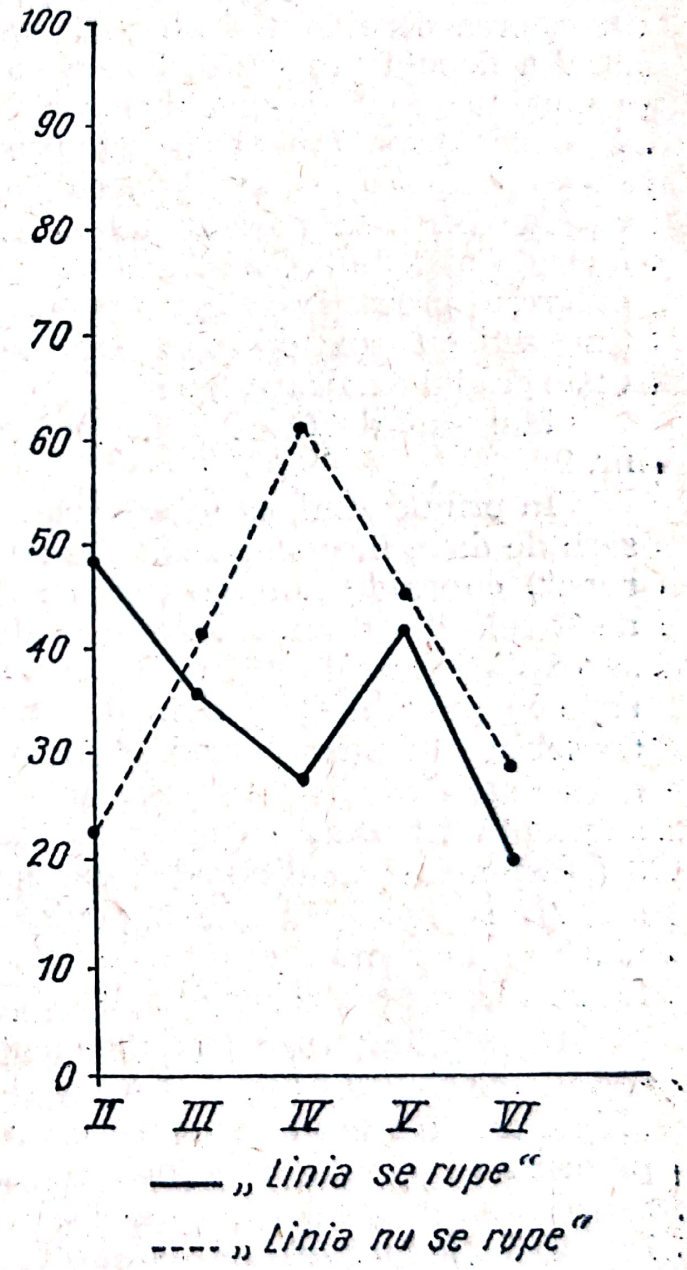


Fig. 22

A treia serie de răspunsuri a fost trecută de noi la categoria răspunsuri „condiţionale". Aceasta înseamnă că subiecţii res-

pectivi condiţionează rezultatul trecerii liniei prin punctul C de anumite însuşiri ale liniei, în primul rînd, de însuşiri materiale. (Numai 2 copii din clasa a V-a condiţionează ruperea liniei de considerente de poziţie).

Aşadar aceste răspunsuri pot fi şi ele adăugate la cele care denotă o viziune substanţialistă a figurilor geometrice. Creşterea constantă a procentelor de la clasa a II-a la clasa a V-a denotă progresul procedeelor logice, supleţea din ce în ce mai mare cu care copiii sînt capabili să raţioneze asupra problemelor respective. Dar aceste procedee logice în continuu progres operează constant, în acest caz, cu un conţinut intuitiv şi substanţialist. Iată aşadar un alt caz în care regăsim un fenomen de mai multe ori înregistrat în cursul cercetării noastre: progresul procedeelor logice nu este concordant cu evoluţia conţinutului cu care operează gîndirea copilului, în ceea ce priveşte gradul de abstractizare.

Mai sînt de făcut unele observaţii în legătură cu tabelul nr. 9.

În primul rînd, cu toate variaţiile care intervin în cele două serii de date, începînd de la clasa a III-a, rîndul 2 („Linia nu se rupe") cuprinde numere care sînt în mod constant mai mari decît cele din dreptul lor din rîndul 1 (linia se rupe). Aceasta se explică prin faptul că răspunsurile de tipul „Linia nu se rupe în punctul C" provin de fapt din trei atitudini mentale deosebite: în primul rînd elementul grafic, în al doilea rînd cel geometric şi în al treilea rînd — într-o măsură mai mică, cel substanţialist. Dacă adăugăm la rîndul 1 şi numerele din rîndul 3 („răspunsuri condiţionale" dar tot de factură substanţialistă) situaţia se modifică numai pentru clasa a V-a ceea ce subliniază şi mai mult orientarea substanţialistă în interpretarea figurilor geometrice la elevii din această clasă.

Un alt fapt care trebuie menţionat este următorul. Procentul elevilor din clasa a VI-a care dau răspunsuri de tipul „Linia nu se rupe în punctul C" este de 39,5%, mult inferior procentului elevilor care dau acelaşi răspuns la clasa a IV-a. S-ar părea deci că, spre deosebire de toate situaţiile analizate în capitolele precedente, la problema aceasta elevii din clasa a VI-a dovedesc o anumită inferioritate faţă de cei din clasa a IV-a (în loc să constatăm un progres cum era de aşteptat). Datele acestea trebuie însă rectificate pentru a se obţine o imagine corectă. În primul rînd la procentul de 39,5% trebuie să adăugăm şi pe cel de 16% reprezentînd subiecţii care răspund

că „linia devine frîntă". Evident e vorba de o interpretare de tip superior, geometrică. Obţinem astfel 55,5%. Luînd apoi în consideraţie tabelul nr. 10 în care am trecut tipurile de justificări date la aceste răspunsuri, constatăm că avem un procent mai mare de elevi la clasa a IV-a decît la a VI-a care susţinînd că „linia nu se rupe în punctul C" oferă pentru aceasta justificări substanţialiste. În felul acesta, diferenţa constatată între clasa a IV-a şi a VI-a este compensată.

Cu toate aceste rectificări, un progres net nu se constată la clasa a VI-a. Explicaţia acestei situaţii este următoarea (confirmată, după cum vom vedea şi de analiza justificărilor). La clasa a VI-a copiii dobîndesc noţiunea de linie frîntă. Termenul acesta are o semnificaţie geometrică precisă. La mulţi copii însă se produce o confuzie din cauza termenului folosit. Ei confundă termenul geometric „linie frîntă" (ceea ce se referă la linia avînd o anumită formă) cu termenul comun *frînt* adică rupt. Din această cauză avem 19,3% dintre copii la clasa a VI-a

Tabela nr. 10

Motivări	II	III	IV	V	VI
La răspunsul „Linia se rupe"					
1. Referiri la litere, puncte	—	—	1,9	—	1,7
2. „Din cauza îndoirii"	14,0	7,6	3,8	5,0	0,8
3. Referiri la material	—	2,9	0,9	2,5	—
4. „Devine linie frîntă"	—	—	2,8	1,3	4,2
5. Alte răspunsuri	—	0,9	0,9	2,5	4,2
La răspunsul „Linia nu se rupe"					
6. Referiri la faptul că e un desen	8,0	4,8	23,5	3,8	3,4
7. Referiri la modul de construcţie	—	—	—	1,2	—
8. Referiri la rolul punctelor, literelor	1,0	1,9	1,9	2,5	1,7
9. „E o linie frîntă"	—	1,9	7,5	3,7	21,0
10. „E o linie curbă"	1,0	—	—	—	6,8
11. „Se îndoaie"	—	—	1,9	5,0	2,5
12. Referiri la calităţi materiale	—	—	3,8	—	0,8
13. Aşa este formată	1,0	0,9	0,9	—	—
14. „Liniile sînt legate, lipite" etc.	—	—	4,7	1,3	0,8
15. Alte răspunsuri	—	0,9	—	3,7	0,8
Motivări la răspunsuri condiţionale					
16. Referiri la materiale şi calităţile lor	—	1,9	6,6	5,0	—
17. Depinde de aşezare	—	—	—	2,5	—
Total motivări	25,0	23,7	61,1	40,0	48,7

care nu dau un răspuns direct la întrebarea noastră, ci răspund „linia se frînge" lăsînd pe seama cercetătorului să se descurce — dacă e vorba de faptul că linia se rupe sau „devine frîntă".

Analiza justificărilor (tabelul nr. 10). Diferitele tipuri de justificări utilizate de copii pentru răspunsurile lor sînt redate în tabelul nr. 10.

Trebuie să subliniem, din capul locului, faptul că un număr mare de copii răspund într-un fel sau altul fără a oferi vreo justificare, ceea ce face ca cifrele din tabelul nr. 10 să trebuiască a fi interpretate cu toată rezerva. Foarte profitabilă va fi de aceea întregirea cu o analiză calitativă a răspunsurilor.

Să ne ocupăm întîi de justificările pentru răspunsurile de tipul „linia se rupe în punctul C". După cum era de aşteptat cele mai multe tipuri de justificări denotă direct o interpretare substanţialistă. Cea mai frecventă este explicaţia „linia se rupe din cauza îndoirii". Acest tip de explicaţie scade treptat de la clasa a II-a la clasa a VI-a cu o abatere la clasa a V-a. Mai apar de asemenea referiri la natura materialului (de pildă „linia e făcută din lemn"). Asemenea explicaţii avem la clasele III şi IV. Există şi copii care se referă la unele elemente ale desenului, sau la faptul că e o „linie frîntă" pentru a justifica „ruperea" liniei în punctul C. Asemenea răspunsuri apar în special la clasele IV şi VI.

Explicaţiile pentru faptul că „linia nu se rupe în punctul C" sînt variate şi în general de o natură mai complexă. Cea mai frecventă este explicaţia prin referire la desen. „Linia nu se rupe pentru că e în desen, nu e în realitate" declară unii copii. Asemenea răspunsuri găsim şi la clasele mai mici, dar ele ocupă un loc însemnat în special la clasa a IV-a. În al doilea rînd avem explicaţia prin referire la categoria geometrică a liniei: „Linia nu se rupe în punctul C pentru că este o linie frîntă". Procentul acestor justificări — care apar numai începînd de la clasa a III-a — creşte la clasa a IV-a, scade la clasa a V-a şi creşte din nou, de astă dată mult, la clasa a VI-a.

Apare şi o altă explicaţie de tip „geometric" tot la clasa a V-a mai ales: „Nu se rupe pentru că e o linie curbă".

Răspunsuri interesante din punct de vedere psihologic sînt acelea care, pe un fond de interpretare grafică, adaugă elemente substanţiale de „sudură": „liniile sînt „legate", „lipite".

Asemenea răspunsuri sînt mai frecvente la clasa a IV-a.

Scanned with OKEN Scanner

Explicaţii substanţialiste avem şi aici: linia nu se rupe pentru că se îndoaie, pentru că e flexibilă. Asemenea soluţii apar în special la clasele IV şi V.

Să urmărim evoluţia diferitelor categorii de răspunsuri, pe clase.

La clasa a II-a predomină net răspunsurile de tipul „Linia se rupe în punctul C" ceea ce denotă faptul că la acest stadiu, la majoritatea copiilor, predomină înţelegerea substanţialistă a figurilor geometrice. Justificările, cum am văzut, sînt în special, în legătură cu faptul că linia „se îndoaie".

Ion. Cri. „Linia se rupe din cauza îndoiturii".
San. Cri. „Se va rupe fiindcă s-a îndoit".
Rod. Vas. „Se va frînge că linia este prea îndoită".

În ceea ce priveşte subiecţii care socotesc că „linia nu se rupe în punctul C", majoritatea oferă ca justificare faptul că e vorba de un desen. Există şi aci unele variante.

Mar. Vior. „Nu se rupe pentru că nu e în realitate ci e în desen".
Ghe. R. „Nu se rupe pentru că este desenată cu creta pe tablă".
Flor. Vict. „Linia care e scrisă pe tablă nu se rupe pentru că e scrisă pe tablă".

Este interesant faptul că chiar la clasa a II-a unii copii se dovedesc capabili — evident pe baza experienţei practice dobîndite — să distingă proprietăţile imaginii grafice de cele ale unui obiect propriu-zis — şi chiar să explicitezе această distincţie.

Un copil exprimă aceeaşi idee astfel:
But. Mir. „Linia nu se rupe pentru că aşa este formată linia".

Aci avem ceva mai mult decît simpla referire la specificul imaginii desenate: intuiţia unei categorii geometrice de linii (linia ACB nu provine dintr-o altă linie AB prin îndoire, ci este o linie cu individualitate, cu formă proprie „aşa este ea formată").

Iată şi această viziune semnificativă pentru etapa respectivă:

Dor. Alex. „Linia nu se rupe pentru că este prinsă în puncte".

Interesantă suprapunere între o imagine grafică şi o interpretare substanţialistă! Linia e prinsă în puncte, cum ar fi prinsă în pioneze. Punctele nu sînt simple repere geometrice.

Ele devin — de fapt o dată cu linia însăşi — adevărate ţinte materiale capabile să fixeze linia şi să împiedice ruperea ei.

La clasa a III-a, după cum am văzut, imaginea de ansamblu se schimbă. Numărul răspunsurilor care consideră că linia nu se rupe în punctul C, întrece pe acela al răspunsurilor care consideră că „linia se rupe în punctul C" — ceea ce constituie evident un progres în raport cu clasa a II-a.

În favoarea opiniei că „linia se rupe în punctul C" avem încă justificări care se referă la „îndoirea liniei". Dar — interesant de notat — şi în această privinţă se remarcă la unii copii, un progres. Simpla îndoire nu li se pare — şi pe drept cuvînt — o explicaţie suficientă.

Piep. Aur. „Se rupe pentru că e prea îndoită".

Bun. Adr. „Linia se poate rupe pentru că este îndoită forţat".

Zain. Tra. „Această linie se rupe din cauza forţării".

Structura substanţialistă a interpretării se relevă acum mai pregnant. Dezvoltarea mintală, logico-intuitivă, le cere copiilor să adauge o notă în plus la fenomenul „îndoirii", necesară pentru a explica ruperea: îndoirea este „forţată", linia e „prea îndoită".

La alţi copii apar şi alte aspecte materiale pentru a justifica ruperea.

„Se rupe pentru că se îndoaie. Dar nu s-ar putea rupe dacă e groasă"

Cu alte cuvinte, linia se rupe în punctul C pentru că nu e destul de groasă.

Pop. Flor. „Dacă o îndoim se rupe pentru că e făcută din lemn".

Aici ni se indică şi natura materialului din care linia e făcută (confuzie cu rigla de lemn?).

Dar, cum am spus, la clasa a III-a, majoritatea o formează răspunsurile care neagă ruperea liniei. Motivările sînt mai complexe şi mai variate.

Unii copii, puţini la număr, răspund evaziv. De ex.:

Pau. Ghe. „Se poate şi nu se poate să se rupă".

Avem şi la clasa a III-a referiri la faptul că e vorba de un desen.

Buz. M. „Nu se poate să se rupă pentru că este desenată".

Scanned with OKEN Scanner

Să remarcăm o deosebire de nuanţă, foarte importantă pentru dezvoltarea logică a copilului. Nu e vorba de o judecată constatativă: „linia nu se rupe" ci de o judecată de necesitate: „linia nu poate să se rupă".

Iată acum o altă variantă interesantă:

Olt. Dan: „Nu se poate rupe pentru că n-am luat creta de pe tablă. Dacă am lua creta de pe tablă linia s-ar rupe".

Elementul de progres intervenit aci constă în faptul că explicaţia continuităţii liniei este sprijinită pe continuitatea mişcării prin care este executată. Şi aci justificarea este grafică dar ea implică şi un alt plan: cel al operaţiei de construire.

Apar mai frecvent şi mai explicit decît la clasa a II-a (deşi încă în număr mic) justificări de tip geometric cu reziduuri grafice sau chiar substanţialiste mai mult sau mai puţin accentuate:

Bej. Ana. „Se formează o linie frîntă şi nu se poate rupe".

Iată deci raportarea la categoria geometrică a liniilor frînte formulată fără echivoc. Sau:

Tr. Mar. „Această linie frîntă nu se rupe pentru că aşa este".

Acest „aşa este" subliniază şi mai mult ideea copilului că nu e vorba de un obiect susceptibil de modificări fizice ci de o construcţie geometrică (sau grafică).

Uneori justificarea geometrică oferită de copii nu este cea adecvată.

F. Dan. „Linia nu se rupe fiindcă formează un triunghi".

Strict vorbind, interpretarea este greşită pentru că avem de-a face numai cu două segmente şi nu cu trei. Figura nu e un triunghi. Totuşi sensul general al explicaţiei este cel geometric, copilul, referindu-se la triunghi, îşi imaginează, în fond, continuitatea liniei segmentate din care este construit.

O altă variantă ne-o oferă copilul Dum. Mih. „Nu putem s-o rupem pentru că e strîmbă".

Şi aci s-ar părea că nu avem de-a face cu o relaţie logică. Totuşi un efort de apropiere de mentalitatea copilului ne face să întrezărim sensul real, dincolo de formularea viciată: Nu e vorba de o linie care s-ar întrerupe în punctul C — deci soldîndu-se cu două segmente separate — ci de o linie unică avînd

forma pe care o constatăm. Copilul o denumește „strîmbă", prin analogie, de pildă, cu o sîrmă strîmbă, sensul fiind echivalent cu cel al termenului geometric „linie frîntă".

Într-o serie de răspunsuri constatăm imixtiunea elementelor substanţialiste şi rezultatul este un soi de fuziune foarte curioasă pe care o vom găsi şi la clasele IV, V şi VI între semnificaţii geometrice şi semnificaţii intuitiv-concrete.

Bod. Ion. „Ea nu se rupe la îndoitură deoarece sub punctul C pe unde trece linia are un semn".

Copilul face figura pe care o reproducem alăturat (fig. 23). Arcul pe care îl utilizăm uneori în reprezentarea unghiului devine pentru copil verigă de legătură care împiedică despărţirea celor două segmente.

Fig. 23

O altă variantă a acestor curioase compoziţii ne oferă copilul Har. Agr. :

„Nu se rupe pentru că e în trei cifre. S-ar rupe dacă n-ar avea cifrele".

Este o formă mai „subtilă", mai „simbolizată" a opiniei întîlnite la clasa a II-a („Linia nu se rupe, pentru că e prinsă în puncte"). Aci copilul nu mai vorbeşte de puncte ci de simbolurile lor, literele. Literele („cifrele") nu sînt doar jaloane ale extremităţii segmentelor. Ele îndeplinesc o funcţiune materială, substanţială: asigură sudura segmentelor.

Avem însă şi la clasa a III-a justificări manifest substanţialiste.

Stef. Lum. „Depinde cît e de groasă. Dacă e groasă nu se rupe, dar dacă e subţire se rupe imediat".

Diac. Aur. „Această linie nu se poate rupe fiindcă e făcută din lemn".

Este interesant să punem alături de acest răspuns pe cel al unui copil din aceeaşi clasă, care justifica aceeaşi idee (linia nu se rupe în punctul C) printr-o afirmaţie contrară:

Seg. Adr. „Această linie nu se poate rupe la îndoitură pentru că *nu e lemn adevărat*" (subl. noastră).

Clasa a IV-a

Am constatat din tabelul nr. 10 că la clasa a IV-a crește și mai mult procentul copiilor care neagă ruperea liniei în punctul C. Crește în același timp mult și procentul elevilor care ne oferă justificări la răspunsurile lor (61,1%). Progresul în raport cu clasa a III-a este evident. Acesta nu se manifestă numai în rezultatele numerice generale ci și în natura justificărilor folosite. 23,5% dintre copiii acestei clase se referă la faptul că e vorba de un desen iar 7,5% ajung chiar la soluția geometrică: linia obținută e o linie frîntă. Cu tot acest progres important, există încă multe explicații substanțialiste și mai ales răspunsuri cu o structură complexă în care interpretările grafice și geometrice sînt grevate de o viziune substanțialistă deformantă.

De remarcat, în primul rînd, faptul că subiecții care susțin că „Linia se rupe în punctul C" ne dau un procent mai mic de justificări. Din cei 30 de copii care susțin această opinie numai 11 ne oferă justificări (deci un procent de 36,6%, sau, raportat la ansamblul clasei, 10,3%).

Justificările respective se referă rar, în mod direct, la însușiri materiale. Ele se bazează, mai ales, pe interpretări sui-generis geometrico-grafice substanțializate.

Bud. Ghe. „Linia se rupe punctul C fiind mai slab".

Car. Sor. „Linia se poate rupe fiindcă ea nu se duce în linie dreaptă ci se duce în trei puncte".

Chir. Nic. „Linia se rupe fiindcă nu mai merge în legătură cu celelalte":

Ghe. Nic. „Linia se va rupe și se va forma un unghi".

Se manifestă aci rezonanța cunoștințelor geometrice. Dar acestea au fost oarecum absorbite de o interpretare intuitivă, subordonate și deformate de aceasta.

În ceea ce privește subiecții care optează pentru părerea că „„Linia nu se rupe în punctul C" avem o multitudine de soluții și interpretări de la geometrice pure la manifest substanțialiste.

În ansamblu, principalele direcții pe care le-am întîlnit la clasa a III-a le regăsim și la a IV-a. Ceea ce se schimbă este, cum am văzut, în special raportul numeric, în favoarea soluțiilor grafice și geometrice.

Vior. Mar. „Această linie nu se poate frînge fiindcă această linie este geometrică".

Copilul a găsit răspunsul perfect la problema pusă de noi. El a devenit conştient de faptul că, în măsura în care este vorba de o entitate geometrică (abstractă), nu se poate pune problema alterării sub o influenţă fizică oarecare.

Soluţiile grafice abundă, în general, cu variantele pe care le-am găsit şi la clasa a III-a.

Sai. Ric. „Nu se poate rupe pentru că este desenată pe foaie".

Her. Mar. „Nu se poate rupe pentru că este trasă cu cretă".

Der. Edm. „Dacă ar fi desenată pe tablă ea nu s-ar putea rupe, deoarece ea nu este formată dintr-un corp solid".

Pop. Mih. „Linia trasă cu creionul nu se rupe".

Ioc. Ser. „Ea nu se poate rupe prin îndoitură pentru că e desenată".

Cor. Ser. „Linia nu s-ar rupe din cauză că e trasă cu creta sau creionul.

Ghe. Nic. „Linia nu se rupe fiindcă e trasă dintr-o bucată".

Apare, într-o proporţie mai mare decît la clasa a III-a, formularea „linia nu se poate rupe" (aşadar apelînd la o necesitate obiectivă), superioară formulării constatative „linia nu se rupe".

Modul material de construcţie al liniei (trasă cu cretă, cu creionul pe tablă, pe foaie) este frecvent menţionat de copii.

Caracterul grafic al soluţiei copiilor respectivi apare astfel şi mai evident, mai net, deosebit de soluţia geometrică: continuitatea liniei exprimă continuitatea mişcării materiale prin care este executată. „Această linie nu se rupe, pentru că a pornit de la A spre C şi apoi spre B", declară Dum. Marg.

Iată şi alte variante pe care nu le-am găsit în clasa a III-a.

Vas. Al. „Nu se rupe. Nu poate ieşi de pe foaie".

Ion. Mar. „Nu se rupe deoarece nu poate să se deslipească de pe hîrtie".

Sînt extrem de interesante aceste răspunsuri întrucît ele marchează un moment important în constituirea spaţiului grafic la copil. Aici nu continuitatea mişcării este adusă ca argument, ci o proprietate esenţială a spaţiului grafic. Spaţiul grafic este bidimensional — iată ceea ce au sesizat aceşti copii chiar dacă nu pot deocamdată explicita deplin ideea. Spaţiul grafic nu este spaţiul tridimensional în care au loc evenimentele lumii fizice, ci reprezintă numai aspectul exterior, desprins prin abstracţie din contextul obiectiv, pornind de la percepţia vizuală. În acest spaţiu grafic — convenţional într-un anumit sens —

Scanned with OKEN Scanner

nu poate avea loc o ruptură în sensul adevărat al cuvîntului, pentru că ruptura presupune obiecte tridimensionale. Iată ceea ce a înţeles, ce a intuit copilul.

Dar nu mai puţin interesant este faptul că, pentru a-şi formula ideea, copilul este silit să apeleze la o formulare substanţialistă pentru că mijloacele, procedeele sale intelectuale sînt impregnate de acest mod de a gîndi: linia nu se poate deslipi de pe foaie, linia nu poate ieşi de pe foaie. Sistemul de referinţe la care apelează copilul pentru a-şi formula ideea nesubstanţialităţii fenomenului grafic este un sistem substanţialist!

Avem aici mult mai mult decît în simpla formulare. „Linia nu se poate rupe pentru că e un desen". Avem mai mult în sensul conştientizării procesului, dar evoluţia nu este încheiată. În aceasta stă deosebitul interes al unor asemenea răspunsuri: ele ne permit să surprindem un moment important al evoluţiei şi deci aspecte de prim ordin ale dinamicii interne: copilul se sprijină ferm pe viziunea sa substanţialistă pentru a se putea ridica deasupra ei şi a o nega (relativ) pe calea spre noţiunile abstracte. Afirmaţiile „Linia nu poate ieşi de pe foaie", „nu se poate deslipi de pe foaie" marchează trecerea de la o interpretare substanţialistă (nu putem practic să separăm traseul de cerneală sau creion de hîrtia pe care a fost imprimat") la o interpretare convenţional grafică („nu are sens să ne punem problema desprinderii, întrucît linia desenată e considerată convenţional ca aparţinînd unui spaţiu bidimensional").

Alte formulări ale copiilor din clasa a IV-a ne duc la etape anterioare, în care interpretarea grafică este pur şi simplu copleşită de înţelegerea substanţialistă.

Jen. Sîr. „Linia nu se rupe fiindcă este unită şi prinsă unele de altele".

Mog. El. „Linia care trece prin punctul C nu se rupe fiindcă liniile sînt lipite una de alta.

Jak. An. „Această linie nu se rupe pentru că e lipită".

În aceste răspunsuri, continuitatea liniei nu mai este justificată de o viziune de principiu: grafică sau geometrică. Copilul constată continuitatea grafică şi el explică mecanismul ei printr-un procedeu substanţialist: între cele două porţiuni există o lipitură care le asigură unitatea. Apelul la un fenomen concret, substanţial, este evident aci mai discret decît în cazurile în care e vorba de grosime, rezistenţă etc. Chiar termenii folosiţi (lipit, unit) sînt termeni ambigui, iar această ambigui-

tate există realmente în mintea copilului care ne oferă explicaţia respectivă. „Lipit“ poate însemna pur şi simplu, „în continuare“ (în sensul imaginii grafice) şi totodată „alăturat“ şi „sudat“ (în sensul operaţiei concrete). Că e vorba simultan de ambele sensuri rezultă în primul rînd din faptul că subiecţii noştri nu prezintă alipirea liniilor numai ca descriere a imaginii grafice ci şi ca explicaţie, deci cauză a continuităţii. Formulările sugerează şi ele ambiguitatea sensurilor („este unită şi prinsă unele de altele“).

Avem aici un alt fenomen de coexistenţă mentală înrudit cu ceea ce am denumit în capitolele precedente *simbioză mentală*. Înrudirea constă în faptul că în ambele cazuri, coexistă, blocate într-o structură mentală unică, două semnificaţii distincte.

În cazul simbiozei mentale însă, descrisă de noi mai sus, era vorba de două sensuri radical deosebite, chiar contradictorii, aparţinînd unor linii de evoluţie şi unor etape de evoluţie cu totul deosebite — dar care, interferîndu-se la un moment dat, în dezvoltarea copilului, se suprapun şi-şi acordă un sprijin reciproc.

În cazul simbiozei mentale avem mai ales o substituţie de motivaţii: o formaţiune aparţinînd unei specii mintale anumite îşi găseşte motivaţia într-o altă specie mintală de natură cu totul diferită (chiar contradictorie cu prima) dar mai veche şi mai consolidată.

În cazul pe care-l discutăm acum e vorba de o confluenţă de sensuri, tot distincte prin origine, dar mai mult sau mai puţin contemporane, nedecalate sau puţin decalate. Un fenomen asemănător se întîmplă şi în cazul următor (întîlnit şi la clasa a III-a).

Ghe. Aur. „Linia trecînd prin litera C nu se rupe în punctul acesta, fiindcă are sprijinul în literele A şi B“.

Punctele, simbolizate prin litere, devin elemente concrete de susţinere care împiedică ruptura liniei. Există, în sfîrşit, la clasa a IV-a şi un număr destul de mare de justificări manifest substanţialiste.

Grig. Aur. „Linia dreaptă nu se rupe ci se îndoaie deoarece este flexibilă.

Geo. Gerg. „Dacă este flexibilă această linie se va rupe, dacă nu este nu se va putea rupe“.

Scanned with OKEN Scanner

Fin. Sor. „Ruptura liniei depinde de materialul din care e făcută. Dacă linia e făcută din lemn se va rupe din cauza îndoiturii, dar dacă e din sfoară, nu".

Jec. Const. „Linia nu se rupe. Ea nu se rupe, de exemplu o bară de fier îndoită care se îndreaptă nu se rupe".

Jec. Const. nu confundă linia cu o bară de fier — cum pare la prima impresie. El își argumentează doar părerea printr-o analogie. Există obiecte care nu se rup prin îndoire — ca de pildă o bară de fier. Linia face și ea parte din această categorie.

Clasa a V-a.

După cum am constatat din tabelul nr. 9, clasa a V-a prezintă un regres în raport cu clasa a IV-a, dacă ținem seama de cifrele globale. Analiza justificărilor arată dispariția aproape totală a considerentelor geometrice. Chiar și interpretarea grafică este în vădit regres (vezi și tabelul nr. 10). Abundă în schimb interpretările substanțialiste — în general aceleași variante pe care le-am găsit și în clasele precedente. Singurul progres real pe care-l putem înregistra este în legătură cu procedeele logice. La clasa a V-a avem cel mai mare procent de răspunsuri condiționale — deci de raționamente ipotetice. Apar de asemenea raționamente în care forma silogistică deductivă devine explicită.

Iată întîi unul din puținele cazuri în care apare un argument geometric — de altfel greșit utilizat.

Gil. L. „Se va rupe deoarece ea formează un unghi care este ascuțit".

Este evident că aci noțiunea geometrică a fost integrată într-o structură mentală intuitivă.

Iată și diferite variante de soluții grafice sau grafico-chinetice:

Stan Irina: „Nu se rupe deoarece sînt trase cu mîna".

Reg. Ric. „Linia nu se rupe în punctul C pentru că nu e de lemn sau fier iar liniile cu creionul nu se rup".

Ghin. Flor. „Linia nu se rupe la îndoitură deoarece se continuă".

Alte soluții reprezintă forme tranzitorii (cum am găsit și la clasa a IV-a) între interpretarea grafică și cea substanțialistă (uneori și cu reminiscențe geometrice participînd la această compoziție).

And.: „Nu se rupe deoarece le unește punctul C".

Scanned with OKEN Scanner

Voi. Mih. „Această linie se poate rupe sau nu se poate rupe, depinde unde este punctul C".

Tom. Laz.: „Această linie nu se rupe că se întîlnesc și pe urmă se formează una singură".

Soluțiile substanțialiste abundă, de la vechiul argument al îndoirii (fie pentru a justifica ruptura fie pentru a justifica — dimpotrivă — neruptura liniei) pînă la apelul la proprietatea, mai subtilă, a flexibilității.

Sof. Lan. „Linia nu se rupe ci se îndoaie".

Din. Elen. „Această linie nu se rupe ci numai se îndoaie".

Bra. El. „Linia nu se rupe fiindcă se poate îndoi și de aceea nu se rupe".

În clasele mici (II și III) „îndoirea" liniei era considerată drept cauză a ruperii ei. Am văzut apoi cum la clasa a III-a copiii încep să simtă necesitatea adăugării unei note în plus pentru a explica ruptura prin îndoire: ruptura este rezultatul unei îndoiri forțate.

La clasa a IV-a și mai ales la clasa a V-a regăsim forma simplă „linia se îndoaie" dar nu ca argument în favoarea ruperii ei, ci, dimpotrivă, ca justificare a opiniei că „linia nu se rupe". Cînd „îndoirea liniei" continuă să fie folosită ca argument pentru ruptura ei — atunci copilul adaugă elemente în plus.

Lup. Const. „Linia se rupe în punctul C pentru că este o curbătură bruscă".

Vlad. Ecat. „Linia în punctul C se rupe pentru că se îndoaie și orice se rupe cînd se îndoaie".

De remarcat forma silogistică, deductivă a raționamentului (cum n-am găsit pînă la această clasă) conținutul rămînînd însă substanțialist, neadecvat.

Iată și referiri la materialul din care este făcută:

Gol. Flor. „Linia se rupe dacă nu este lemn bun".

Vas. Pop. „Se rupe linia cînd merge spre B fiindcă un braț nu se poate îndoi, se rupe".

Ker. Gar. „Ea s-ar rupe numai dacă ar fi ceva din lemn sau altceva afară de sîrmă".

Blu. Flor. „Depinde din ce material este făcută: tablă, fier sau lemn".

În sfîrșit, argumentul flexibilității:

Nic. Ion. „Linia care se îndoaie nu se rupe pentru că e flexibilă".

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VI-a reprezintă un progres evident faţă de clasele anterioare. Faptul acesta rezultă mai clar din analiza justificărilor decît din datele globale ale tabelului nr. 9.

Justificări manifest substanţialiste aproape că nu mai apar. Scade mult şi procentul justificărilor grafice. În schimb predomină justificările geometrice. Un procent relativ mare de copii (în comparaţie cu clasele precedente) — 21%, ne dau soluţia justă: Linia devine o linie frîntă. Chiar şi în favoarea opiniei că „Linia se rupe în punctul C" copiii apelează adeseori la argumente geometrice — bineînţeles deformate. Cu tot acest progres rămîne încă un număr mare de copii (majoritatea) la care cunoştinţele geometrice sînt de fapt subordonate unei viziuni intuitiv-substanţialiste.

Începem cu cîteva exemple de soluţii geometrice corecte:

Din. Mio. „Linia nu se rupe în punctul C deoarece în geometrie avem mai multe feluri de linii: linii drepte, linie frîntă, linii paralele. Aceasta este o linie frîntă".

Faptul că subiectul introduce printre speciile de linii şi „liniile paralele" — unde e vorba de relaţia spaţială dintre două linii drepte, nu e esenţial pentru ce ne interesează. Punctul de vedere geometric este limpede exprimat.

Nic. Din. „Această linie nu se rupe în punctul C fiindcă această linie ACB este o linie frîntă (de aceea a şi fost numită aşa)".

Pav. Mar. „Această linie nu se rupe deoarece este formată dintr-o linie frîntă. Ştim că linia frîntă nu se poate rupe acolo unde este îndoită".

Bru. Geo. „Linia care trece prin C nu se rupe dar este o linie frîntă".

Zis. Jac. „Trecînd prin C linia devine o linie frîntă pentru că o linie poate trece prin trei puncte fără să se frîngă chiar dacă punctele sînt nelineare".

Stet. Adr. „Linia nu mai e o linie dreaptă ci este acum o linie frîntă. Linie dreaptă nu e deoarece prin trei puncte se poate duce o dreaptă numai cînd sînt colineare".

Este evident că aceşti copii raţionează dintr-un punct de vedere geometric. La ultimele două exemple intervine şi o demonstraţie a celor susţinute: punctele nefiind colineare, linia nu poate fi dreaptă.

Un copil formulează răspunsul astfel:

Lup. Cor. „Liniei nu i se întîmplă nimic".

Scanned with OKEN Scanner

Uneori răspunsul „Linia nu se rupe în punctul C“ este susţinut de o interpretare geometrică greşită.

Rom. Ana: „Linia nu se rupe pentru că este o linie curbă“.

A doua categorie de justificări care apar frecvent în clasa a VI-a este formată din cele în care elementul geometric, deşi intervine în structura răspunsului, nu îndeplineşte funcţiunea conceptualizantă care-i revine, ci se supune viziunii grafice sau substanţialiste şi-şi modifică semnificaţia. Acest fenomen întîlnit şi în clasele precedente, devine mai frecvent şi mai variat în clasa a VI-a pentru că şi cunoştinţele geometrice sînt mult mai active.

Sur. Ghe. „Această linie nu se poate rupe pentru că se formează un punct de sprijin“.

Pan. Mih. „Această linie nu se taie în punctul C fiindcă acest punct este un punct de legătură al acestor linii“.

Bart. Adr. „Nu se rupe deoarece AC şi CB au legătură într-un punct“.

Această idee a punctului cu rol conectant, am mai întîlnit-o şi în clasele precedente. În clasa a VI-a o întîlnim mai frecvent şi mai clar formulată. Punctul joacă rolul unui fel de nit care împiedică despărţirea celor două segmente.

Bad. Ana. „Din cauza îndoiturii linia se rupe deoarece se formează un unghi drept“.

Aci avem pe de o parte o greşeală de termen (unghiul format nu e neapărat drept) şi pe de altă parte subordonarea noţiunii geometrice faţă de o viziune substanţialistă.

Frecvente sînt răspunsurile greşite cauzate de confuzia produsă de termenul „linie frîntă“. Şi acestea intră în aceeaşi categorie: deformarea noţiunii geometrice de viziunea intuitiv-substanţialistă în care este integrată).

Jip. Nic. „Această linie se poate frînge, pentru că este o linie frîntă“.

După cum se constată din tabelul nr. 10 asemenea răspunsuri reprezintă la clasa a VI-a un procent ridicat (19,3%).

Iată şi alte exemple:

Ghe. Gil. „Linia trecînd prin cele trei puncte se frînge deoarece o linie poate să treacă numai prin două puncte“.

Mar. Mar. „Linia se întrerupe unde se îndoaie pentru că este o linie frîntă şi este formată din mai multe drepte“.

Scanned with OKEN Scanner

Ultimul răspuns constituie o confuzie foarte interesantă din punct de vedere psihologic, întrucît ne permite să observăm structura sa stratificată cu prezentarea diferitelor achiziţii ale copilului în domeniul respectiv, suprapuse rînd pe rînd. Întreruperea liniei este o imagine intuitivă grafică. „Îndoirea liniei" reprezintă o formaţie mai veche substanţialistă. Peste acestea s-au adăugat elemente geometrice: „formată din mai multe linii drepte" şi „este o linie frîntă".

Gr. Pan. „Această linie se rupe pentru că merge într-o direcţie de la A la C şi în altă direcţie de la C la B".

Viziunea substanţiallistă, exprimată în acceptarea ruperii liniei, este asociată aici cu interpretarea grafico-cinetică: schimbarea de direcţie a „mersului" liniei în punctul C. Linia nu „există", nu e un dat geometric, ci este rezultanta unei mişcări. Includerea acestui element cinetico-temporal determină la copil ideea „ruperii" liniei.

Interpretarea net substanţialistă, prin apelul la anumite materiale sau calităţi materiale, este pe cale de dispariţie. Iată un exemplu şi din această categorie:

Boj. St. „Nu se rupe din cauză că dacă luăm un metru de tîmplărie şi îl îndoim vedem că nu se rupe".

În acest caz şi forma logică a raţionamentului este neevoluată. Copilul recurge la o analogie pentru a-şi justifica răspunsul.

Experimente individuale

Iată şi cîteva exemple culese din experienţele individuale:

Clasa a III-a. Înv. Gab. (9, 11) „Linia se rupe pentru că... sînt ascuţite la capăt.

Bon. Doi. (10). Linia se rupe.
Exp. De ce?
El. (nu răspunde).
Exp. Din ce e făcută o linie?
El. Pe caiet? E făcută cu creionul.
Exp. Atunci de ce se rupe?
El. Nu ştiu.
Kir. Cor. Da, linia se rupe.
Exp. De ce?

El. Se rupe din cauză că e îndoită.

Max. El. (9, 5). Nu se rupe.

Ex. De ce crezi ?

El. Fiindcă este îndoită. Niciodată nu se rupe.

Pom. Cor. (9, 10). Nu se rupe.

Exp. De unde ştii ?

El. Nu se rupe din cauza îndoiturii.

Clasa a IV-a

Dem. Ver. (11). Se rupe linia.

Exp. De ce ?

El. Nu stă cap la cap.

Pop Eug. (10, 9). Este frîntă.

Exp. Eu te-am întrebat dacă se rupe în punctul C.

El. Cum adică să se rupă ?

Exp. De pildă : Un băţ de lemn se rupe dacă-l îndoi. O sîrmă nu se rupe. Dar linia aceasta ?

El. (Pare dezorientat). Dacă o desenăm ruptă.

Pop. Vior. (10, 6). O linie de lemn se rupe.

Exp. Dar aceasta de aici ?

El. Nu se rupe. N-are ce să se rupă.

Exp. Din ce e făcută linia asta ?

El. Ca un fel de umbră sau o dîră lăsată de creion.

Exp. Pot duce o linie de aci pînă la bec ?

El. O dîră de creion, nu. Numai o linie de lemn.

Clasa a V-a

Bus. Ştef. (11, 8). Da se rupe.

Exp. De unde ştii ?

El. Pentru că punctul C este aşezat la mijloc. Mai sus am tras o dreaptă de la A la B. Dar aici nu se poate. Aici se rupe.

Brd. Zol. (11, 8). Nu se rupe.

(Exp. De ce crezi ?

El. Ce fel de linie ? O linie de cale ferată ?

Exp. Nu, linia aceasta de aici.

El. Da se rupe... (Se gîndeşte. Apoi hotărît). Nu se rupe. Cînd tragi aşa nu mai depărtezi creionul de pe hîrtie.

Che. Iul. (11, 10). Se rupe pentru că se îndoaie.

Exp. Din ce e făcută o linie ?

El. Rămîn urme de la creion.

Exp. Pot duce o linie de aici pînă la lampă ?
El. Nu se poate duce.
Exp. Dar dacă vreau să măsor distanța, cum fac ?
El. Nu știu.

Clasa a VI-a

Ilie Just (12, 8). Nu cred că se rupe. E o linie frîntă. E formată de fapt tot dintr-o linie.
Exp. O linie din ce e făcută ?
El. Din mai multe puncte. O grupare de mai multe puncte puse cap la cap.

Zan. Nic. (12, 5). Linia se rupe.
Exp. De ce ?
El. Fiindcă este o linie frîntă.
Exp. Din ce e făcută o linie ?
El. Din mișcarea unui punct, printr-o mișcare de translație.
Exp. Aș vrea să duc o linie de la acest punct (de pe caiet) pînă la bec. Se poate ?
El. Unim cele două puncte printr-o linie dreaptă.
Exp. Unește-le.
El. Prin spațiu ? (rîde). Ne trebuie material.
Exp. Ce fel de material ?
El. (rîde). O sfoară, o ață.

Hor. Syb. (13). Nu se rupe linia.
Exp. Din ce e formată o linie ?
El. Din mai multe puncte puse unul lîngă altul.
Exp. Linia e făcută din vreun material ?
El. Nu. Ea arată numai locul, ca la punct.

Spir. Teo. (13). Exp. Se rupe linia în punctul C ?
El. Se formează o linie frîntă.
Exp. Dar în punctul C se rupe sau nu ?
El. Nu. Este continuată.
Exp. Din ce crezi că e făcută o linie ?
El. Prin mișcarea unui punct. Prin întretăierea a două suprafețe.
Exp. Dar din ce e făcută o linie ?
El. Din nimic. Din închipuire.
Exp. Pot să duc o line de la acest punct la bec ?
El. Da.
Exp. Cum o duc ?
El. Prin imaginație. N-avem cum s-o trasăm. E în aer, în spațiu.

Scanned with OKEN Scanner

Concluzii parţiale

În ceea ce priveşte natura liniei, cercetarea noastră pune în evidenţă un proces de desubstanţializare progresivă de la clasele mici spre clasele mari. Procesul este însă mai complex, deoarece intervin o serie de factori care se interferează în cursul evoluţiei. Avem pe de o parte tendinţa însăşi de desubstanţializare determinată de progresul cunoştinţelor generale ale elevului şi de progresul cunoştinţelor sale geometrice în special. Avem pe de altă parte progresul în ceea ce priveşte orientarea realist-concretă a cunoaşterii de către copil a realităţii obiective. Într-o anumită măsură această orientare vine în contradicţie cu prima întrucît îndeamnă copilul să interpreteze figurile — linia dreaptă sau frîntă — ca obiecte materiale susceptibile a suporta modificări de natură concretă.

Acolo unde cunoştinţele geometrice sînt recente, prima dintre aceste tendinţe este învingătoare — aşa cum se întîmplă la clasele a IV-a şi a VI-a.

La clasa a V-a, unde nu se mai predă geometria iese învingătoare cealaltă tendinţă, exprimată în interpretarea concretă a figurilor geometrice. Abaterea de la clasa a V-a reprezintă tocmai dovada elocventă a faptului că nu poate fi vorba de un proces evolutiv simplu, unic. Creşterea procentului de răspunsuri „substanţialiste“ la această clasă pune în evidenţă prezenţa celuilalt factor a cărui acţiune nu mai este mascată de influenţa cunoştinţelor geometrice directe.

Pe de altă parte, însuşirea cunoştinţelor geometrice înseşi se prezintă ca un proces complex. Cercetările pun în evidenţă faptul că „geometrizarea“ liniei trece printr-un stadiu premergător, constituirii conceptului figural propriu-zis şi anume stadiul unei „geometrii grafice“. Acest stadiu exprimă o viziune intermediară între cea substanţialistă şi cea geometrică propriu-zisă.

După cum se constată din tabelul nr. 10 există două momente care polarizează procente mai masive de răspunsuri echivalente: la clasa a IV-a justificarea prin referire la faptul că figura e un desen; la clasa a VI-a justificarea prin referire la o noţiune geometrică (linie frîntă).

Din analiza datelor cantitative, a structurii răspunsurilor date de copii, ca şi din unele rezultate expuse în capitolele precedente, putem conchide că pentru elevul de clasa a IV-a entităţile geometrice se constituie, în esenţă, ca realităţi grafice,

Scanned with OKEN Scanner

imagini bidimensionale, care însă, în funcţie de natura problemei se pot resubstanţializa. Geometria elevului de clasa a IV-a este, mai ales, o geometrie grafică. În jurul acestei tendinţe principale gravitează diverse formaţii hibride, extrem de interesante, semnalate în paginile precedente, formaţii grafico-geometrico-substanţialiste (puncte cu rol de „sprijin", linii „lipite", imposibilitatea „deslipirii" de pe foaie etc.).

În clasa a V-a, lipsind factorul polarizant, — cunoştinţele geometrice recente — răspunsurile se dispersează din nou. Alături de soluţii grafice — care capătă adeseori un caracter cinetic („liniile nu se rup deoarece sînt trase cu mîna"), reapar diverse soluţii grafico-substanţialiste şi mai ales substanţialiste.

Faptul acesta, ca şi rezultatele globale din tabelul nr. 9 confirmă teza că, în mare, direcţia principală de evoluţie a gîndirii copilului este determinată de o orientare realist-concretă, servită din ce în ce mai bine de perfecţionarea procedeelor logice, de o reflectare senzorială în continuă dezvoltare, de cunoştinţe mai bogate şi mai sistematice.

Abia la clasa a VI-a, bineînţeles tot în legătură cu predarea geometriei, avem o nouă polarizare a răspunsurilor, de astă dată în jurul interpretării geometrice propriu-zise („ACB este o linie frîntă").

Dar şi la această clasă mai apar, în procente mai mici, diferite soluţii substanţialiste, grafice sau hibride.

Avînd în vedere faptul că interpretarea grafică trebuie considerată ca o etapă în constituirea conceptelor figurale e cazul să ne întrebăm care este ponderea acestei interpretări la elevii din clasa a VI-a. Or, totalizînd procentele răspunsurilor pe care le-am putea considera ca exprimînd o interpretare grafică (1,7 + 3,4 + 1,7) — tabelul nr. 10 — obţinem numai 6,8%.

Interpretarea grafică e deci în curs de dispariţie în clasa a VI-a.

Avînd în vedere faptul că şi în clasa a V-a procentul acestui gen de interpretare este mic trebuie să conchidem următoarele:

Geometria „grafică" apare la elevii din clasa a IV-a în legătură cu nivelul lor de înţelegere, ca un mod de interpretare a cunoştinţelor geometrice adecvat vîrstei respective.

Elevul din clasa a VI-a, care află că dreapta geometrică este o dreaptă abstractă, închipuită, face direct legătura între ima-

ginea spaţială a dreptei — indiferent dacă ea este reprezentată în desen sau printr-o aţă întinsă — şi conceptul de dreaptă. Desenul nu serveşte ca o verigă de legătură între aceste două componente, care fuzionează direct. Dacă geometria grafică i-ar fi fost necesară elevului din clasa a VI-a pentru a trece de la interpretarea concret-perceptivă la cea geometrică ea ar fi fost reluată de el şi am fi regăsit-o în structura labilă a conceptelor sale figurale.

Dar avînd în vedere datele noastre putem afirma că elementul grafic — ca o componentă de sine stătătoare — apare puţin frecvent. Acolo unde apare capătă mai ales o tentă substanţialistă (puncte conectante, puncte de sprijin, linia se îndoaie etc.).

Sau, cu alte cuvinte: or copilul din clasa a VI-a a ajuns la interpretarea abstracto-geometrică a figurilor şi atunci îi este indiferent care este aspectul substanţial pe care-l ia componenta intuitivă, ori n-a ajuns la interpretarea geometrică şi atunci, după cum se vede, rămîne de preferinţă, la o interpretare substanţialist-concretă.

Aşadar aceste trei moduri de interpretare — substanţialistă, grafică, geometrică, nu se succed pur şi simplu. Ele se întrepătrund, se ciocnesc dialectic, se influenţează reciproc dînd naştere, cum am văzut, unei evoluţii complexe. Această evoluţie complexă se manifestă atît în revenirea la o predominare substanţialistă în clasa a V-a, cît şi în complexitatea răspunsurilor ca atare — printre care foarte multe, la toate clasele, prezintă un caracter hibrid.

CAPITOLUL AL XVIII-lea

LINIA DREAPTĂ

II. PRELUNGIREA LINIEI DREPTE

Una din caracteristicile liniei drepte, ca entitate geometrică este aceea că este infinită. Se înţelege că această nelimitare a liniei nu poate fi un concept dobîndit de copil spontan, din practica sa curentă. Care este structura psihologică a acestui concept şi care este mecanismul constituirii sale?

Explicaţia cea mai simplă pe care sîntem tentaţi de la început s-o acceptăm este aceea că e vorba de o cunoştinţă de origine didactică, a cărei însuşire cere din partea copilului un anumit nivel de dezvoltare a procedeelor logice — în primul rînd mecanismul iteraţiei logice (ca în constituirea noţiunii de număr

Tabela nr. 11

	II	III	IV	V	VI
1. Pînă la marginea obiectului	21,0	13,3	16,9	27,5	5,1
2. Cît se poate	—	2,9	0,9	—	1,7
3. Este indicată o anumită distanţă	7,0	1,9	2,9	1,3	—
4. Pînă la un punct	—	1,9	0,9	—	—
5. Cît este nevoie	—	0,9	0,9	1,2	—
Total soluţii determinate	28,0	20,9	22,5	30,0	6,8
6. Cît vrem	8,0	37,2	33,9	10,0	10,1
7. Se mai poate prelungi	2,0	0,9	2,9	1,3	2,5
8. Mult, foarte mult	7,0	15,3	3,8	2,5	1,7
Total soluţii nedeterminate	17,0	53,4	40,6	13,8	14,3
9. Oricît	—	0,9	4,8	—	3,3
10. Infinit	1,0	2,9	14,2	46,2	73,1
Total nelimitat	1,0	3,8	19,0	46,2	76,4
11. Alte răspunsuri	2,0	2,9	3,8	5,0	1,7
12. Nu răspund	52,0	19,0	14,1	5,0	0,8

Scanned with OKEN Scanner

natural). De fapt aceasta revine la a afirma că „infinitul", despre care e vorba, e în fond o noţiune ultimă, ireductibilă: iteraţia logică la care ne referim implică ideea nelimitării. Progresul logic ar consta aci, pur şi simplu, în posibilitatea conceperii unei asemenea iteraţii nelimitate.

Rezultatele noastre însă aduc unele elemente în plus în această direcţie.

Tabelul nr. 11 indică trei categorii de răspunsuri:

1) Prelungirea liniei este în funcţie de dimensiunile obiectului pe care e trasată sau, în general, de anumite condiţii materiale. Dreapta apare ca limitată.

2) Lungimea dreptei este nedeterminată.

3) Dreapta este infinită.

Aceste categorii ar reprezenta, în linii mari şi etapele evoluţiei conceptului pe care îl discutăm.

În cadrul fiecărei categorii există cîteva tipuri de răspunsuri. Să urmărim evoluţia lor.

Răspunsul cel mai „concret" este cel care susţine că linia poate fi prelungită pînă la marginea tablei sau caietului pe care e desenată. În acest caz, evident, nu e vorba încă de conceptul geometric ci de imaginea intuitivă a liniei desenate. Acest tip de răspuns formează la clasa a II-a grupa cea mai numeroasă: 21%. (Trebuie să ţinem seama aci că 52% dintre subiecţi n-au răspuns de loc la această întrebare). Frecvenţa scade la clasa a III-a (13,3%), creşte puţin la clasa a IV-a (16,9%) pentru a creşte apoi mult la clasa a V-a, unde atinge maxima (27,5%). La clasa a VI-a curba coboară foarte mult ajungînd la nivelul minim: 5,1%.

Iată cîteva exemple:

Ghe. Serg. (clasa a II-a). „Pot s-o prelungesc cît este foaia de mare".

Str. Alex. (clasa a II-a). „Putem s-o prelungim pînă sus".

Şerb. Pet. (clasa a II-a). „Pînă la cap".

Ghe. Const. (clasa a II-a). „Pe toată tabla".

Drag. Const. (clasa a III-a). „Aş putea s-o prelungesc cît toată tabla".

Ol. An. (clasa a III-a). „Aş putea s-o prelungesc pînă jos la colţul foii".

Şai. Ric. (clasa a IV-a). Dv. aţi putea prelungi această linie pînă la ambele capete ale tablei".

Jur. Cam. (clasa a V-a). „Aş putea s-o prelungesc pînă la sfîrşitul zidului sau al foii".

Alt. Sim. (clasa a V-a). „Pînă la marginea colii".

Scanned with OKEN Scanner

Celelalte tipuri de răspunsuri care intră în categoria aceasta sînt, în general, mai puţin numeroase.

Intră în această categorie răspunsurile indicînd o anumită distanţă.

Aşa, de exemplu, elevul Dis. Pet. (clasa a II-a) : răspunde : „Ea poate fi prelungită de 15 cm.".

Dib. Ioan (clasa a IV-a). „Această linie se prelungeşte de un km.".

Apar, începînd de la clasa a III-a, şi soluţii mai vagi: „Pînă la un punct", „Cît este nevoie", „Cît se poate" — puţin numeroase. Toate acestea însă presupun ideea că dreapta este limitată. Urmărind dinamica acestei categorii de răspunsuri — fie că ne referim la grupa cea mai numeroasă („Pînă la marginea obiectului") fie că ne referim la categoria în ansamblul ei — ne atrage atenţia un fapt: O creştere pronunţată la clasa a V-a a procentelor exprimînd soluţia intuitiv-concretă a problemei pusă de noi.

Asemenea creşteri ale procentelor de soluţii intuitiv-concrete la clasa a V-a am întîlnit şi cu alte ocazii. De astă dată e vorba chiar de un maxim în raport cu nivelul atins de celelalte clase.

Trecem la a doua categorie de soluţii : lungimea dreptei este nedeterminată. Grupa cea mai numeroasă, la toate clasele este cea a răspunsurilor de tipul „Cît vrem". Iată cîteva exemple din fiecare clasă cercetată.

Clasa a II-a

Şar. Mar. „Putem s-o prelungim pînă unde vrem".

Ghe. Cez. „Puteţi s-o prelungiţi cît vreţi".

Mar. Adr. „Putem să prelungim cît vrem".

Ion. Vior. „Această linie se poate prelungi pînă unde vrei".

Clasa a III-a

Pan. Marg. „Aţi putea s-o prelungiţi pînă unde vreţi".

Buz. M. „Această linie se prelungeşte cît vrem".

Baj. Ana. „O prelungim cît vrem deoarece este o linie şi nu un segment".

Str. Mar. „Această linie se poate prelungi cît vrem noi".

Clasa a IV-a

Vos. Pan. „Putem s-o prelungim pînă unde vrem".

Mef. Buc. „O linie dreaptă putem s-o prelungim cît vrem".

Scanned with OKEN Scanner

Roz. Const. „Puteți s-o prelungiți pînă unde vreți".

Pop Vor. „Această linie se poate prelungi pînă unde vrem".

Clasa a V-a

Voi. Mel. „Această linie se poate prelungi pînă unde vreau eu".

Cor. Dan. „Aș putea s-o prelungesc pînă unde vrem".

Mar. Chir. „Cît vrem noi pînă la infinit".

Dinc. El. „Poate fi prelungită cît vrem însă nu se întîlnește niciodată.

Clasa a VI-a

Nuță Const. „Această linie poate fi prelungită cît vrem. Ea nu se sfîrșește niciodată.

Zep. Nic. „Această linie poate să fie prelungită pînă unde vrem noi".

Niț. Lia. „Poate fi prelungită oricît de mult vrem".

Giur. Ion. „Această linie nu are margini. Ea poate fi prelungită cît vrem".

Dir. Mar. „Această linie e infinit de lungă și o putem prelungi cît vrem noi".

Mih. Flor. Linia aceasta poate fi prelungită pînă unde vrem, se spune pînă la infinit".

Drag. Mar. „Această linie este infinit de lungă și o putem prelungi cît vrem".

Răspunsurile de tipul „Linia poate fi prelungită cît vrem" apar chiar de la clasa a II-a (8%). Procentul crește mult la clasa a III-a (37,2%) unde curba atinge nivelul maxim. La clasa a IV-a constatăm o scădere ușoară (33,9%). La clasele V și VI avem procente aproape egale mult mai scăzute decît la clasele III și IV.

Numărul mare de răspunsuri de acest gen la două clase, III și IV, unde formează grupele cele mai numeroase, ne îndreptățește să ne oprim mai mult asupra lor.

Faptul cel mai interesant de remarcat este acela că procentele acestor răspunsuri de-a lungul claselor cercetate sînt reprezentate de o curbă care merge paralel cu curbele aceluiași tip de răspuns pentru întrebarea : „Cîte puncte pot fi cuprinse între A și B ? În afară de clasa a II-a unde nu avem același raport (ceea ce influențează însă numai puțin alura curbei) toate procentele răspunsurilor de tipul „Cît vrem" la întrebarea „Cît poate fi prelungită dreapta ?" reprezintă, cu aproximație, dublul procentelor acelorași răspunsuri obținute la întrebarea „Cîte puncte pot fi între A și B ?"

Paralelismul este extrem de interesant întrucît e vorba de probleme fundamental deosebite referindu-se la concepte geometrice cu totul diferite.

Nu poate fi vorba de o coincidenţă întîmplătoare. Nu poate fi vorba nici de o repetiţie mecanică a unui tip de răspuns la aceiaşi copii, în primul rînd pentru că între cele două întrebări sînt intercalate altele fără legătură cu ele, în al doilea rînd pentru că nu avem o identitate numerică ci un raport constant între cele două serii de procente. Paralelismul curbelor indică faptul că e vorba de un fenomen mai profund şi anume de aceeaşi atitudine mentală care stă la baza celor două serii de răspunsuri. Masarea acestui tip de răspunsuri la primele clase, prezenţa maximei la clasa a III-a, reducerea apreciabilă a frecvenţei la ultimele clase, toate denotă faptul că e vorba de o evoluţie comună.

În legătură cu întrebarea „Cîte puncte sînt între A şi B ?“ noi am propus următoarea explicaţie. Răspunsurile de tipul „Cîte vrem“ constituie rezultanta unui fenomen de simbioză mentală în care se sumează, într-o anumită etapă a evoluţiei copilului (clasele III şi IV) două tendinţe fundamental deosebite : pe de o parte expresia unei nedeterminări condiţionate subiectiv — ideea că numărul de puncte este arbitrar, dependent de voinţa proprie, — şi, pe de altă parte expresia unei nedeterminări obiective — ideea că în mod obiectiv, nu există o condiţie care să limiteze numărul de puncte.

La clasa a II-a predomină vechea atitudine mentală. La clasele III şi IV cele două tendinţe se sumează, se susţin reciproc (fenomenul de simbioză mentală) ceea ce ne dă creşterea apreciabilă constatată la aceste clase. La clasele V şi VI vechea tendinţă e pe cale de dispariţie şi astfel procentele se reduc. Formularea dubioasă este pe cale de a fi abandonată şi înlocuită de o formulare mai precisă : între A şi B se află o infinitate de puncte.

Convingerea noastră este că şi în problema prelungirii dreptei este vorba de aceleaşi fenomene. Deşi problemele sînt deosebite ele solicită aceeaşi atitudine mentală. Creşterea masivă a procentelor la clasele III şi IV — cu maxima de la clasa a III-a, denotă faptul că şi aci avem de-a face cu acelaşi fenomen de simbioză mentală între ideea nelimitării dreptei, condiţionată subiectiv („prelungesc dreapta cît vreau eu“) şi opinia că dreapta poate fi prelungită indefinit pentru că nici un obstacol obiectiv nu se opune.

Dacă urmărim formulările elevilor, nu constatăm deosebiri esenţiale la clasele II, III, IV. Doar unele deosebiri de nuanţă care intervin la elevii claselor III şi IV ne permit să în-

trezărim accentuarea elementului obiectiv în nedeterminarea exprimată.

Aşa, de pildă, subiectul Baj. Ana (clasa a III-a) îşi motivează răspunsul prin aceea că „e o linie nu un segment", cu alte cuvinte nu presupune limite, extremităţi, ca segmentul. Subiectul Mef. Buc. (clasa a IV-a) se referă la linia dreaptă în genere şi raţionamentul pe care-l face este de fapt un raţionament deductiv (numai majora este exprimată, minora şi concluzia sînt presupuse). Subiecţii Buz. M. (clasa a III-a), Str. Mar. (clasa a III-a). Pop Vor. (clasa a IV-a) folosesc formulări impersonale. Această linie se poate prelungi" (găsim şi în clasa a II-a această formulare, dar mai rar).

Trecerea la clasa a V-a aduce însă un element nou. La unii elevi posibilitatea de a prelungi linia dreaptă „Cît vrem" este pusă în directă legătură cu absenţa obstacolului. Aşa, de pildă Din. El. arată că linia poate fi prelungită „cît vrem, ea nu se întîlneşte niciodată" (nu se întîlneşte cu ea însăşi — ca cercul — nu se închide).

La clasa a VI-a, după cum rezultă şi din exemplele date, asemenea explicaţii ale soluţiei „Cît vrem", prin raportarea la lipsa unei limite obiective, devin foarte frecvente. În unele din aceste răspunsuri subiecţii asociază în mod explicit formularea „Cît vrem" cu termenul „infinit".

Analiza acestor exemple confirmă cele arătate de noi mai sus cu privire la răspunsurile de tipul „Linia dreaptă poate fi prelungită cît vrem". Sensul real al acestei soluţii se schimbă de la o vîrstă la alta. El evoluează de la o nedeterminare exprimînd un arbitrar subiectiv, pînă la forma superioară a nelimitării obiective, trecînd prin etapa intermediară a unui fenomen de simbioză mentală — evoluţie analogă cu aceea a răspunsurilor „Între cele 2 puncte A şi B putem pune cîte puncte vrem".

Între rezultatele obţinute la cele două întrebări există totuşi o deosebire care nu poate fi trecută cu vederea: procentele răspunsurilor de tipul „Dreapta poate fi prelungită cît vrem", reprezintă la fiecare clasă, cu excepţia clasei a II-a, aproximativ dublul procentelor de răspunsuri de tipul „Cîte puncte vrem". Deosebirea este evident determinată de materialul cu care copilul operează în cele două cazuri. Rezultatul obţinut ne arată că ideea nedeterminării cantitative prin nelimitare este mai uşor însuşită de copil cînd e vorba de nelimitarea extensivă (prin

alungire, prin amplificare) decît atunci cînd e vorba de o nelimitare intensivă (prin diviziune continuă).

De ce aceasta ? Pentru că operaţia repetată indefinit a alungirii, a amplificării, deşi presupune un anumit progres al procedeelor logice se realizează în primul rînd cu mijloace mentale intuitive. Divizibilitatea indefinită care duce la ideea punctului geometric lipsit de dimensiuni, presupune ideea mai abstractă şi mai complexă a continuităţii. Ea cere, pentru a fi deplin realizată, o construcţie mintală simbolico-abstractă a cărei achiziţie este mai lentă. Această operaţie este mai subtilă pentru că are de învins un conflict fundamental pentru mintea copilului : contradicţia dintre caracterul limitat al domeniului în interiorul căruia are loc procesul de diviziune şi caracterul nelimitat al aceleiaşi diviziuni. Că e vorba de o deosebire determinată de natura obiectivă a materialului cu care copilul operează în cele două probleme, se vede şi din faptul că la clasa a II-a unde am presupus că soluţia „Cîte vrem“ exprimă, în primul rînd, un arbitrar subiectiv raportul procentelor nu este păstrat. Mai mulţi sînt copiii care, la clasa a II-a afirmă că pot pune „Cîte puncte vor“ decît copiii care afirmă că pot prelungi dreapta „pînă unde vor“.

Un alt tip de răspuns care aparţine acestei categorii de soluţii este „Dreapta se poate prelungi mult (foarte mult)“.

Comparat cu răspunsul de tipul „Cît vrem“ în sens de arbitrar subiectiv, răspunsul „Putem prelungi dreapta mult“ apare ca o soluţie superioară, întrucît include un element obiectiv : cantitatea (deşi aproximativă) cu care dreapta poate fi prelungită.

În comparaţie însă cu răspunsul „Cît vrem“ în sensul unei nedeterminări obiective, răspunsul „Putem prelungi dreapta mult“ apare ca o soluţie inferioară, întrucît nu exprimă propriuzis ideea unei nedeterminări (etapa spre înţelegerea nelimitării), ci mai curînd o anumită impreciziune în indicarea dimensiunii respective.

Acest gen de răspuns trebuie să apară deci, în special, după etapa lui „Cît vrem“ în sens de arbitrar subiectiv şi înainte de „Cît vrem“ în sens de nedeterminarea obiectivă. El trebuie să fie deci contemporan cu stadiul tranzitoriu al indistincţiei dintre aceste două semnificaţii opuse.

Datele din tabelul 11 concordă cu această ipoteză. Tipul de răspuns : „Linia (dreaptă) poate fi prelungită mult (sau foarte mult)“ apare încă din clasa a II-a (cu un procent de 7%) dar

atinge maxima la clasa a III-a (15,3%). Spre deosebire însă de răspunsul „Cît vrem" la care mai avem un procentaj ridicat la clasa a IV-a (sub influenţa justificării prin nedeterminare obiectivă a cărei pondere este în creştere) procentul răspunsurilor de tipul „Mult", „Foarte mult" — scade brusc începînd chiar de la această clasă (3,8%) şi merge descrescînd spre clasele superioare.

Pe de altă parte răspunsul de tipul „Mult" sau „Foarte mult" este superior răspunsurilor care limitează prelungirea dreptei la suportul material (tablă sau foaie de hîrtie). De aceea, acest gen de răspuns, „Poate fi prelungită mult", reprezintă o altă cale pe care copiii ajung la ideea dreptei infinite. Achiziţia principală a acestui stadiu intermediar constă în însăşi capacitatea mintală a copiilor respectivi de a depăşi cadrul perceptual printr-o operaţie mintală constructivă.

Pentru copiii din clasa a IV-a însă, acest gen de răspuns apare ca nesatisfăcător mai ales prin impreciziunea sa.

Faptul că frecvenţa acestui gen de răspuns se reduce foarte mult începînd de la clasa a IV-a, înseamnă că de la acest nivel dezvoltarea mintală le permite copiilor să opteze cu mai multă siguranţă (chiar dacă nu ca rezultat al unui raţionament conştient) pentru una din cele două direcţii principale : fie interpretarea intuitiv concretă propriu-zisă (care se manifestă în limitarea la un cadru material dat), fie interpretarea geometrică exprimată în răspunsul „Dreapta poate fi prelungită la infinit".

În a III-a categorie se află răspunsurile care consideră că dreapta este infinită.

Procentajele merg crescînd de la clasa I la clasa a VI-a. Această creştere continuă este rezultatul dezvoltării intelectuale generale a copilului ca şi al cunoştinţelor geometrice dobîndite. La clasele II şi III asemenea răspunsuri sînt rare. La clasa a IV-a însă procentul ajunge la 14,2%. La clasa a V-a procentul creşte mult, ajungînd la 46,2%. La clasa a VI-a 73,1% dintre copii ne dau acest răspuns. Este cea mai mare concentrare de răspunsuri în jurul unei singure soluţii întîlnită pînă aici.

Comparînd procentele acestor răspunsuri cu cele obţinute pentru răspunsul similar la întrebarea „Cîte puncte pot fi între A şi B" constatăm că primele procente sînt mult mai mari. La clasele II şi III nici un copil nu afirmase că între A şi B avem o infinitate de puncte. În problema dreptei însă, chiar la aceste clase, apar cîţiva copii care afirmă că dreapta poate fi prelungită la infinit.

Scanned with OKEN Scanner

La clasa a IV-a numai 3,8% dintre subiecți afirmă că între A și B avem o infinitate de puncte, în timp ce 14,2% susțin că dreapta poate fi prelungită la infinit.

La clasele a V-a și a VI-a, după cum rezultă din compararea tabelelor 3 și 11 diferența continuă să fie foarte mare în favoarea răspunsurilor „Dreapta poate fi prelungită la infinit".

Așadar utilizarea noțiunii „infinit" se dovedește a comporta grade deosebite de dificultate în funcție de natura domeniului.

Sînt posibile aci două explicații.

Prima se referă la procesul didactic. În predarea noțiunilor de geometrie, în primele clase, apare de multe ori prilejul de a se formula explicit proprietatea dreptei de a fi infinită (mai ales în legătură cu dreptele paralele), în timp ce pentru numărul punctelor cuprinse într-un interval dat asemenea ocazii sînt mai rare. Acest fapt contează fără îndoială dar nu poate explica singur rezultatele obținute și iată de ce :

a) Soluția „infinit" apare în răspunsurile copiilor pentru dreaptă și nu apare pentru puncte la clasele mici II și III unde încă nu e vorba de o influență didactică sistematică în această privință.

b) În legătură cu noțiunile geometrice discutate pînă aci, (caracteristicile punctului, definiția punctului, natura dreptei, definiția dreptei) am constatat la clasa V-a un regres în raport cu clasa a IV-a.

În cazul noțiunii de infinit însă o asemenea scădere nu apare. Dimpotrivă, procentul elevilor care dau această soluție crește foarte mult la clasa a V-a (clasă în care elevii nu învață geometria) ajungînd de circa 5 ori mai mare decît al elevilor care dau aceeași soluție pentru numărul punctelor cuprinse în intervalul AB.

c) Și soluția nedeterminată „Cît vrem" apare și ea în procente mai mari pentru prelungirea dreptei, decît pentru numărul punctelor. Această soluție nu exprimă direct o influență didactică. Toate acestea ne fac să presupunem că în afară de acțiunea procesului didactic mai există o cauză de care trebuie să ținem seama. Este fără îndoială aceeași cauză care face ca și în cazul soluției de tip nedeterminat „Cît vrem" să avem procentaje mai mari ale unor astfel de răspunsuri la dreaptă decît la intervalul AB.

Trebuie să admitem că pentru gîndirea copilului există o deosebire de fond între *infinitul extensiv* al dreptei și infinitul *intensiv* al punctelor cuprinse într-un interval dat. În cazul

numărului de puncte așa cum am arătat și pentru soluția „Cît vrem", intervine în primul rînd contradicția fundamentală între caracterul limitat al intervalului și nelimitarea elementelor care-l constituie.

Intervine, în al doilea rînd, contradicția între continuu și discret; ori punctele au o anumită dimensiune și atunci o infinitate de puncte nu poate fi cuprinsă într-un interval finit, ori punctele n-au nici o dimensiune și atunci e greu de conceput cum dintr-o acumulare oricît de mare se obține totuși ceva. Evident, copilul nu-și pune explicit aceste probleme. Dar el intuiește aceste dificultăți.

Un alt fapt care ne atrage atenția este următorul. Așa cum am arătat, spre deosebire de celelalte noțiuni geometrice corecte care la clasa a V-a sînt în regres, soluția corectă la problema prelungirii dreptei — dreapta este infinită — înregistrează un progres apreciabil la aceeași clasă. Cum se poate explica acest fapt ?

Noțiunea de infinit apare pentru gîndirea adultului ca o noțiune complexă și abstractă, produs al unei elaborări științifice, depășind orice posibilitate de reprezentare intuitivă. Cum e posibil ca o asemenea noțiune să întrunească un număr mult mai mare de „adeziuni" decît alte noțiuni geometrice mai puțin complicate ?

Și astfel sîntem obligați să ne punem întrebarea : Care este în definitiv sensul real al noțiunii de infinit pentru copil ?

Răspunsurile de acest tip obținute în experimentele colective sînt în general laconice și nu oferă posibilitatea unei analize. De aceea nu vom încerca nici o ipoteză înainte de a prezenta rezultatele obținute prin convorbiri individuale în problema prelungirii dreptei.

Tud. Elena (9,8 cl. III). Exp. Pînă unde putem prelungi această linie ?
El. Pînă unde se termină caietul.
Exp. Și mai departe ?
El. Nu se mai poate.

Pred. Aur. (10, cl. III). Exp. (Întrebarea).
El. Pînă la marginea caietului.
Exp. Dar mai departe nu s-ar mai putea ?
El. S-ar putea prelungi oricît.
Exp. Și n-ai să îmbătrînești trăgînd mereu această linie ?
El. Numai cu gîndul o prelungim.

Scanned with OKEN Scanner

Ştef. Lig. (9,11 cl. III). El. Dacă avem o hîrtie lungă putem s-o prelungim şi pînă în colţ.

Exp. Fără hîrtie nu putem s-o prelungim ?

El. Ba putem s-o prelungim şi pe masă dar se murdăreşte masa.

Pred. Sim. (9,8 cl. III). El. O prelungiţi cam cît ar trebui.

Exp. Unde sînt obligat să mă opresc ?

El. Unde, nu mai aveţi unde.

Exp. Şi asta unde ar fi ?

El. La capăt.

Exp. Unde e capătul ?

El. La marginea foii.

Exp. Dar mai departe nu s-ar putea prelungi ?

El. Nu mai este loc.

Exp. Pe masă nu s-ar putea prelungi ?

El. Ba da.

Exp. Dar cînd se termină masa ?

El. O facem pe alt loc.

Pom. Cor. (9,10 cl. III). Putem s-o prelungim şi pînă la linie şi pînă la marginea foii... şi pe perete... Niciodată nu se termină.

Exp. Dar cînd trebuie să trecem de pe o bancă pe cealaltă?

El. (pare derutat. Se gîndeşte). Punem o sfoară.

Dăr. Nic. (10,7 cl. IV). El. O prelungim cît putem, cît loc are.

Exp. Şi pînă unde ?

El. Pînă la distanţa care vrem noi.

Exp. Dar dincolo de caiet am putea prelungi ?

El. Da, putem. Cît are loc... departe...

Exp. Dar dacă se termină foaia ?

El. Lipim alte foi.

Ion. Şerb. (10,8 cl. IV). El. Pînă la infinit.

Exp. De unde ştii ? Ai fost la infinit ?

El. Dacă o tragem... n-are cine să ne împiedice. Nu e nici un obstacol.

Exp. Nu îmbătrînim trăgînd mereu ?

El. Pînă murim.

Exp, Şi pe urmă.

El. (tace).

Exp. Atunci de ce spunem că putem trage la infinit ?

El. (tace. E nedumerit).

Nicu Gabr. (10,9 cl. IV). El. Cît vreţi de mult.

Exp. Adică pînă unde ?

El. Pînă la marginea foii.

Exp. Şi dincolo de foaie ?
El. Dacă aveţi pe ce.
Exp. Şi dacă n-am pe ce ?
El. Nu se poate.
Exp. Dar dacă vreau să duc o linie de la acest colţ al camerei la celălalt (la colţul opus — extremitatea diagonalei paralelipipedului) ?
El. Nu se poate, N-am foaie... Ba s-ar putea...
Exp. Cum ?
El. Cu o linie de lemn.
Dem. Ver. (11, cl. IV). El (prelungeşte linia pînă la marginea foii). Mai departe nu se mai poate.
Exp. Dar pînă la bec aş putea să duc de aici o linie (pornind de la un punct de pe foaie) ?
El. Nu. Nu se poate.
Exp. De ce ?
El. Nu pot să desenez în aer.
Pop. Eug. (10, 9, cl. IV). El. Să duc linia pe pagină ?
Exp. În general, cît poţi s-o prelungeşti ?
El. La infinit.
Exp. Ei du-o.
El. Pe pagină nu putem.
Exp. Atunci cum ?
El. Pe o stradă lungă. O tragem cu o cretă. Putem trage pînă la infinit dacă strada este foarte lungă.
Exp. Dar tu ai putea s-o tragi ?
El. Aş putea s-o trag pe caiet, pe masă... dar mai departe nu.
Exp. Nu îmbătrînim tot mergînd cu ea ?
El. Tragem pînă n-om mai putea.
Exp. Dacă noi am îmbătrîni ar putea s-o tragă alt om, nu-i aşa ?
El. Nu. Strada se termină. În aer nu poţi să tragi linii. Nu se mai poate.
Pop. Vio. (10,6, cl. IV). El. Pînă la infinit.
Exp. Cum facem ca să tragem linia la infinit ?
El. Tragem pe foaie... pe pămînt. Înconjurăm pămîntul de cîteva ori... tot timpul... Nu se poate trage în aer.
Exp. Şi dacă îmbătrînim ?
El. Rămîne alt urmaş. O trage altul.
Bra. Zoi. (11,8, clasa a V-a). El. La infinit.
Exp. De unde ştii ?

El. N-are nici o întrerupere. Adică niciodată nu se sfîrșește.
Exp. Dar cu ce o tragem ?
El. Cu creionul.
Exp. O trag pînă la infinit și mă opresc ?
El. Nu, dacă vă opriți nu e infinit. Infinitul nu e limitat.
Exp. Și nu îmbătrînim trăgînd mereu ?
El. Ba da.
Exp. Atunci ?
El. Trebue dusă în continuu...

Bus. Ștef. (11,8, cl. V). El. O prelungim cît vrem.
Exp. Totuși, cît o prelungim ?
El. Cît ne ajunge pe caiet. O limităm la ambele capete.
Exp. Și mai departe ?
El. Putem s-o prelungim și dincolo de caiet. Ca să avem o linie nelimitată. Pînă cînd vrem.
Exp. Ce înseamnă „linie nelimitată" ?
El. Nu e limitată la ambele capete.

Che. Iul. (11,10, cl. V). Pînă la infinitiv.
Exp. Ce găsim acolo ?
El. Nimic.
Exp. Atunci de ce să ajungem acolo ?
El. (tace).
Exp. Poate vrei să spui la infinit ?
El. Da.
Exp. Și ce înseamnă la infinit ?
El. O linie nesfîrșită.
Exp. Tu poți să duci o linie nesfîrșită ? Aici se termină foaia. Ce facem mai departe ?
El. N-o mai tragem.

Ilie Just. (12,8, clasa a VI-a). El. Poate fi prelungită pînă unde vrem. Oricît am prelungi-o... continuăm. Nu ne împiedică nimic.

Geo. Sor. (12,6, cl. VI). El. Putem să prelungim linia pînă la infinit.
Exp. De unde știi ?
El. Linia care nu este semidreaptă poate fi prelungită pînă la infinit.
Exp. Ce înseamnă că putem s-o prelungim pînă la infinit ?
El. Că putem... Nu se știe pînă unde.
Exp. Și la un moment dat ne oprim ?
El. Nu, mergem înainte.
Exp. Mergem mereu așa ?
El. Pînă ne ajunge foaia.
Exp. Și pe urmă ?

Scanned with OKEN Scanner

El. Luăm altă foaie, pe urmă altă foaie.
Exp. Tu ai făcut așa vreodată ?
El. Nu, n-am făcut niciodată.
Exp. Atunci de unde știi ?
El. De la geometrie.

Hor. Syb. (13,cl. VI-a). Linia se poate prelungi la infinit.
Exp. De unde știi ?
El. Așa-mi închipui eu.
Exp. Ce înseamnă că se poate prelungi la infinit ?
El. Nu se termină niciodată.
Exp. De unde știi ?
El (rîde).
Exp. Pot să duc o linie de la un punct de pe caiet la bec ?
El. Da. Dar numai în imaginație sau un fir de ață care să însemne linia.

Spir. Teod. (13, cl. VI). El. Putem prelungi linia pînă la infinit.
Exp. Ce înseamnă că prelungim pînă la infinit ?
El. Prelungim în continuare... mereu și n-ajungem niciodată la un punct. Infinitul nu există.
Exp. De unde știm că putem prelungi mereu ?
El. Nu știu.

Bun. Ghe. (12,6, cl. VI). El. Se poate prelungi pînă la infinit.
Exp. de unde știi ?
El. Am învățat.
Exp. Tov. profesor de unde știe ?
El. A învățat și el.
Exp. Pentru prima oară cum s-a aflat ?
El. Oriunde ajungem mai putem s-o prelungim în continuare.
Exp. De unde știi ?
El. E o axiomă. Nu se poate demonstra.

Aceste răspunsuri ale copiilor confirmă datele statistice. Nu e vorba de simpla însușire a unui termen — termenul „infinit". Începînd din clasa a IV-a — și uneori chiar din clasa a III-a — din ce în ce mai mulți copii dovedesc că înțeleg noțiunea respectivă. Mijloacele intelectuale ale acestor copii sînt apte pentru asimilarea ei. Ideea unei linii care nu se termină niciodată nu le apare bizară ci perfect limpede — deși evident acest concept depășește orice experiență directă. Ei și-o însușesc cu ușurință și explică cu ușurință despre ce e vorba. „Merge... fără întrerupere", „nu e nici un obstacol", „nu ne oprim nicăieri", „nu ne oprim la nici un punct" etc., sînt formulări care

dovedesc faptul că acești copii traducînd noțiunea de infinit în cuvinte proprii, o fac corect și fără să ezite.

Care este originea acestui concept ?

Se știe că Im. Kant, în *Critica rațiunii pure*, a utilizat dificultățile în înțelegerea ideii de infinit ca argumente în favoarea concepției sale privitoare la originea subiectivă a imaginii pe care ne-o facem despre lumea exterioară. În *Antinomia rațiunii pure* el se străduiește să demonstreze imposibilitatea de a se admite atît teza infinității spațiului și timpului cît și teza finității spațiului și timpului. Din această antinomie el deduce o dovadă în sprijinul „idealității transcendentale a fenomenelor" [1].

Hegel a criticat demonstrațiile lui Kant arătînd faptul că fiecare din ele se bazează pe un cerc vicios. Dar soluția lui Hegel este, în ultima instanță idealistă (esența noțională a infinitului). Contribuția sa importantă rezidă în faptul că infinitul nu trebuie înțeles ca o repetare identică sub forma unei infinități cantitative ci ca o dezvoltare implicînd varietatea calitativă [2].

Fr. Engels a sintetizat cuceririle importante obținute de filozofia anterioară în studiul acestei probleme, supunînd în același timp unei critici temeinice tezele idealiste ale lui Kant și Hegel.

Concepția materialist-dialectică susține, pe baza tuturor rezultatelor științei, ideea infinității materiei ,deci și ideea infinității spațiului și timpului ca forme fundamentale de existență ale materiei. Contradicțiile relevate în atributul infinității nu-i sperie pe materialiști. „Infinitul este o contradicție și e plin de contradicții — scria Engels. O contradicție este însuși faptul ca un infinit să fie alcătuit numai dintr-o sumedenie de mărimi finite și totuși așa este... Tocmai pentru că infinitul este o contradicție, el este un proces infinit, care se desfășoară fără sfîrșit în timp și în spațiu. Nimicirea acestei contradicții ar fi sfîrșitul infinitului" [3].

Ceea ce ne interesează în lucrarea de față este modul în care copilul ajunge să-și însușească ideea de infinit, idee care se dovedește atît de complexă, întrucît reflectă un atribut al întinderii și duratei, contradictoriu în însăși esența sa.

Din datele noastre rezultă faptul că conceptul de infinit este însușit progresiv de către copii, începînd de la o anumită vîrstă. Faptul cel mai surprinzător este acela că în însușirea acestei noțiuni, care îi apare adultului atît de complexă, copilul

---

[1] Im. Kant, *Critica rațiunii pure*, p. 438.

[2] Vezi în acest sens lucrarea lui S. T. Meliuhin, *Problema finitului și infinitului*, Ed. politică, Buc., 1961 p. 137—154.

[3] F. Engels, *Anti-Dühring*, E.S.P.L.P., 1955, ed. a III-a, p. 61—62.

Scanned with OKEN Scanner

nu pare să întîmpine dificultăţi deosebite ! Nu constatăm nici oscilaţiile rezultatelor, de la o vîrstă la alta, pe care le-am găsit în legătură cu alte aspecte geometrice. Cum se explică această situaţie ?

Evident, procesul de învăţămînt joacă aci un rol important. Ideea spaţiului infinit, ideea dreptei infinite sînt concepte ştiinţifice, elaborate în evoluţia istorică a gîndirii ştiinţifice a umanităţii. E greu de presupus că un copil ar putea ajunge în mod independent la aceste concepte. Copilul ia deci cunoştinţă de ele în primul rînd în cadrul procesului instructiv. Problema este însă, de ce aceste concepte care ne apar nouă, adulţilor ca fiind extrem de complicate şi comportînd un grad înalt de abstractizare, li se par copiilor relativ simple ?

Toate datele, inclusiv răspunsurile copiilor, ne arată că pentru ei, de fapt, nu există contradicţia între *actual* şi *potenţial*, contradicţie pe care ideea de infinit o include. Ei nu au dificultăţi în înţelegerea noţiunii de infinit nu pentru că au depăşit dificultatea, ci pentru că n-au ajuns la ea, n-o sesizează. În mintea lor cele două laturi, cele două situaţii coexistă pur şi simplu aşa cum de atîtea ori am văzut în cursul expunerii noastre că pot coexista atitudini, semnificaţii, orientări fundamental distincte şi opuse. Puncte fără dimensiuni care pot fi mai mari sau mai mici, care pot avea o formă sau alta, linii geometrice care pot determina prin intersecţie puncte mai grele sau mai uşoare etc. etc. Fenomenul acesta al coexistenţei sensurilor opuse le permite copiilor să accepte, cu uşurinţă o noţiune care nouă ne apare deosebit de complicată. Ceea ce nouă ne apare a fi o contradicţie activă — dialectică, — cerînd o soluţionare într-un concept superior, poate constitui în mintea copiilor o simplă juxtapunere de semnificaţii simultan acceptabile.

Ideea nelimitării reprezintă — aşa cum am văzut în paginile precedente — o atitudine mentală veche. Evident nu e vorba în forma primară, decît de sentimentul unei independenţe a acţiunilor, expresie a voluntarismului infantil. Conceptul de infinit însă nu se reduce la aceasta. Este nevoie de o restructurare radicală, constînd în raportarea la datele obiective. Acest lucru nu este însă posibil decît prin achiziţia unui procedeu intelectual extrem de important — al extrapolării : continuarea printr-o activitate mintală constructivă, a unei acţiuni reale, în conformitate cu regulile acesteia.

Scanned with OKEN Scanner

Şi acest procedeu îşi are rădăcinile în etape mai vechi ale dezvoltării copilului. În forma sa primară, constituie o componentă eventuală a jocului copiilor.

Noţiunea de infinit găseşte deci, chiar la copiii din clasele III, IV, pregătite mijloacele intelectuale prin care va fi însuşită. Ea are la bază, în forma în care o găsim la 9—12 ani — fuziunea dintre vechea atitudine mentală a nelimitării acţiunii individuale şi procedeul logic al extrapolării. Ceea ce se accentuează la clasele III—IV, în ceea ce priveşte nelimitarea, este raportarea ei la datele obiective (consideraţii privitoare la absenţa unui obstacol obiectiv).

Pom. Cor. din clasa a III-a afirmă foarte clar. „Putem s-o prelungim şi pînă la linie şi pînă la marginea foii şi pe pereţi... Niciodată nu se termină". Acest „niciodată nu se termină" care-i apare adultului de-a dreptul înspăimîntător cînd încearcă să-l închidă în formele gîndirii logice, este pentru copil o noţiune fără complicaţii.

Ion. Şer. din clasa a IV-a formulează explicit ideea absenţei obstacolului obiectiv : el nu are nevoie să fi ajuns personal „la infinit" pentru a fi convins că dreapta se poate prelungi fără sfîrşit. Explicaţia lui e clară şi categorică : „N-are cine să ne împiedice... Nu e nici un obstacol".

Pe Pop Eug. din clasa a IV-a nu-l sperie nici observaţia „Ce se întîmplă dacă îmbătrînim" ? El găseşte o soluţie : „rămîn urmaşii, o trage altul".

Spir. Teod. din clasa a VI-a declară : „Prelungim în continuu, mereu şi n-ajungem niciodată la un punct". Şi apoi o afirmaţie care pare să contrazică cele susţinute înainte, dar care de fapt îi exprimă cu pregnanţă gîndul : „Infinitul nu există !" Infinitul nu este un punct terminus, cum s-ar părea că rezultă din structura frazei („tragem dreapta pînă la infinit"). Infinitul este inexistenţa a ceva, este in-existenţa oricărui obstacol. Contradicţia latentă izbucneşte aci între existenţă şi non-existenţă fără ca el, copilul, să-şi dea seama.

De fapt — şi acest lucru ni se pare deosebit de important pentru a înţelege constituirea noţiunii de infinit la copil — se petrece aci un fenomen psihologic plin de interes.

Infinitul din geometria euclidiană — drepta infinită, planul infinit intră în structura raţionamentelor ca realităţi atemporale. Asemenea celorlalte entităţi geometrice, ele se referă la spaţiul pur. Mişcarea apare în geometria euclidiană (translaţia, rotaţia etc.) dar este o mişcare sui-generis în care de fapt

timpul — durata efectivă a operaţiei — nu este luat în consideraţie. Chiar şi acolo unde anterioritatea contează ea apare ca o anterioritate logică, nu temporală.

Atunci cînd definim dreptele paralele ca fiind „dreptele situate în acelaşi plan care nu se întîlnesc niciodată", această afirmaţie exclude de fapt timpul, mişcarea efectivă. Dacă mişcarea — alungirea necontenită a dreptei în spaţiu — ar fi efectiv luată în consideraţie, atunci afirmaţia ar fi lipsită de sens, întrucît ar implica premisa unui control realizabil. De fapt cele două drepte paralele sînt *date* ca infinite iar ne-concurenţa lor este *dată* şi ea, nu prevăzută. În geometrie nu prevedem evenimente în sensul strict al anticipării, ci inferăm de la o serie de fapte la altele, fără consideraţii de succesiune temporală.

Infinitul geometric devine în acest sens o noţiune complicată, presupunînd un grad înalt de abstractizare şi neavînd sens decît în ansamblul, în structura noţiunilor geometriei euclidiene.

Pentru geometria euclidiană postularea infinităţii ca un dat (ca un atribut ce poate fi considerat atemporal) constituie o cerinţă a posibilităţii ei de a exista ca domeniu închis. Faimosul postulat V implică acest concept al infinităţii care *este*.

Dar aceasta nu este decît o viziune unilaterală. Infinitul, cum spuneam, include contradicţia fundamentală între actual şi virtual, care se află la baza „procesului infinit" (Engels). Infinitul este inseparabil legat de devenire, tocmai pentru că exprimă ceea ce este inepuizabil. Se înţelege că pentru schemele logicii formale, această contradicţie internă, este de nedepăşit şi noţiunea apare ca auto-distrugîndu-se (ca la Kant), ca o pură ficţiune (ca la Vaihinger).

Copilul este, într-un anumit sens mai realist decît geometria euclidiană dar aceasta numai pentru că geometria euclidiană presupune un grad de abstractizare la care copilul încă n-a ajuns.

El are de aceea, intuiţia „devenirii" pe care infinitul o implică, fără însă a sesiza contradicţia care se află la baza ei şi fără a fi speriat de ea. „Actualul" şi „potenţialul" coexistă literalmente în mintea sa fără a se contrazice şi fără a se deranja reciproc.

Copilul se apropie deci de ideea de infinitate pe calea sa realist-concretă.

Actul de construire a dreptei infinite este conceput ca un act real care cere un suport material : foaia de hîrtie, peretele, pămîntul etc.

Scanned with OKEN Scanner

L-am citat pe Pom. Cor. din clasa a III-a care arată că dreapta poate fi prelungită „şi pînă la linie şi pînă la marginea foii şi pe perete... fără ca să se termine vreodată". Intrebat apoi ce se întîmplă cînd trecem de pe o bancă pe cealaltă, subiectul nostru răspunde fără să ezite „Punem o sfoară".

Copilul Dan. Nic. din clasa a IV-a susţine că putem prelungi dreapta cît vrem noi. La întrebarea „Ce se întîmplă cînd se termină foaia" ? el răspunde prompt : „Lipim alte foi". Pop Eug. arată că linia poate fi prelungită la infinit dar el are nevoie pentru aceasta de o stradă lungă : „Putem trage pînă la infinit dacă strada este foarte lungă". Aceasta, deşi îşi dă seama că nu e vorba de o acţiune proprie ci de posibilitatea, în principiu, de a se trage o asemenea linie.

Pop Vior. din clasa a IV-a, care afirmă şi el că linia poate fi trasă „pînă la infinit", arată şi modalitatea practică de a realiza aceasta (de fapt, în consideraţiile lui nu mai e vorba de o dreaptă ci de o linie curbă) : „înconjurăm de mai multe ori pămîntul" — numai să nu abandonăm suportul material. Iar la întrebarea „Ce se întîmplă dacă îmbătrînim" ? copilul răspunde : „O trage altul".

Geo. Sor. (clasa a VI-a) nu e nici el contrariat de faptul că foaia pe care desenează linia are dimensiuni limitate : „Luăm altă foaie şi pe urmă altă foaie" găseşte el soluţia acestei probleme.

Evident, nu e vorba de simpla relatare a unei acţiuni care a avut loc efectiv ci de o construcţie mintală, de un proces de extrapolare în care se ia ca bază actul realizat şi se construieşte mai departe, după aceleaşi reguli. Mijloacele cu care copilul operează mintal sînt aci mijloace intuitive şi nu abstracţiuni. Dar e vorba de operaţii intuitive constructive, permiţînd depăşirea experienţei imediate, operaţii realizate prin procedee logice în continuu progres.

Aceste date aruncă o lumină asupra fenomenului constatat de noi în paginile precedente : creşterea continuă de la o clasă la alta a frecvenţei copiilor care utilizează noţiunea de infinit — în legătură cu prelungirea dreptei —, procentul foarte mare de copii care utilizează această noţiune la clasele mari — inclusiv clasa a V-a. La această clasă nu înregistrăm o scădere a procentului răspunsurilor adecvate în raport cu clasa a IV-a, cum s-a întîmplat cu alte noţiuni geometrice ci, dimpotrivă o creştere masivă. Sensul intuitiv pe care noţiunea de infinit îl dobîndeşte la copiii de 9—12 ani explică aceste rezultate. La

Scanned with OKEN Scanner

aceasta trebuie adăugată şi dezvoltarea generală a procedeelor logice capabile să facă faţă structurii mai complexe a noţiunii.

Concluzii parţiale

1. În linii mari, putem considera că în formarea ideii de dreaptă infinită există trei stadii succesive.

a) Un stadiu premergător — corespunzător clasei a II-a — în care predomină reprezentarea dreptei finite.

b) Un stadiu intermediar (corespunzător claselor III şi IV) în care predomină soluţiile prin nedeterminare — reprezentate în special prin răspunsul de tipul „Cît vrem".

c) Stadiul ultim, corespunzător claselor V şi VI, în care predomină ideea dreptei infinite.

Cifrele din tabelul nr. 11 ne arată că nu e vorba de o succesiune simplă. De fapt, cele trei tipuri de soluţii sînt reprezentate în toate cele trei stadii. Ceea ce caracterizează un stadiu este predominarea uneia din soluţii. Procentele soluţiilor de tip „concretist" — dreapta limitată — sînt chiar în creştere la clasele III, IV, V (rămînînd totuşi în urma celor de tip „infinit") ceea ce marchează prezenţa orientării realist-concrete a copiilor, orientare ea însăşi în progres şi care la o parte din copii impune soluţia dreptei finite.

2. Faptul cel mai interesant, îl constituie progresul evident, spectaculos al răspunsurilor de tipul „infinit", progres fără oscilaţii şi fără abateri. Contrar celor ce ne-am fi aşteptat, copilul îşi însuşeşte fără dificultăţi ideea de infinit, care-i apare adultului atît de complexă.

Din analiza răspunsurilor rezultă faptul că ideea pe care şi-o formează copilul despre „infinitatea dreptei" este de fapt deosebită de conceptul geometric (euclidian) al dreptei infinite. În structura geometriei euclidiene infinitatea dreptei este considerată ca un dat, ea apare ca un concept abstract şi static. O asemenea viziune a infinitului este necesară acestei geometrii pentru a-şi putea menţine situaţia de domeniu închis (postulatul lui Euclid nu are sens decît în această accepţiune a infinitului).

Sub acest raport viziunea copilului este mai apropiată de o viziune dialectică a infinitului — fără însă bineînţeles să ajungă la ea (în limitele de vîrstă de care ne ocupăm).

Scanned with OKEN Scanner

Infinitul copilului este concret și dinamic. Pentru el dreapta infinită este ceva ce în mod concret se construiește fără oprire, fără obstacol. Acesta este un infinit care se realizează prin devenire, care deci nu omite timpul ca în geometrie, ci îl include neîncetat.

Cum se explică ușurința cu care copilul își însușește ideea de infinit ?

La copil nu apare fenomenul de autodistrugere a conceptului — ca urmare a contradicțiilor interne, structurale care-i sînt proprii — autodistrugere pe care numai o viziune dialectică o poate înlătura (odată conflictul declanșat). Cele două contrarii : limitarea și nelimitarea, actualul și potențialul coexistă pur și simplu în mintea sa.

Infinitul extensiv este mult mai ușor însușit de copil, decît infinitul intensiv (prin diviziunea nelimitată). În cazul infinitului intensiv contradicția între limitat și nelimitat, între actual și potențial nu poate fi menținută în stare inactivă. Această contradicție se manifestă cu toată vigoarea întrucît ea însăși ia o înfățișare concretă (contradicția între caracterul limitat al segmentului și numărul nelimitat de puncte, între inegalitatea a două segmente și egalitatea (infinită) a numărului de puncte din care sînt formate). În timp ce ideea infinitului extensiv se realizează în întregime prin mijloace intuitiv concrete, ideea infinitului intensiv implică o construcție de abstracții.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XIX-lea

LINIA DREAPTĂ

III. DEFINIŢIA LINIEI DREPTE

Dreapta — ca şi punctul — nu se poate defini riguros în afara unui sistem de axiome. De aceea în şcoală, la începutul predării geometriei, nu utilizăm definiţii propriu-zise ci, fie referiri la imagini concrete („un fir de aţă bine întins", „o rază de lumină"), fie referiri la proprietăţi ale dreptei, cum sînt : „drumul cel mai scurt dintre două puncte", „axa de rotaţie" etc. Fiecare dintre aceste formulări prezintă dezavantaje nu numai sub raportul stringenţei dar şi ca instrumente de lucru didactice — dezavantaje care ies la iveală cînd examinăm cunoştinţele elevilor. O soluţie ideală nu există. Problema este de a utiliza diversele formulări într-o ordine potrivită, cu completări şi explicaţii adecvate, în aşa fel încît elevul să-şi formeze o idee corectă despre linia dreaptă şi proprietăţile ei, neîncărcată cu diversele aspecte străine pe care aceste formulări le-ar putea introduce.

Să luăm, de pildă, „Dreapta este drumul cel mai scurt dintre două puncte". Principalul dezavantaj este acela al confuziei cu segmentul de dreaptă. De aceea, în manualul prof. A. Hollinger pentru clasa a VI-a această formulare se referă la segmentul de dreaptă [1].

H. Poincaré propunea să se pornească de la faptul că dreapta este o axă de rotaţie (verificarea riglei prin rotirea ei) [2], indicîndu-se apoi, tot cu ajutorul riglei, calitatea dreptei de a putea aluneca pe ea însăşi.

---

[1] A. Hollinger, *Geometria*. Manual pentru clasa a VI-a, E.S.D.P., 1957, p. 14.

[2] H. Poincaré, *Science et Méthode*, Paris, Flammarion, 1914, p. 144.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția nu ni se pare ideală, dacă e vorba într-adevăr de o definiție de început (se introduc prea multe elemente care pot fi interpretate într-un sens intuitiv-concret de copil).

În cele ce urmează pentru a nu complica expunerea vom utiliza termenul „definiție" pentru diversele formulări de răspuns la întrebarea „Ce este o linie dreaptă?" (chiar dacă acestea nu îndeplinesc condițiile formale ale definițiilor).

Vom considera răspunsuri corecte pe cele care indică în mod corect o proprietate esențială a dreptei, specifică pentru ea, ca de ex. „drumul cel mai scurt dintre două puncte".

Tabela nr. 12

	II	III	IV	V	VI
A. 1. Formulări tautologice	10,0	9,5	7,6	17,5	10,9
B. Formulări descriptive					
2. Seamănă cu un fir întins	1,0	3,8	—	—	7,5
3. După formă, după cum este	1,0	14,3	—	—	—
4. Urma lăsată de creion	1,0	—	—	2,5	—
5. Trasă cu rigla	—	—	2,8	2,5	—
C. 6. Menționarea genului proxim (este o linie)	1,0	2,9	0,9	—	—
D. Formulări geometrice					
7. Drumul cel mai scurt dintre 2 puncte	—	—	28,3	11,3	36,9
8. Linie determinată de 2 puncte	—	—	—	—	0,8
9. Intersecția a 2 suprafețe plane	—	—	—	—	3,4
10. Definiție negativă	—	4,8	3,8	3,7	0,8
11. Nemărginită	—	—	0,9	1,2	—
12. Un punct în mișcare, un șir de puncte	—	—	—	—	3,5
13. Linie care trece prin 2 puncte	—	—	1,9	2,5	3,4
14. Care pornește dintr-un punct	—	—	—	1,2	1,7
15. Linie form. din p. colineare	—	—	—	—	4,2
16. În sens de segment		4,8	3,8	3,8	7,6
	—	6,7	8,5	11,3	12,6
17. Alte definiții implicînd noțiuni geometrice	—	1,9	10,4	17,5	5,0
E. Alte semnificații		—			
18. Riglă	12,0	5,7	—	5,0	—
19. Linie de dialog	—	2,7	—	—	—
F. 20. Alte răspunsuri	2,0	5,9	5,7	8,8	—
21. Nu răspund	72,0	43,7	33,9	22,5	14,3

Însușirea definiției liniei drepte se dovedește a fi pentru copil, cum am arătat, o operație dificilă. Numai la clasa a VI-a ajungem la circa 40% dintre copii care ne dau o definiție geo-

metrică corectă. La celelalte clase obţinem o imensă varietate de răspunsuri dintre care, la clasele IV şi V, definiţiile geometrice corecte au o frecvenţă relativ redusă.

Clasificarea acestor răspunsuri, în vederea analizei statistice, s-a dovedit, de aceea, foarte dificilă, fără posibilitatea de a elimina un coeficient de arbitrar.

Am format următoarele categorii (vezi şi tabelul nr. 12).

A) Răspunsuri tautologice — cele în care termenul drept (dreaptă) intră în definiţia dată de copil.

B) Răspunsuri descriptive, constînd în înlocuirea definiţiei geometrice cu o descriere, cu o analogie, cu o ilustrare.

C) Reducerea definiţiei la menţionarea genului proxim — linia cu sau fără alte indicaţii auxiliare.

D) Definiţiile geometrice. Dintre acestea unele sînt corecte (în sensul că indică o proprietate esenţială), altele sînt incomplete şi în sfîrşit altele sînt greşite.

E) În a cincea grupă am plasat răspunsurile care denotă o substituire de semnificaţii (linie-riglă, linie-semn ortografic).

F) Au mai rămas, după stabilirea acestor categorii şi răspunsuri pe care nici una nu le cuprinde.

Răspunsurile tautologice

Primul fapt care ne atrage atenţia în legătură cu definiţia dreptei este procentul relativ mare de răspunsuri tautologice, pe care-l găsim la toate clasele — mult mai mare decît pentru noţiunea de punct şi — după cum vom vedea — decît pentru celelalte noţiuni cercetate.

Procentul se menţine la un nivel apropiat la clasele II, III şi IV — circa 10% — coborînd puţin la clasa a IV-a (7,6%) dar urcînd mult la clasa a V-a, 17,5%.

Pentru analiza fenomenului vom cita întîi o parte din răspunsurile de acest gen, obţinute la fiecare clasă.

Clasa a II-a

Bob Brat. „O linie dreaptă este tot ce e drept".
Negr. Dor. „O linie dreaptă e dreaptă".
Nic. Aur. „Noi recunoaştem o linie dreaptă că este dreaptă".
Ant. Bog. „O linie dreaptă este o linie trasă cu ceva drept".

Clasa a III-a

Pan. Ghe. „Linia dreaptă este totodată şi un segment de dreaptă".
Buz. M. „Linia dreaptă este tot o parte foarte dreaptă".

Scanned with OKEN Scanner

Cez. Mog. „Este un segment de dreaptă".

Ste. Lum. „Linia care nu are format decît drept se numește dreaptă".

Vas. Geo. „Este dreaptă și lungă".

Com. Tom. „O linie dreaptă este ceva drept care i se spune linie".

Șeh. Adr. „Linia dreaptă este o linie trasă drept".

Bod. Ion. „O linie dreaptă este cînd tragem o linie cu echerul foarte dreaptă".

Clasa a IV-a

Buz. Vas. „Segmentul de dreaptă mărginit numai la un capăt".

Iak. Ann. „Linia dreaptă se numește linia dreaptă trasă cu linia".

Bot. Dan. „O linie dreaptă este un segment de dreaptă".

Sul. Dan. „O linie dreaptă este un segment de dreaptă".

Stn. Cri. „Dreapta care unește două puncte.

Clasa a V-a

Mar. Rad. „Linia dreaptă este drumul drept de la două puncte".

Ghe. Flor. „O linie dreaptă este o linie care merge drept între cele două puncte".

Nic. Aug. „O linie dreaptă este o linie care se trage drept".

Lup. Const. „O linie dreaptă este dreaptă care nu se unește niciodată".

Par. Dan. „O linie dreaptă este ceva pe care mergem mai drept".

Pîr. Ecat. „O linie dreaptă este o linie trasă drept".

Chi. Sor. „O linie dreaptă este un segment drept orizontal".

Nic. Son. „O linie dreaptă este un segment de dreaptă".

Ilie Ghe. „Linia dreaptă ne arată o porțiune de pămînt dreaptă".

Clasa a VI-a

Sur. Gh. „O linie dreaptă este o linie care are forma unui fir de ață drept".

Isp. Grig. „Linia dreaptă este figura geometrică care este formată din semidrepte".

Pan. Mih. „O linie dreaptă este linia dreaptă dintre două puncte".

Ber. Sul. „Linia dreaptă este segmentul de dreaptă care unește două puncte".

Ghe. Mar. „O linie dreaptă este un segment de dreaptă".

Barb. Ana. „Linia dreaptă este segmentul cel mai drept dintre două puncte".

Ghe. Oti. „O linie dreaptă este un segment în linie dreaptă".

Const. Mar. „O linie dreaptă este o secantă în linie dreaptă".

Drag. Mar. „Linia dreaptă este linia care trece prin toate punctele în linie dreaptă".

Scanned with OKEN Scanner

La clasa a II-a tautologia este redusă la forma cea mai concentrată : „O linie dreaptă e dreaptă". „Recunoaștem o linie dreaptă fiindcă e dreaptă".

La clasa a III-a intervin unele elemente în plus. Doi dintre copii introduc acțiunea de construire a dreptei. Definiția capătă un caracter genetic. Linia dreaptă este produsul unei anumite acțiuni — pe care însă copilul n-o poate defini decît tot prin apelul la noțiunea de drept.

Apar primele ecouri ale noțiunilor geometrice întîlnite — în special noțiunea de segment. Un copil vorbește de format drept. Un altul simte nevoia să accentueze rectitudinea : foarte dreaptă.

La clasa a IV-a ecoul cunoștințelor geometrice dobîndite devine mai insistent. Apare mai frecvent noțiunea de segment. Apare referirea la două puncte.

La clasa a V-a influența cunoștințelor geometrice este mai puțin manifestă. Ceea ce se accentuează este ideea acțiunii de construcție a dreptei. O bună parte dintre copiii care recurg la tautologie definesc dreapta prin raportare la acțiunea de a construi (trasă drept, mergem drept).

La clasa a VI-a predomină confuzia dintre linia dreaptă și segmentul de dreaptă — ca și la clasa a IV-a — dar într-o proporție mai mare.

Raporturile dintre cele două noțiuni sînt, la copiii respectivi, răsturnate. În loc să definească segmentul prin raportare la dreaptă, ei inversează relația definind întregul — dreapta — prin raportare la parte — segmentul.

Procentul relativ mare de tautologii constituie, fără îndoială, un rezultat al dificultăților deosebite pe care le întîmpină copiii în definirea dreptei.

Pe de altă parte însă dificultățile întîmpinate nu pot, singure, explica procentul mare de tautologii.

Care este sensul psihologic al tautologiilor ? În manualele de logică, tautologiei i se rezervă un loc foarte mic. Ea este o variantă a cercului vicios în definiție. Ca atare este considerată a nu exprima o cunoștință reală despre obiect ci o simplă repetiție de termeni. Deci în fond, o operație logică nulă.

Se reduce însă tautologia la această simplă repetare — directă sau indirectă — a unor termeni, în care nici un sens real, nici un proces real de gîndire, nu este angajat ?

Scanned with OKEN Scanner

Cînd copilul din clasa a II-a afirmă : „Recunoaștem o linie dreaptă, că este dreaptă“ această propoziție, nulă formal, este cu adevărat nulă ca operație mintală ?

Trebuie să admitem că lucrurile sînt mai complicate.

Primul fapt pe care-l exprimă este sentimentul evidenței și implicit protestul împotriva unei întrebări nejustificate.

Dar nu numai atît. Avem aci o simplă repetiție de termeni identici ? În realitate, propoziția „O linie dreaptă e dreaptă“ exprimă, pentru copil, relația dintre semnificația specială, geometrică a unui termen și semnificația sa generală curentă : ceea ce profesorul numește „linie dreaptă“ (alături de „linie frîntă, linie curbă“) nu este altceva decît ceea ce știm cu toții că este linia dreaptă.

Această relație este foarte bine pusă în evidență de copilul Buz. M. care afirmă „Linia dreaptă este tot o parte foarte dreaptă“. Ce sens are acest „foarte“ ? Formal este lipsit de sens pentru că formal dreaptă = dreaptă iar acest *foarte* îndeplinește o funcțiune nulă. De fapt însă, tocmai prezența acestui „foarte“, intercalat de copil, dovedește că, pentru el, termenul dreaptă din prima parte a propoziției, nu este identic, ca semnificație, cu același termen din partea a doua. Este nevoie de un *foarte* pentru a trece de la primul la al doilea. Or acest „foarte“ marchează tocmai trecerea de la semnificația curentă a termenului la semnificația specială, geometrică : linia dreaptă geometrică este ceea ce știm cu toții că este linia dreaptă — dar „foarte“ — cu o deosebită exigență față de rectitudine.

În al treilea rînd, propoziția exprimă relația dintre un obiect și însușirea sa : dreaptă, în prima parte a propoziției, face corp cu linie — linie dreaptă — și, împreună, exprimă denumirea unui obiect. În a doua parte a propoziției „dreaptă“ se desprinde și exprimă o proprietate, luată în generalitatea ei. Propoziția tautologică exprimă deci aci relația dintre un obiect anumit și o proprietate generală.

În al patrulea rînd : forma tautologică pe care o ia această propoziție arată că, pentru copil, această proprietate este unica proprietate a obiectului, deci suficientă pentru determinarea lui. În același timp proprietatea este pentru copil, nedecompozabilă, ireductibilă la altele mai simple, mai generale.

Forma tautologică a propoziției exprimă deci, în același timp și *unicitatea* și *ireductibilitatea* proprietății în cauză (evident, pentru copil, în momentul enunțării propoziției). Toc-

mai de aci, sentimentul de evidenţă pe care el îl încearcă atunci cînd i se cere să determine — să definească — linia dreaptă.

Aşadar, pe de o parte simplitatea, ireductibilitatea proprietăţii fac imposibilă pentru copil definirea propriu-zisă a ei, pe de alta generalitatea uzajului termenului respectiv i se pare a permite înlocuirea definiţiei cu o raportare la acest sens general. Termenul dreaptă este supus aci unei duble dedublări : 1) dreaptă-obiect, dreaptă-proprietate ; 2) dreaptă-semnificaţie geometrică, dreaptă-semnificaţie generală. Această dublă dedublare nu este o creaţie a copilului. Ea există dinainte în limbă. Copilul nu face decît să uzeze de ea.

În formulările copiilor apar şi nuanţe care merită să ne oprim asupra lor.

Pentru Ste. Lum. din clasa a III-a dreapta se numeşte linia care „nu are format decît drept". Aci dedublarea este mai explicită. În a doua parte a propoziţiei copilul vorbeşte de format drept, adică de formă dreaptă. Limitativul „decît" arată cu precizie, pentru el, unicitatea însuşirii. Pe de altă parte, plasarea lui „decît" între substantiv şi adjectiv sugerează în afară de ideea unicităţii şi pe cea a constanţei : dreapta este figura cea mai monotonă căreia nu i se întîmplă nimic pe parcurs (nu se frînge, nu se curbează).

O notă pe care, mai ales, copiii mai mari, simt nevoia s-o introducă, este cea legată de acţiunea subiectului. Proprietatea nu este legată direct de obiect ci prin intermediul acţiunii. Există variante : a) Rectitudinea este o caracteristică a acţiunii şi aceasta o transmite obiectului : Linia dreaptă este o linie pe care o tragem drept (vezi răspunsurile subiecţilor Ant. Bog., clasa a II-a, Sef. Adr. şi Bod. Ion, clasa a III-a, Jak Ann, clasa a IV-a, Nic. Aug., Pîr. Ecat., clasa a V-a). b) Rectitudinea este o caracterisitică a obiectului dar este recunoscută prin intermediul acţiunii : o linie dreaptă este ceva care merge drept sau pe care mergem drept (Ghe Flor. Par. Dan., clasa a V-a).

Acolo unde formularea nu este influenţată de imixtiunea noţiunilor geometrice neasimilate, răspunsurile tautologice ale copiilor ne atrag atenţia asupra unui fapt fundamental : sensul originar cinetic al conceptului. Rectitudinea este o proprietate obiectivă pe care acţiunea o izolează şi o dezvăluie gîndirii copilului ducînd la constituirea noţiunii respective : acţiunea de a merge înainte, acţiunea de trasare a dreptei (grafic), acţiunea de reflectare perceptivă prin deplasarea privirii (cu

componentele retiniene și kinestezice respective), acțiunea de „vizare" a unui șir de puncte colineare.

Așadar, fără a constitui definiții, răspunsurile tautologice ale copiilor la această problemă nu pot fi considerate nici simple repetări de termeni, cu valoare nulă. Ele exprimă un act mental real.

Spre deosebire de definiții însă, unde, printr-un act de analiză ajungem la dezvăluirea și indicarea notelor esențiale, în cazul răspunsurilor tautologice la care ne referim, copilul este parcă hipnotizat de concret, de imediat, de prezența unei anumite proprietăți obiective considerate nedecompozabilă și ireductibilă. *Tautologia, atunci cînd exprimă ceva, exprimă tocmai acest act mental de subordonare a conceptului față de reflectarea nemijlocită, afirmarea ireductibilității faptului concret — deci o inversiune a raporturilor existente în definiție.*

Noi am trecut la rubrica „Răspunsuri tautologice" pe acelea care includ termenul însuși de definit : drept-dreaptă. De fapt însă aria acestora este mult mai largă în cazul noțiunii pe care o discutăm.

La clasa a II-a 7% dintre copii — afară de cei 10% la care ne-am referit — recurg la ilustrări ale noțiunii prin obiecte care posedă proprietatea respectivă.

Diac. Petr. „O linie dreaptă este o linie de tren".
Ric. El. „O linie dreaptă este un bețișor".
Pat. Dum. „O linie dreaptă este un perete".

La clasa a III-a apare relativ frecvent un alt tip de răspuns care în esență exprima aceeași orientare ca în răspunsurile tautologice manifeste (14,3%).

Gla. Vas. „Noi cunoaștem linia dreaptă după forma pe care o are".
Drag. Mircea. „O linie dreaptă este cunoscută după felul cum este trasă".
Sanda Mar. „Eu o cunosc după format".
Olt. Dan. „După felul cum este făcută".
Sto. El. „O linie dreaptă este astfel".

La clasa a IV-a și la clasa a V-a la astfel de răspunsuri se adaugă și indicația : trasă cu rigla, cu linia.

Bre. Max (IV). „Linia trasă în lungul riglei se numește linie dreaptă".
Const. Paul (IV) „O linie dreaptă este linia care se trage cu rigla".
Paj. And. (cl. V) „O linie dreaptă: linia trasă cu o riglă".
Mar. Mih. (cl. V) „O linie dreaptă este cea care se trage cu echerul sau cu linia".

Scanned with OKEN Scanner

La clasa a VI-a tautologia ia o formă mai subtilă, mai geometrică: Linia dreaptă este linia formată din puncte colineare.

God. Did. „Linia dreaptă sînt mai multe puncte unite și colineare".
Gav. Cern. „Linia care are toate punctele colineare este linia dreaptă".
„Mai multe puncte unite între ele cu condiția să fie colineare".
Log. Cor. „O linie dreaptă este traiectoria unui punct, în rectilinie".

Toate aceste răspunsuri au un caracter tautologic, chiar dacă termenul drept-dreaptă nu apare : explicația presupune cunoscută noțiunea de definit. „Linia dreaptă este (ca) un bețișor afirmă Ric. El. din clasa a III-a. Dacă ilustrarea este corectă, aceasta înseamnă că bețișorul e întotdeauna drept — pentru a-l recunoaște trebuie să poți recunoaște proprietatea de a fi drept.

„Noi cunoaștem linia dreaptă după forma pe care o are" — adică după faptul că e dreaptă. „O linie dreaptă este o linie care se trage cu rigla". Iar rigla implică, se înțelege, proprietatea de a fi dreaptă (altfel n-ar putea servi la operația respectivă).

„Linia dreaptă este o linie formată din puncte colineare". Aci tautologia este și mai directă : „colinear" și „în linie dreaptă" sînt termeni sinonimi.

Însușirea celor mai multe din aceste răspunsuri ale copiilor (afară de ultima frază, unde avem de-a face cu o substituție de sinonime) este aceea că este pus în evidență cu și mai multă pregnanță fenomenul despre care am vorbit mai sus : răsturnarea raporturilor exprimate în definiția corectă, subordonarea conceptului față de faptul concret, față de imaginea direct reflectată.

Dar oare nu se întîmplă același lucru cu pseudo-definițiile negative care apar începînd din clasa a III-a ?

Dan Ilie (III) „O linie dreaptă este o linie necurbată".
Lar. Tud. (III) „Nu e strîmbă".
Pien. Aur. (III) „Pentru că nu e strîmbă".
Ion C. (III) „Linia dreaptă e ceva drept care nu e strîmb".
Cup. Aur. (IV) „O linie dreaptă este linia care nu e nici curbă nici frîntă".
Dum. Edn. (IV). „Linia dreaptă este linia care nu este nici strîmbă nici ovală".
Ghe. Flor. (V) „O linie dreaptă este o linie care nu este nici frîntă nici curbă".

Scanned with OKEN Scanner

Aceste răspunsuri au și ele o structură tautologică.

Actul mintal care se adaugă este cel al unei delimitări de specii în cadrul genului comun — linia. Dar la rîndul ei, „linia strîmbă" este o linie „care nu e dreaptă", linia frîntă e formată din segmente (de dreaptă) care nu sînt așezate în linie dreaptă, linia curbă este cea care nu conține nici un fel de segmente de dreaptă.

Cercul vicios chiar dacă nu e evident există totuși în aceste răspunsuri.

Este deci cazul să ne întrebăm : de ce această abundență și varietate de răspunsuri tautologice sau, în genere, implicînd un cerc vicios — cum nu întîlnim în legătură cu celelalte noțiuni geometrice cercetate ?

Explicația constă, așa cum am arătat, în faptul că rectitudinea îi apare copilului ca o proprietate elementară, ireductibilă care nu trebuie și nici nu poate fi delimitată printr-o indicație mai simplă. Numai mișcarea sau numai percepția pot prinde specificul proprietății (cum e, de pildă, cazul culorilor, atunci cînd lipsa cunoștințelor științifice nu permite referirea la radiații).

Or, în ultimă instanță, copilul are dreptate. După cum a dovedit-o utilizarea metodei axiomatice în geometrie, sistemului de axiome îi scapă determinarea calitativă, specifică a entităților geometrice fundamentale. Sistemul de axiome permite un anumit „joc" al modelelor intuitive corespunzătoare. Dreapta (ca imagine determinată) este, în ultimă instanță, ceea ce știm cu toții că este.

Dar aceasta înseamnă că și geometrul are dreptate. Dincolo de hotarele percepției și ale acțiunii nemijlocite — la scara cosmică —, trebuie să apelăm din nou la axiome și să ne mulțumim cu ele. Extrapolarea nu se poate face automat.

Răspunsuri incomplete

O altă categorie o formează răspunsurile care, fără a fi propriu-zis greșite, sînt incomplete : ele indică o proprietate generală a liniei sau a unor categorii de linii. Aceste proprietăți sînt adevărate și pentru dreaptă, dar nefiind specifice n-o definesc. Asemenea răspunsuri sînt ecoul cunoștințelor geometrice dobîndite de copii.

Scanned with OKEN Scanner

De multe ori ele sînt rezultatul însușirii incomplete a definiției : „Linia dreaptă este drumul cel mai scurt dintre două puncte".

Unii copii reţin din definiţie „două puncte" sau „drumul dintre două puncte" uitînd faptul esenţial că e vorba de „drumul cel mai scurt". Asemenea răspunsuri, cu diferite variante apar începînd de la clasa a IV-a.

Col. Val. (IV) „Linia dreaptă este linia pornită din două puncte".

Mod. Teod. (IV) „Linia dreaptă este linia dintre 2 puncte egale".

Marin Chir. (V) „O linie dreaptă este o linie dusă de la punctul A la B".

Ian. Or. (VI) „Linia care unește două puncte".

Flor. Mar. (VI) „O linie dreaptă este linia care trece prin două puncte".

Alţii se referă numai la un singur punct.

De ex.: Str. Alex. (VI) „Linia dreaptă este acea linie care pornește dintr-un punct".

Unii elevi din clasa a VI-a se referă la mișcarea punctului sau la un șir de puncte fără a specifica nimic în legătură cu dreapta.

Virg Ion. (VI) „O linie dreaptă este atunci cînd sînt mai multe puncte".

Vas. Const. (VI) „O linie dreaptă este mișcarea punctului în plan".

Dar. Ste. (VI) „O linie dreaptă este dîra lăsată de un punct în mișcare la egală depărtare".

Cri. Ghe. (VI). „O linie dreaptă este un șir de puncte".

Răspunsuri greşite

Există și un mare număr de răspunsuri greșite. Foarte multe răspunsuri ale copiilor, începînd de la clasa a III-a, sub influența definiției „linia dreaptă este drumul cel mai scurt dintre două puncte", consideră aceste puncte ca limite și ajung la noțiunea de segment.

Unii nu folosesc termenul „segment", dar vorbesc de „linie" (sau linie dreaptă) cuprinsă între două puncte, alţii formulează explicit „Linia dreaptă este un segment" (sau „un segment de dreaptă").

Deoarece o parte dintre acești copii adaugă și nota „dreaptă" („linia este un segment drept" sau „de dreaptă") cifrele din dreptul rubricii corespunzătoare sînt incomplete, răspunsurile cuprinzînd această specificare fiind înglobate la „Răspunsuri tautologice".

Scanned with OKEN Scanner

De aceea am trecut în aceeași rubrică, în chenar, și procentajele complete de răspunsuri de tipul „dreapta este un segment“ (cu sau fără specificarea „drept“, dreaptă“). Au fost înglobate aci și răspunsurile în care cuvîntul segment nu se folosește explicit — dar sensul este de segment (de ex. : „dreapta este linia limitată de două puncte“).

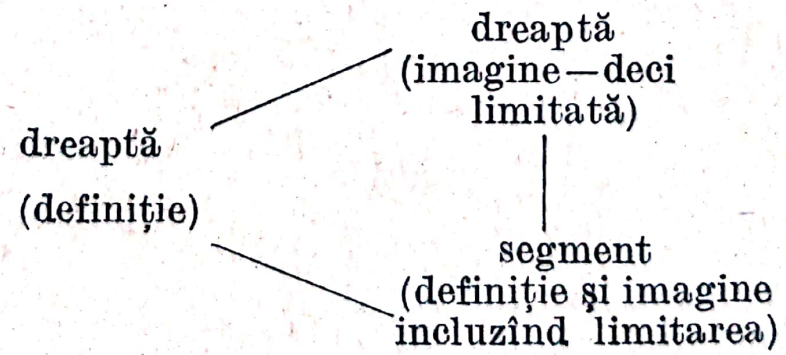
Se constată creșterea continuă a procentelor de la clasa a III-a la clasa a VI-a. La clasa a VI-a procentul ajunge relativ ridicat : 12,6%.

Procentele relativ ridicate ale acestor răspunsuri eronate și creșterea lor continuă, se explică printr-o triplă confuzie care se produce între cunoștințele geometrice ale copilului insuficient asimilate.

Prima confuzie se produce între definiția dreptei care include cele două puncte și imaginea limitată a dreptei desenate.

A doua confuzie se produce între aceeași definiție însușită fragmentar, cu omiterea esențialului (adică a notei „cel mai scurt“) și definiția segmentului „porțiune de dreaptă limitată la ambele capete“. De fapt dacă ar fi să luăm definiția respectivă ad litteram, am fi într-adevăr îndreptățiți să considerăm că nu e vorba decît de porțiunea dintre cele două puncte.

A treia confuzie — care o întărește pe cea de mai sus — se produce între imaginea dreptei desenate — și ca atare limitată prin forța lucrurilor — și segmentul propriu-zis în care limitarea aparține efectiv noțiunii. Copilul trece de la noțiunea de dreaptă — la dreapta desenată (deci limitată în imagine), de la aceasta la segment (limitat și prin definiție de cele două puncte) și apoi din nou la noțiunea de dreaptă a cărei definiție include cele două puncte.



Se creează astfel un circuit închis avînd ca efect o autoîntărire a sistemului de confuzii și în care relațiile dintre imagine și concept sînt răsturnate, conceptul fiind de fapt stăpînit

și deformat de imagine. Efectul este procentajul mare de răspunsuri incomplete (dreapta este drumul dintre două puncte) și greșite (dreapta este un segment, dreapta este linia limitată de două puncte) pe care l-am constatat.

Numai o muncă pedagogică perseverentă și atentă poate determina spargerea acestui circuit deformant, descîlcirea, delimitarea sensurilor și restabilirea semnificațiilor corecte.

Răspunsuri corecte

Răspunsurile considerate corecte sînt de două tipuri :

Avem pe de o parte răspunsurile de tipul „Linia dreaptă este linia care seamănă cu un fir de ață întins". Este o definiție de fapt negeometrică, întrucît include acțiunea cu un obiect material — firul de ață — și, din această cauză, un factor de impreciziune : cît trebuie întins ? Partea pozitivă a acestei, să zicem, cvasi-definiții este faptul că ea redă într-o formă materializată o notă esențială a conceptului.

În definitiv, dacă ar fi vorba de o simplă comparație, am putea spune că linia dreaptă este cea care seamănă cu un baston. Am avea, în acest caz, o tautologie — așa cum am arătat mai sus — întrucît bastonul este drept prin construcție, făcut să fie conform cu o linie dreaptă. Cînd însă tragem de capetele aței, executăm o acțiune care nu include în definiția ei nota *drept*. Rezultatul obținut este un fir drept, o linie dreaptă și aceasta tocmai în virtutea definiției liniei drepte : drumul cel mai scurt. Trăgînd cît putem de cele două capete ale aței noi acoperim un interval cu o lungime de ață *minimă*.

Această cvasi-definiție este așadar foarte utilă din punct de vedere didactic întrucît, cum spuneam, materializează o notă esențială a conceptului. Dar, se înțelege, la această cvasi-definiție intuitivă nu se poate rămîne deoarece nu e o definiție geometrică propriu-zisă. Ea include un grad de impreciziune provenit din natura materială a faptului la care am apelat.

A doua categorie de răspunsuri considerate corecte se referă, în principal, la definiția : „dreapta este drumul cel mai scurt dintre două puncte". Asemenea răspunsuri apar la 28,3% dintre elevii din clasa a IV-a. Apoi, procentul scade foarte mult la clasa a V-a (11,3%) pentru a crește din nou la clasa a VI-a pînă la 36,9%.

La clasa a VI-a trebuie să mai adăugăm 4 răspunsuri (3,4%) de forma „Linia dreaptă este intersecția a două plane".

Scanned with OKEN Scanner

Un singur copil răspunde „Linia dreaptă este linia determinată de 2 puncte".

Așadar numai ceva mai mult de un sfert dintre copiii din clasa a IV-a au reținut o definiție relativ corectă. Toți ceilalți, aproape 72% dintre copii, dau răspunsuri greșite sau incomplete.

La clasa a VI-a procentajul se îmbunătățește. Totuși numai 41,1% dintre copii ne dau definiții geometrice ale dreptei. Dacă-i adăugăm și pe cei care se referă la „firul de ață întins" obținem în total 48,6%. Așadar nici jumătate din copiii clasei a VI-a cercetați de noi nu au reținut o definiție corectă (geometrică sau intuitivă) a liniei drepte. Peste 50% nu răspund sau dau răspunsuri incomplete și greșite pentru această noțiune geometrică fundamentală.

La clasa a V-a curba coboară foarte mult — ceea ce concordă cu toate rezultatele obținute de noi pînă în prezent. Aproape 90% dintre copiii clasei a V-a nu răspund sau dau răspunsuri uneori incomplete, alteori greșite. Aceasta înseamnă că în clasa a IV-a dintre cei 28,3% copii care au dat definiția corectă nu toți o asimilează temeinic.

Care este explicația acestei dificultăți deosebite întîmpinate de copii în asimilarea conceptului de linie dreaptă?

Din datele prezentate mai sus rezultă existența mai multor cauze.

În primul rînd e vorba de *o mare discrepanță între evidența intuitivă a fenomenului rectitudinii și dificultatea definirii sale strict geometrice, abstracte.* Caracterul deosebit de pregnant, de direct al rectitudinii, pentru acțiune, pentru percepție — la vîrsta la care situăm discuția : 9—12 ani — determină un adevărat fenomen de inducție negativă care situează proprietățile abstracte în afara focarului atenției și deci al înțelegerii. Aceste proprietăți apar ca fiind superflue, exterioare procesului mintal, deplin satisfăcut de cunoașterea nemijlocită.

Pe de altă parte, formularea „drumul cel mai scurt" prezintă, pentru utilizarea ca definiție provizorie, dificultăți deosebite. Structura ei este ambiguă — chiar dacă lăsăm la o parte prezența celor 2 puncte care sugerează limitarea. Dacă izbutește să capteze atenția, ea invită, de asemenea, la o considerație intuitivă cu eliminarea implicațiilor abstracte, geometrice propriu-zise : drumul cel mai scurt, adică direct, fără ocoluri, adică drept. „Cel mai scurt" nu mai este de fapt o altă proprietate în raport cu care rectitudinea poate fi definită, ci printr-un efect de dominantă, ea este absorbită de aceasta din urmă și

acoperită de evidența ei intuitivă. Dacă totuși copilul face efortul de a reflecta asupra acestei proprietăți, de a încerca să sesiseze esența ei, ce găsește ? Ce înseamnă „cel mai scurt“ ? Care poate fi parcurs în minimum de timp ? Cu minimum de efort ? Care dă rezultatele cele mai mici la măsurare ? Cînd treci un deal, drumul cel mai scurt (ca timp), poate să nu coincidă cu drumul cel mai scurt — ca distanță —, iar ambele, precis, nu coincid cu ceea ce intuitiv știm că este o linie dreaptă. Și așa mai departe.

La acestea se adaugă și dificultățile provenite din prezența celor „două puncte“ ceea ce duce, cum am văzut la confuzia cu segmentul, cu reprezentarea intuitivă a dreptei însăși printr-o porțiune limitată a ei. În sfîrșit, se ivește și o contradicție flagrantă între proprietatea dreptei de a fi nelimitată, infinită și prezența celor două puncte între care dreapta trebuie să fie drumul cel mai scurt. Pentru a ști că toată linia e dreaptă ar trebui să știm că toată formează drumul cel mai scurt între extremitățile ei. Dar dreapta fiind infinită acest lucru este absurd.

Procedeul intuitiv al „firului întins“ este foarte bun dacă ținem neapărat să păstrăm definiția aceasta. Cu condiția însă să fie valorificat cum trebuie. De fapt însă, de obicei, ne mulțumim să comparăm dreapta cu un fir întins așa cum am compara-o cu un pai, de pildă, și să declarăm : o linie dreaptă este cea care seamănă cu un fir întins. Esențialul — materializarea proprietății abstracte — scapă în acest caz și ceea ce rămîne este o simplă comparație exterioară. Trebuie atras atenția asupra unor drumuri de diferite lungimi posibile între cele două puncte, pentru a arăta apoi că atunci cînd întindem firul bine — așa încît drumul devine cel mai scurt (cea mai puțină ață) el ia întotdeauna forma dreaptă.

De fapt din toate aceste considerații rezultă că formularea „drumul cel mai scurt dintre două puncte“ nu este adecvată ca definiție și cu atît mai puțin ca definiție de început.

Calea cea mai bună rămîne aceea de a se porni de la imaginea intuitivă a dreptei, de la raza de lumină, de la dreapta desenată cu rigla, urmînd ca apoi să se detașeze o serie de proprietăți geometrice. Diversele răspunsuri incomplete sau greșite date de copii sugerează și o serie de precauții pentru a se evita diverse confuzii (între linie și dreaptă, între dreaptă și segment, între porțiunea de dreaptă prin care se reprezintă dreapta și dreapta însăși etc.).

Scanned with OKEN Scanner

Concluzii parțiale

1. Marea varietate de răspunsuri obținute denotă, în primul rînd, dificultățile copiilor în a găsi o formulare adecvată pentru definirea liniei drepte, dificultăți care, la rîndul lor, exprimă dificultățile întîmpinate de procesul didactic însuși.

În mare, la clasele II, III, predomină formulările intuitiv-descriptive (inclusiv cele tautologice), la clasa a IV-a predomină formulările geometrice, la clasa a V-a reapar formulările intuitiv descriptive (în special cele tautologice), dar în aceeași măsură și formulări geometrice diverse (incomplete, neadecvate). La clasa a VI-a procentul cel mai mare îl deține formularea „drumul cel mai scurt între două puncte".

2. Analiza răspunsurilor scoate în evidență un mare număr de răspunsuri greșite exprimînd o triplă confuzie între formularea „drumul cel mai scurt dintre două puncte", imaginea dreptei desenate (imagine care nu poate reda decît o porțiune de dreaptă) și segmentul de dreaptă (definiție și imagine). Pentru evitarea confuziei este necesar să se insiste asupra distincțiilor dintre semnificațiile acestor trei aspecte.

Dificultățile obținerii unei definiții simple, deplin adecvate a dreptei, utilizabilă în procesul didactic, se repercutează asupra constituirii unui concept figural stabil. Elementele intuitive apar adeseori nereglate deplin de structura conceptuală. Lucrurile se petrec uneori chiar invers : structura conceptuală este transfigurată sau dominată de un conținut intuitiv necontrolat : de aci apariția unui procent relativ ridicat de răspunsuri tautologice (care exprimă, mai ales primatul intuitivului), confuziile dintre dreaptă și segment, utilizarea „punctelor" în diverse formulări neadecvate, incomplete, cu omiterea esențialului etc. Formarea acestui concept figural cere o deosebită atenție din partea metodiștilor și profesorilor.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XX-lea

PROBLEMA PERPENDICULAREI ("DRUMUL CEL MAI SCURT DE LA UN PUNCT LA O DREAPTĂ")

Această probă are calitatea de a pune în evidenţă procesul constituirii unui concept figural începînd cu o conduită practică şi terminînd cu un concept geometric.

În legătură cu problema naturii punctului sau a dreptei soluţia corectă depinde direct de cunoştinţele geometrice predate în şcoală. Ideea punctului fără dimensiuni, ideea dreptei cu o singură dimensiune, nu pot decurge nemijlocit din experienţa practică a copilului sau din cunoştinţele lui generale. Noi am avut astfel ocazia să urmărim evoluţia fenomenelor conflictuale generate de contradicţia dintre cele două modalităţi de interpretare : interpretarea realist-concretă tinzînd să substanţializeze figurile geometrice şi interpretarea conceptualo-geometrică tinzînd să le „purifice" pînă la constituirea lor în abstracţiuni propriu-zise.

Problema distanţei de la punct la o dreaptă situează discuţia în alt plan. Această întrebare nu mai declanşează un conflict între interpretarea figurii ca obiect concret şi interpretarea geometrică. Ambele interpretări duc la o aceeaşi soluţie. Mai mult; problema a fost, în mod practic, de nenumărate ori întîlnită de copil în conduita sa.

Dar în proba noastră, problema este transpusă din cadrul condiţiilor concrete, în cel al unor condiţii speciale grafico-geometrice iar rezultatele sînt confruntate.

După cum se va vedea, transferul în noile condiţii nu se face nemijlocit. Copilul se comportă ca şi cînd ar avea de rezolvat o problemă nouă. Soluţia, de astă dată, nu mai exprimă, cum spuneam, în mod direct, o conduită practică, fixată sub formă

Scanned with OKEN Scanner

de deprindere, ci rezultatul unei investigaţii logico-perceptive, care presupune mobilitatea şi reversibilitatea componentelor structurii intuitive. Planul investigaţiei şi al rezolvării este cel intuitiv, deşi copilul apelează la procedee logice.

În sfîrşit, la un moment dat apare conceptul geometric de perpendiculară care situează — sau poate situa — discuţia într-un plan geometric-deductiv.

Conceptul figural, propriu-zis, nu există decît din acest moment — din momentul în care soluţia decurge dintr-un concept. Dar tot procesul anterior trebuie luat în consideraţie, pentru a înţelege modul în care cele trei niveluri — cel al conduitei practice, cel al reprezentărilor şi cel conceptual participă la constituirea acestui concept figural.

A. *Dreapta paralelă cu baza foii de hîrtie*

Într-o serie de experimente individuale, dreapta era trasată paralel cu baza foii de hîrtie şi punctul situat deasupra, la o distanţă de circa 3 cm. Copilului i se cerea să compare distanţa dintre punct şi dreaptă, cu o altă distanţă apreciabil mai mare, dintre 2 puncte. După ce răspundea, i se cerea să arate „cum a mers de la punct la dreaptă, pentru a stabili distanţa".

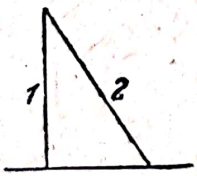


Fig. 24

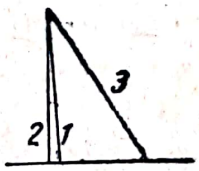


Fig. 25

Fig. 26

Experimentele au fost făcute cu copii între 6 şi 9 ani. Toţi subiecţii cu care s-a lucrat au dus perpendiculara de la punct la dreaptă. Iată cîteva exemple.

Pan. Ira. (clasa I, 8 ani), (fig. 24).

(Construieşte perpendiculara).

Exp. (Arată oblica). Aşa ar fi fost bine să mergi ?

El. Nu, pentru că aşa (oblic) e mai mult decît aşa (perpendicular).

Cor. Min. (8, 6, clasa a II-a). (fig. 25). (Copilul face segmentul uşor înclinat (1)).

Exp. De ce ai tras așa? Nu era mai bine așa? (segmentul 2 perpendicular).

El. Am făcut eu linia strîmbă.

Exp. Dar așa ar fi bine (exp. trage linia oblică 3)? Așa nu puteai să mergi ca să vezi distanța?

El. Nu pentru că linia este mai mare și ocupă mai mult loc.

Tud. Mih. (9, 10, clasa a III-a). (duce perpendiculara, fig. 26).

Exp. De ce ai mers așa?

El. Nu știu.

Exp. Așa ar fi fost bine să mergi? (trasează oblica 2)

El. Nu.

Exp. De ce?

El. Că era strîmbă.

Exp. (trasează oblica 3). Dar așa?

El. Nu.

Exp. De ce?

El. Nu știu. N-am mai fost pe aici și nu știu cum se face.

(Discuția pare să-l fi tulburat. Nu mai are încredere nici în ce-a făcut înainte).

Așadar aceste prime experimente individuale ne-au arătat că toți copiii — între limitele de vîrstă considerate — rezolvă în mod spontan problema distanței dintre punct și dreaptă, prin utilizarea perpendicularei, dacă dreapta este trasă paralel cu baza foii de hîrtie.

Dreapta înclinată față de baza foii

Experimente colective

În cadrul experimentelor colective din perioada mai 1959 problema pusă a fost, într-o anumită măsură, modificat. Pe tablă se trasa un segment înclinat față de baza foii, cu un unghi de circa 50° iar la stînga liniei, la o distanță de cîțiva centimetri, se plasa punctul. Copiilor li se dădea instrucțiunea de la pagina 190, întrebarea H.

Rezultatele obținute sînt prezentate în procentaje în tabelele 13, 14 și 15.

În tabelul 13 avem o prezentare globală a răspunsurilor la problema: arătați în desen care este drumul cel mai scurt dintre punct și linia dreaptă.

Scanned with OKEN Scanner

Primele trei rînduri (Oblice. Perpendiculara şi oblice. Perpendiculara) se referă la construcţii însoţite sau nu de diferite explicaţii verbale.

Tabela nr. 13

	II	III	IV	V	VI
Construcţii grafice (însoţite sau nu de explicaţii verbale)					
1. Oblice	36,0	55,1	53,7	40,0	31,0
2. Perpendiculară şi oblice	10,0	12,5	12,3	10,0	3,4
3. Perpendiculară	6,0	11,5	19,9	32,5	55,4
Numai răspunsuri verbale					
4. Perpendiculara	—	—	—	—	1,7
5. Alte răspunsuri	3,0	1,9	4,6	3,8	5,1
6. Nu răspund	45,0	19,0	9,5	13,7	3,4

Ultimele două rînduri se referă la răspunsuri date numai sub formă verbală (numărul lor e relativ mic). La „Nu răspund“ au fost trecuţi cei care nu au dat nici un fel de răspuns.

Tabela nr. 14

	II			III			IV			V			VI		
Răspunsuri verbale ↑ / construcţii →	O	P	—	O	P	—	O	P	—	O	P	—	O	P	—
1. Trebuie să fug Trebuie să merg mai repede	—	—	—	4,8	—	0,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2. La mijlocul liniei	—	1,0	—	—	1,9	—	1,9	—	—	1,3	—		—	0,8	0,8
3. Linie dreaptă Drum drept	—	—	1,0	3,8	0,9	0,9	8,5	5,6	3,8	—	—	2,5	3,4	4,2	1,7
4. Mediatoarea	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,7	5,9	—
5. Perpendiculara	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,5	34,4	1,7
6. Alte răspunsuri	—	—	2,0	—	—	—	0,9	—	0,9	1,3	1,3	1,3	—	—	2,5

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește rîndul 2 (Perpendiculare și oblice), acesta cuprinde procentele răspunsurilor în care copiii au trasat, în afară de perpendiculară, și una sau mai multe oblice.

Tabelul 14 prezintă, în procente, răspunsurile verbale ale copiilor fie că au fost însoțite sau nu de construcții grafice. Numărul lor este, în fiecare clasă, mic, deoarece asemenea indicații nu s-au cerut. Le-am reținut totuși pentru interesul pe care-l prezintă.

Pentru mai multă precizie, am prezentat procentele acestor răspunsuri prin confruntare cu construcțiile pe care le însoțeau. De aceea la fiecare clasă avem trei coloane: 1. O — oblice (aci am considerat atît construcțiile în care apăreau numai oblice cît și cele în care apăreau perpendiculara și oblice). 2. P — perpendiculara și 3. fără nici o construcție. În felul acesta răspunsurile verbale, în procente (prin raportare la numărul elevilor clasei) apar distribuite în raport cu construcțiile grafice efectuate.

Tabela nr. 15

		II	III	IV	V	VI
D	O	6,0	23,8	16,0	5,0	4,2
D	P	—	2,9	0,9	—	0,8
D	O + P	5,0	7,6	1,9	2,5	1,7
Total afirmative		11,0	34,3	18,8	7,5	6,7
N	O	17,0	16,2	9,4	12,5	22,7
N	P	3,0	6,7	10,4	26,3	54,6
N	O + P	1,0	1,9	—	2,5	—
Total negative		21,0	24,8	19,8	31,3	77,3
Total răspunsuri		32,0	59,1	38,6	48,8	84,0

Tabelul 15 prezintă procentele răspunsurilor la întrebarea: „Mai puteți desena și alte drumuri tot atît de scurte?“ distribuite și ele în raport cu construcțiile efectuate.

În primele trei rînduri sînt trecute răspunsurile afirmative (D) distribuite pe cele trei categorii de construcții grafice (Oblice, perpendiculare, perpendiculare și oblice).

Scanned with OKEN Scanner

În celelalte trei rînduri sînt trecute răspunsurile negative (N) de asemenea distribuite pe categoriile de construcţii grafice.

★

Faptul cel mai important care rezultă din datele obţinute de noi, este acela că rezolvarea de către copil a problemei de a găsi „drumul cel mai scurt de la un punct la o linie dreaptă", se obţine numai printr-un progres treptat implicînd reorganizarea fundamentală a mijloacelor sale logico-intuitive. Rezolvarea spontană la copilul de 5-9 ani se realizează în cele mai multe cazuri numai în poziţii privilegiate ale dreptei în raport cu baza foii.

Tabelul 13 ne arată o creştere treptată a frecvenţei copiilor care construiesc perpendiculara în cazul în care dreapta este înclinată faţă de baza foii de hîrtie. La clasa a II-a numai 6% dintre copii rezolvă astfel. La clasa a III-a procentul este încă mic: 11,5%. Creşterea continuă la 19,9% la clasa a IV-a, 32,5% la clasa a V-a, ajungînd la 55,4% la clasa a VI-a. La aceştia din urmă trebuie adăugaţi cei doi elevi care răspund „Perpendiculara" numai verbal (1,7%), în total deci, 57,1%. Curba reprezentînd aceste creşteri de la o clasă la alta (fig. 27) este o frumoasă ramură a unei parabole cu vîrful în jos.

Evoluţia procentajelor reprezentînd frecvenţa elevilor care construiesc diferite tipuri de oblice este mai puţin regulată. De la clasa a II-a (36%) are loc o creştere masivă la clasa a III-a (55,1%) unde avem o maximă. La clasa a IV-a procentajul începe să scadă (53,7%) dar diferenţa nu este semnificativă. Mai importantă este scăderea la clasa a V-a (40%) şi apoi la clasa a VI-a 31%.

Din confruntarea acestor două curbe rezultă următoarele. În primul rînd de la clasa a II-a la clasa a III-a evoluţia este divergentă. Dintre copiii care la clasa a II-a nu răspund de loc (39%) o parte mai mică este recrutată la clasa a III-a pentru construcţia perpendicularei (creşterea este de 5,5%) şi o parte mult mai mare este recrutată pentru construcţia oblicelor (creşterea este aci de 19,1%).

Putem presupune că avem aci două etape decalate ale evoluţiei, care se suprapun.

Înainte de a ajunge la construcţia perpendicularei (în cazul unei drepte înclinate) copiii trebuie să treacă de la dezorientarea produsă de o asemenea întrebare (răspunsul absent)

Scanned with OKEN Scanner

la o primă încercare de rezolvare (mai simplă, deşi incorectă). Numai ulterior, printr-o serie de tatonări, ajunge copilul la rezolvarea corectă: construcţia perpendicularei.

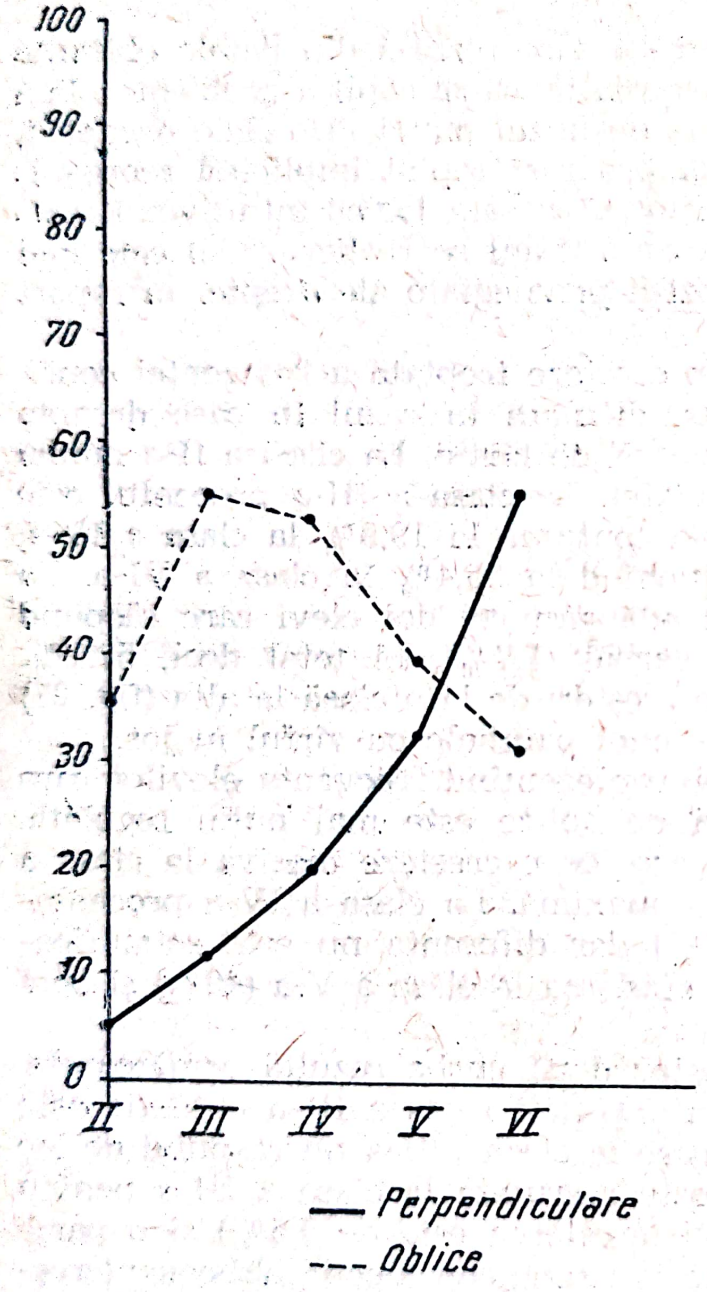


Fig. 27

Or tabelul 13 ne arată faptul că — în legătură cu problema pusă — etapa parcursă de copii de la clasa a II-a la clasa a III-a (deci cu aproximaţie între 9 şi 10 ani) se caracterizează în primul rînd prin depăşirea stadiului de dezorientare şi trecerea la o primă încercare de rezolvare (prin oblice). În acelaşi timp însă un număr mai mic de copii aflaţi într-o fază mai avansată de evoluţie ajung la construcţia perpendicularei.

Abia după această etapă, evoluţia celor două categorii de răspunsuri devine concordantă, în sensul că procentul copiilor care construiesc oblice devine descrescător în timp ce procentul celor ce construiesc perpendiculara continuă să crească.

La clasa a VI-a deşi copiii au învăţat noţiunea de perpendiculară şi teoremele în legătură cu ea, procesul nu este încă terminat. Numai ceva mai mult de jumătate dintre elevii cercetaţi la această clasă (e vorba de de copii în jurul vîrstei de 13 ani), rezolvă corect problema.

Imaginea globală a celor două curbe (fig. 27) ne arată și un alt fenomen, în afară de creșterea inițială a curbei oblicelor.

Dacă vom considera ca punct de plecare clasa a III-a — momentul în care începe să scadă curba oblicelor — vom constata că de la această clasă pînă la clasa a VI-a scăderea pe care o prezintă curba oblicelor este mult mai puțin pronunțată decît este creșterea pe care o prezintă curba perpendicularelor. Deosebirea apare în special în trecerea de la clasa a V-a la clasa a VI-a. În ansamblu de la clasa a III-a la clasa a VI-a curba oblicelor înregistrează o scădere de circa 20% în timp ce curba perpendicularelor înregistrează o creștere de circa 40%. Cum se explică această diferență de 20%? Aceasta înseamnă că o parte dintre elevii care au ajuns în clasa a VI-a să construiască perpendiculara n-au trecut prin etapa oblicelor. Ei s-au recrutat fie dintre cei care au dat un răspuns mixt (o perpendiculară și oblice) fie dintre cei care n-au răspuns de loc.

Într-adevăr începînd de la clasa a III-a pînă la clasa a VI-a procentul răspunsurilor mixte scade cu circa 9% iar al celor care nu răspund de loc cu circa 14% (apare un plus de cîteva procente, dar care se referă la cei care dau răspunsuri verbale).

Toate aceste considerații privitoare la evoluția procentelor în problema construcției „celui mai scurt drum de la un punct la o dreaptă“ ne duc la următoarea concluzie. Majoritatea copiilor ajung la soluția perpendicularei numai după ce au trecut printr-o etapă mai mult sau mai puțin îndelungată de tatonări sub forma unor construcții de oblice. O parte dintre copii trec și printr-o etapă intermediară în care oblicele și perpendiculara apar simultan. O parte dintre copii însă, circa 10%, par să ajungă dintr-o dată la construcția perpendicularei. Problema se pune în special în trecerea de la clasa a V-a la clasa a VI-a unde avem o creștere a procentului la „perpendiculare“ cu peste 20% în timp ce scăderea celor două categorii de răspunsuri incorecte („oblice“, „oblice + perpendiculară“) este numai de 11,4%.

Explicația acestui salt, de la absența oricărui răspuns la construcția perpendicularei, pe care-l fac unii copii din clasa a VI-a poate să rezide în faptul că, în această clasă ei învață în mod sistematic despre perpendiculară și proprietățile ei, ceea ce evident accelerează evoluția — iar pentru unii ar putea determina eliminarea etapelor intermediare. Totuși afirma-

ţia existenţei unui număr redus de copii (circa 10%) la care trecerea la construcţia perpendicularei se face fără o etapă de tatonări, prin oblice (cel puţin, în mod explicit, în desen) este ipotetică. E posibil ca toţi — sau cel puţin o parte dintre copiii — care la clasa a V-a n-au răspuns nimic şi la clasa a VI-a au construit perpendiculara să fi trecut în acest răstimp şi prin etape intermediare pe care cerecetarea noastră nu le-a înregistrat.

La clasa a VI-a procesul nu este încă terminat.

Numai ceva mai mult de jumătate dintre copiii acestei clase rezolvă corect problema, deşi e vorba de copii de 13 ani, în medie, cărora noţiunea de perpendiculară li s-a predat la lecţiile de geometrie.

Cum se explică aceste dificultăţi pe care le întîmpină copiii în rezolvarea unei probleme, în aparenţă atît de simplă : să găsească drumul cel mai scurt de la un punct la o linie dreaptă?

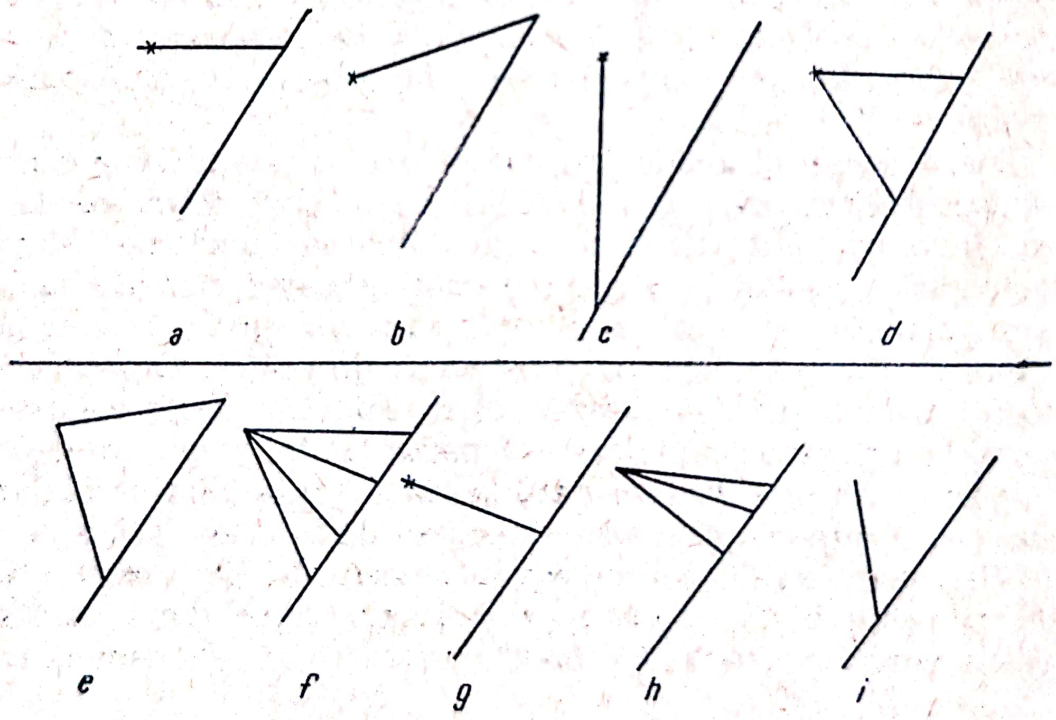


Fig. 28

Pentru a răspunde la această întrebare să analizăm întîi diversele soluţii incorecte. Oblicele construite de copii se grupează în cîteva categorii care se păstrează de-a lungul celor cinci clase cercetate.

a) Construcţia care apare cel mai frecvent constă într-un segment paralel cu baza foii de hîrtie (fig. 28, a).

b) Alteori segmentul uneşte punctul cu extremitatea de sus a segmentului (fig. 28, b).

c) Segmentul coboară perpendicular pe baza foii de hîrtie (fig. 28, c).

d) Apare segmentul paralel cu baza foii de hîrtie dar apare şi simetricul acestuia (fig. 28, d).

e) Apare segmentul care uneşte punctul cu extremitatea de sus a dreptei dar apare şi simetricul acestuia (fig. 28, e).

f) Mai multe oblice pornite din punct spre dreaptă (fig. 28, f).

g) O oblică mai apropiată de perpendiculară şi care pare a reprezenta perpendiculara în perspectivă (fig. 28, g).

h) Perpendiculara şi una sau mai multe oblice (fig. 28, h).

i) Oblica îndreptată în jos (intermediară între perpendiculară şi oblica dusă la extremitatea de jos a dreptei (fig. 28, i).

Cum se explică această varietate de răspunsuri care apar cu atîta constanţă la toate clasele cercetate? Înainte de a trece mai departe să citäm şi rezultatele unor experimente individuale efectuate cu copii de aceleaşi vîrste, în aceeaşi perioadă a anului şcolar.

Experimente individuale

În aceste experimente întrebările erau aceleaşi ca în experimentele colective, cu următoarele adăugiri:

a) Elevii erau puşi să traseze „drumul cel mai scurt“ şi la tablă, nu numai pe caietul lor.

b) Aceeaşi problemă era prezentată şi în felul următor. Se trasa pe pămînt, în curtea şcolii, o dîră, apoi se fixa un punct la circa 2 m distanţă. Se dădea următoarea explicaţie: „Aceasta este o şosea (sau „acesta este un rîu“). Care este drumul cel mai scurt pe care putem ajunge de la un punct la şosea (sau la rîu)?“.

Pred. Sim. (9,8, III). a) La tablă elevul trasează un segment paralel cu baza foii, urcînd uşor.

b) Pe caiet (fig. 29) trasează întîi segmentul 1.

Exp. Alt drum mai scurt nu se poate duce ?

El. Ba da, se poate şi aşa (trasează segmentul 2).

Exp. Şi mai scurt decît aceste drumuri nu se poate ?

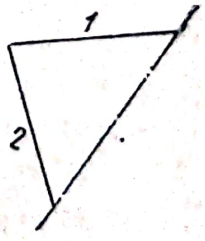


Fig. 29

El. Nu, nu se poate.

Ino. Gab. (9, 11, III). Pe tablă, desenează segmentul 1 (fig. 30).

Exp. Crezi că acesta este drumul cel mai scurt? Încearcă să duci unul mai scurt.

El. (Trasează segmentul 2).

Exp. Încearcă și mai scurt.

El. (Trasează segmentul 3).

Pe caiet. (Trasează un segment oblic ca 1 din figura de mai sus).

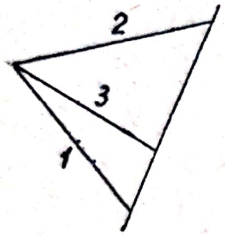


Fig. 30

Orz. Cor. (10, III) Pe pământ, a) Dreapta dată în poziția obișnuită (I). Elevul în punctul A. Trasează segmentul perpendicular (fig. 31 a). b) Dreapta dată în poziție schimbată (II). Elevul în poziția A. (fig. 31b). Trasează segmentul perpendicular, c) Elevul în aceeași poziție. Se mută ceva mai la o parte locul punctului din care trebuie dus, „drumul" (2). Elevul duce segmentul din 2, cum se vede în figură (oblic).

Pe tablă, a) (fig. 32) Dreapta în poziția I. Elevul trasează segmentul ca în fig. 32 I. b) Dreapta în poziția II. Elevul trasează segmentul paralel cu baza tablei.

Pe caiet. a) Dreapta în poziția II. Segmentul este trasat ca în fig. 33 a, b) Dreapta în aceeași poziție dar mai puțin înclinată față de bază.

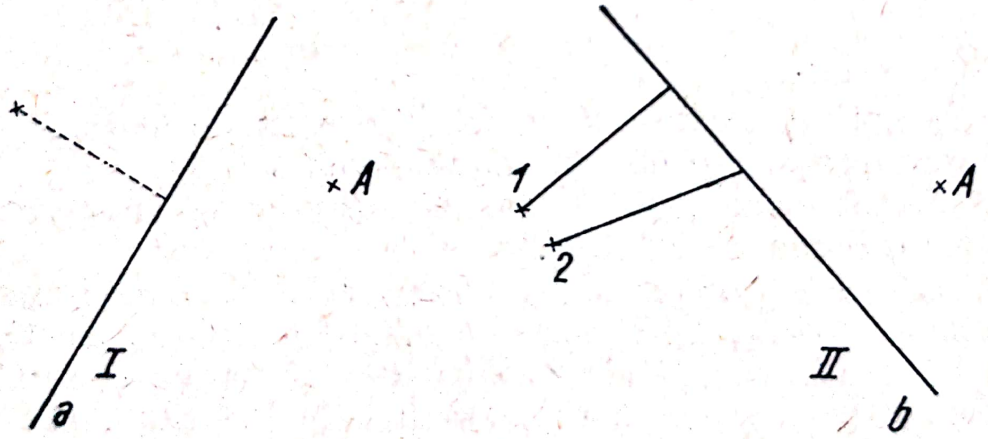


Fig. 31

Segmentul trasat de elev se apropie de perpendiculară (33 b). c) Dreapta în poziția I. Segmentul este trasat oblic (fig. 33 c).

Pop. Geo (9, 7, III). Pe tablă (trasează ca în fig. 34). Pe pământ: a) Elevul este plasat în A. Trasează segmentul 1. b) Se face o altă figură. Elevul este plasat în B. Trasează întîi segmentul în poziția 1. Apoi trasează și segmentul 2.

Ung. Mar. (9, 8, III). Pe pămînt, de la început în poziția B. Trasează segmentul perpendicular.

Pe tablă. Trasează segmentul în poziția 1 din fig. 35.

Pro. Aur. (10, III). Experimental începe pe pămînt.

Copilul este plasat de la început cu fața la linie. Soluția apare spontan — copilul merge perpendicular spre linie și apoi trasează segmentul respectiv. La tablă însă, cînd i se dă linia înclinată, copilul nu mai găsește soluția corectă decît după tatonare. La început trasează segmentul paralele cu baza tablei.

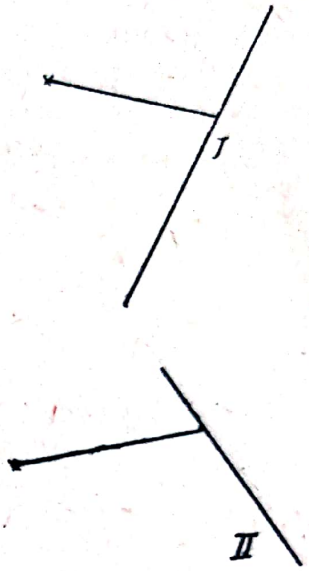


Fig. 32

Ion. Șer. (10, 8, IV). Pe caiet (trasează segmentul 1 fig. 36).

Exp. Închipuie-ți că te afli în pădure, iar linia aceasta este o apă curgătoare. Tu te afli în punctul acesta și vrei să ajungi cît mai repede din punctul în care te afli la apa curgătoare. Cum ai să mergi ?

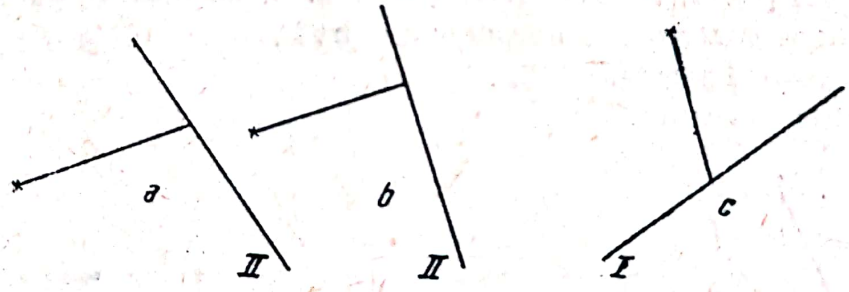


Fig. 33

El. Așa (trasează segmentul 2).

Aceeași problemă este reluată, de astă dată trasîndu-se o dîră pe pămînt. Se repetă explicația: o apă curgătoare etc. Elevul este plasat însă în punctul A și i se cere să-și imagineze rezolvarea problemei din această poziție („Dacă te-ai afla în punctul B care ar fi drumul cel mai scurt pe care ai ajunge la rîu ?).

El. (După ce a privit cîteva clipe, trage pe pămînt o linie avînd poziția 1).

Exp. Stai aici (îi indică punctul B). Să vedem cum ajungi acum pe drumul cel mai scurt la rîu ?

El. (se așază cu fața spre „rîu"). Merg drept (și merge perpendicular pe direcția „rîului".

Dem. Ver. (11, IV) Pe caiet. (Copilul trasează segmentul paralel cu baza foii).

Pe pămînt (se dau explicațiile privitoare la apa curgătoare): a) Subiectul este plasat în A, trasează segmentul ca în fig 37. b) Subiectul este plasat în B. Duce perpendiculara mergînd spre „rîu".

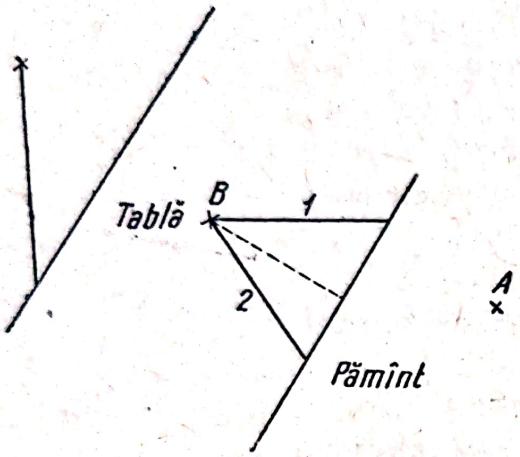


Fig. 34

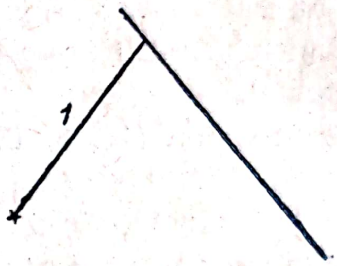


Fig. 35

Dăr. Nic. (10, 7, IV) Pe caiet (trasează segmentul 1, fig. 38).
Exp. Nu se poate găsi un drum mai scurt?
Sub. (trasează segmentul 2).
Exp. Și mai scurt?

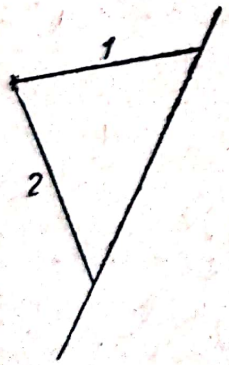


Fig. 36

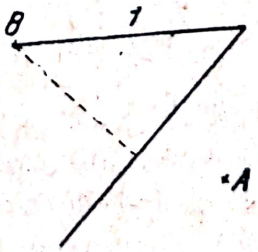


Fig. 37

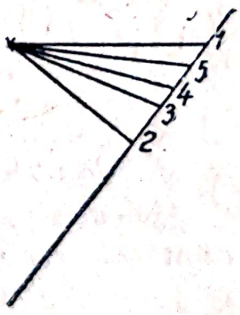


Fig. 38

Sub. (Trasează segmentul 3).
Exp. Și mai scurt.
Sub. (trasează segmentul 4).
Exp. Cel mai scurt.
Sub. (trasează segmentul 5).

Pop. Vior. (10, 6, IV). Caiet (trasează întîi segmentul (1), privește ce a obținut și trasează și segmentul (2) fig. 39).

Exp. Cum se numește linia pe care ai tras-o, știi ?

Sub. Da. Se numește perpendiculară.

Exp. Există și un alt drum mai scurt ?

Sub. Nu există altul mai scurt.

Exp. Dar alte drumuri la fel de scurte ca cel pe care l-ai desenat ?

Sub. Nu, nu mai există, Altele mai lungi, da.

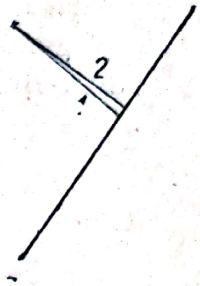


Fig. 39

Br. Zol. (11, 8, V). Redăm în fig. 40 segmentele trasate de copil pe tablă, pe pământ din poziția B (perpendiculara a fost trasată fără nici o ezitare), pe caiet.

Che. Iul. (11, 10, V). Pe tablă trasează segmentul 1 (a) fig. 41.

Exp. Te-am rugat să găsești drumul cel mai scurt. Nu poți găsi un drum mai scurt ?

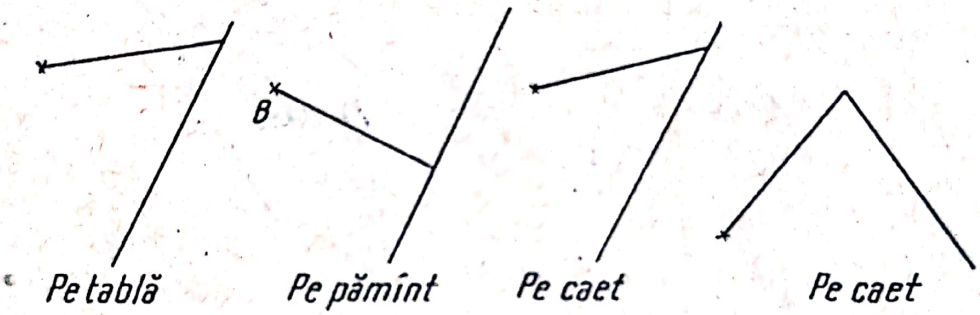


Fig. 40

Sub. (trasează segmentul 2 (a)).

Pe pământ. Subiectul se află în poziția A. Trasează o oblică așa cum se vede în figură (b). Din nou pe pământ. Subiectul se află în poziția B. Trasează o oblică (1), privește ce a obținut apoi revine și trasează perpendiculara (2) (fig. 41 c).

Pe caiet. Trasează întîi o oblică (d) apoi, la cealaltă poziție a liniei (e) modifică poziția caietului în așa fel încît direcția privirii să cadă perpendicular pe dreaptă și trasează un segment apropiat de perpendiculară.

Bus. Stef. (11, 8, V). Pe caiet. a) Dreapta e în poziția I. Segmentul trasat este oblic (1). (fig. 42).

Exp. Crezi că acesta e drumul cel mai scurt ? N-ai putea duce un drum mai scurt ?

Sub. (se gîndește. Apoi duce un segment apropiat de perpendiculară (2)).

Pe pământ. Elevul e în punctul A. Trasează segmentul 1.

Exp. Dar mai scurt nu se poate ?

Sub. (Trasează perpendiculara).

Il. Jus. (12, 8, VI) (fig. 43).

Pe caiet (a) El. duce mai întîi segmentul (1) (Oblic). I se cere din nou să găsească „drumul cel mai scurt" și duce segmentul (2), mai apropiat de perpendiculară.

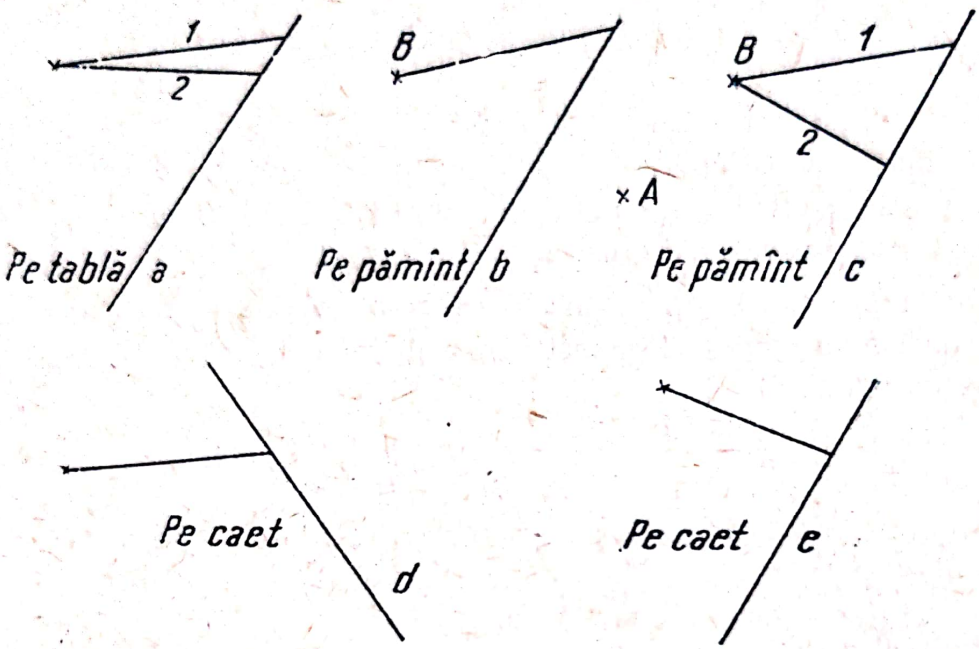


Fig. 41

Pe pămînt (b). Din poziția A subiectul duce întîi segmentul (1) apoi, la insistențele experimentatorului duce segmentul (2).

Tot pe pămînt (c).. Subiectul trece în poziția B, trasează imediat un segment aproape perpendicular.

Hor. Syb. (13, VI) trasează, corectîndu-se, segmentele 1, 2, 3, (fig. 44).

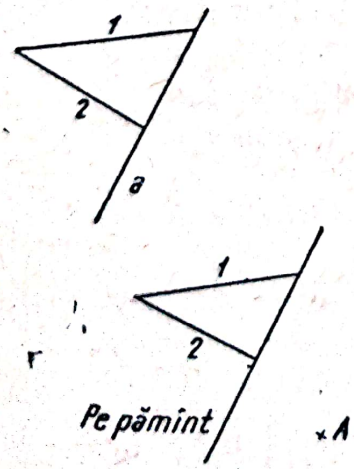


Fig. 42

Bun. Ghe. (12, 6, VI). El. „Ducem perpendiculară". (Trage segmentul oblic (1) fig. 45).

Exp. Ai spus că duci perpendiculara. Ce ai făcut ?

El. (Privește). „Am greșit" (duce perpendiculara 2).

Geo. Sor (12, 6, VI). Începe prin a trasa segmentul oblic (1) (fig. 46). Se oprește însă înainte de a-l termina și trage perpendiculara (2).

Exp. Cum se numește dreapta pe care ai tras-o ?

El. Perpendiculară.

Exp. E posibil să existe și un alt drum mai scurt ?

El. Nu. Dacă ducem și oblica se formează un triunghi dreptunghic. Cateta e mai scurtă decît ipotenuza.

Zan. Nic. (12, 5, VI). Sub. Ducem perpediculara (trasează segmentul perpendicular).

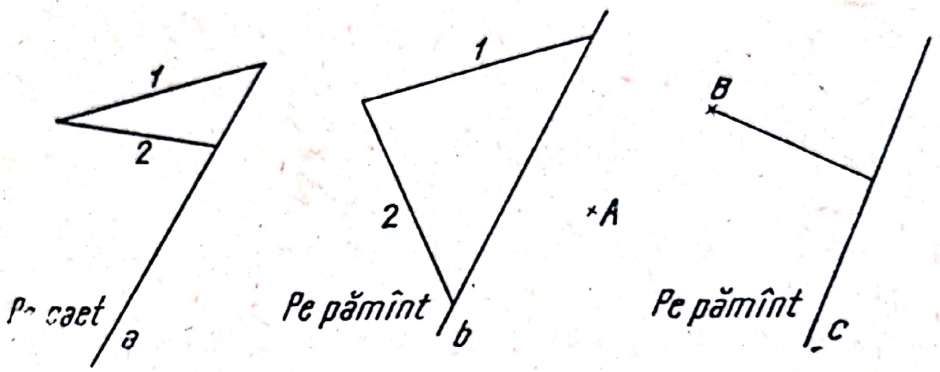


Fig. 43

Exp. De unde știi ?

Sub. Am învățat.

Exp. Dar un alt drum tot atît de scurt nu se poate duce ?

Sub. Nu mai poate fi un alt drum tot atît de scurt.

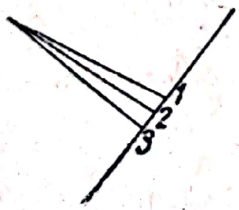


Fig. 44

Fig. 45

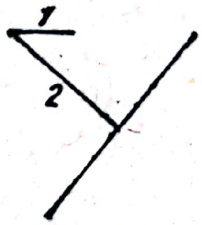


Fig. 46

Spir. Teo. (13, VI). Sub. Ducem perpendiculara (trasează segmentul perpendicular).

Exp. De unde știi că acesta e drumul cel mai scurt ?

Sub. Așa e regula învățată la geometrie.

Exp. Mai poate fi și un alt drum tot atît de scurt ?

Sub. Nu. Oblica e mai scurtă decît perpendiculara.

★

Din toate datele prezentate aci rezultă că obținem un răspuns corect în mod spontan dacă :

a) Experimentul făcîndu-se pe pămînt, copilul este plasat în locul din care trebuie să ducă „drumul cel mai scurt".

b) Dreapta este trasată paralel cu baza foii de hîrtie.

În aceste cazuri, copilul, în general (dar nu întotdeauna), duce prependiculara la dreaptă sau merge spre dreaptă pe o direcţie perpendiculară pe ea.

De aci rezultă că există posibilitatea unei rezolvări intuitive dar numai în situaţii privilegiate.

În cazul în care copilul este plasat chiar în punctul din care trebuie dus segmentul soluţia derivă direct dintr-o conduită practică, pe care am putea-o denumi conduita minimei distanţe şi pe care copilul a experimentat-o de nenumărate ori din clipa în care a învăţat să meargă.

Deşi nu există un punct de reper pe dreaptă copilul alege spontan perpendiculara printr-o considerare a situaţiei globale, dar numai după ce s-a aşezat cu faţa la dreaptă. Din această poziţie el merge apoi drept înainte.

Cînd e vorba de o dreaptă paralelă cu baza foii de hîrtie copilul este pus într-o împrejurare analogă cu cea precedentă: direcţia privirii este perpendiculară pe dreaptă. Copilul nu face decît să reproducă în desen ceea ce în cazul precedent realiza printr-o conduită practică.

Faptul că copilul se află situat în partea opusă punctului, în raport cu dreapta, nu influenţează direcţia drumului.

E posibil să intervină aci şi alţi factori.

a) Perpendiculara, coborîtă din punct pe dreaptă, reproduce (prin rabatere) verticala, adică direcţia de cădere a corpurilor, familiară copilului.

b) Perpendiculara este, în acest caz, paralelă cu marginile laterale ale foii de hîrtie, ceea ce, de asemenea, are un efect pozitiv.

Aşadar, în ambele cazuri privilegiate la care ne-am referit, soluţia corectă, perpendiculara dusă de la punct la dreaptă, apare ca derivînd direct dintr-o conduită practică, dintr-o experienţă anterioară, concretă a copilului. Această derivare directă face ca rezolvarea spontană să scape de orice alte influenţe externe care ar putea-o altera.

Ce se întîmplă însă cînd dreapta nu mai are o situaţie privilegiată — aşa cum se petrec lucrurile cu dreapta înclinată faţă de baza foii de hîrtie (sau a tablei).

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz intră în joc un şir întreg de tendinţe diverse, avînd diferite surse şi o pondere diferită.

1) Un rol deosebit de important îl joacă formaţiunea logico-intuitivă a noţiunii de *drept*, formaţiune cu o structură complexă şi eterogenă constituită pe baza experienţei copilului, în mare măsură în afara unei influenţe didactice sistematice.

a) Drept înseamnă în primul rînd fără ocol, în sens de direct.

b) Drept înseamnă şi cît mai repede, în timpul cel mai scurt.

c) Drept înseamnă (pentru copil) şi opus lui oblic, înclinat, fie în raport cu verticala, fie în raport cu orizontala.

d) Drept poate însemna şi vertical în opoziţie cu orizontala, prin analogie cu „a sta drept" — în picioare (şi nu culcat).

2) Al doilea factor care influenţează rezolvarea problemei puse se referă la necesitatea pe care o resimte copilul de a căuta, pentru punctul dat, un alt punct cu care să fie pus în legătură. Dreapta este formată dintr-o infinitate de puncte şi nu oferă, prin ea însăşi, un element de sprijin, un element care să centreze activitatea logico-intuitivă de investigaţie a copilului şi să ducă la găsirea soluţiei.

Şi astfel, extremităţile segmentului de dreaptă desenat, singurele elemente ocupînd o poziţie privilegiată ajung să exercite o atracţie asupra activităţii mintale a copilului şi, în consecinţă, să determine direcţia drumului.

3) Dreapta înclinată poate apărea ca imagine în perspectivă a unei şosele. Copilul a văzut de multe ori în ilustraţiile sau fotografiile pe care le-a privit asemenea imagini în perspectivă. „Drumul cel mai scurt" este reprezentat astfel ca o perpendiculară în perspectivă şi deci în ultimă instanţă tot ca o oblică.

4) La unii copii intervine factorul simetriei. Ducînd drumul sub forma unei oblice (datorită uneia din influenţele descrise mai sus), copilul duce, uneori, ca răspuns la întrebarea „dacă mai există şi un alt drum tot atît de scurt" şi o oblică simetrică cu prima — deci tot atît de scurtă.

Pus în situaţia de a căuta „drumul cel mai scurt de la punct la linie" copilul va fi influenţat în investigaţia sa de tot acest şir de factori. Influenţa se exercită şi pe cale conceptuală — datorită în special, structurii eterogene pe care noţiunea de drept-dreaptă o are în gîndirea copilului — şi pe cale intuitivă sub influenţa structurii de ansamblu a imaginii percepute. (De

Scanned with OKEN Scanner

fapt, distincţia este relativă deoarece toţi aceşti factori au, în ultimă instanţă, o structură logico-intuitivă).

Într-o serie de cazuri expuse în această lucrare noi am constatat la copii de diferite vîrste posibilitatea unor soluţii global-intuitive înainte ca procedeele de rezolvare să poată fi explicitate. Aşa, de pildă, am constatat că un copil poate determina intuitiv poziţia unui punct în plan în raport cu un cadru de referinţă, mult înainte de a putea utiliza sistemul de coordonate (vezi capitolul XXII). De asemenea un copil determină centrul unei figuri simple (cerc, pătrat, triunghi echilateral) cu destulă precizie înainte de a putea indica vreun procedeu anumit.

În cazul distanţei de la un punct la o dreaptă însă, soluţia ca atare — nu ne referim la vreo explicaţie — nu apare la cei mai mulţi copii decît lent, prin tatonări succesive, după ce trece printr-o serie de etape intermediare. Copiii — cei mai mulţi — nu au „revelaţia" perpendicularei şi cu atît mai puţin a unicităţii ei — aşa cum, de pildă, găsesc, dintr-odată, centrul unei figuri simple. Ei caută această lungime minimă şi adeseori chiar după ce o găsesc nu sînt siguri de ea şi abandonează soluţia găsită. Ei acceptă, de multe ori, o pluralitate de lungimi „minime" gravitînd în jurul direcţiei corecte.

Toate acestea impun concluzia că în problema „celui mai scurt drum de la un punct la o dreaptă" — în afară de unele cazuri privilegiate — nu apare posibilitatea unei rezolvări imediate, intuitive.

Rezolvarea corectă — identificarea celui mai scurt drum de la punct la dreaptă cu perpendiculara — presupune prezenţa activă a unor procedee logice, sau, mai exact logico-intuitive, care nu se dezvoltă decît treptat. Să le enumerăm :

a) Trebuie să existe în primul rînd posibilitatea unei serieri mintale active, mai mult sau mai puţin explicite a şirului indefinit de segmente cu lungimi variabile („drumurile"), care pivotează în jurul punctului dat, cuprinse între acest punct şi o dreaptă dată.

Această seriere nu operează cu un material perceptiv, cu obiecte concrete, ci cu un şir, în principiu nelimitat, de segmente posibile, imaginabile.

b) În al doilea rînd, limita acestei variaţii nu este nici ea determinată de vreun element privilegiat, prin sine remarcabil, al dreptei.

Limita — lungimea minimă a segmentului — nu este reprezentată de extremitatea unei serii (dincolo de care nu se

mai află nimic) ci de un moment al unei variații care se continuă și anume de momentul în care variația își schimbă sensul. Segmentul descreşte necontenit în timpul rotirii sale în jurul punctului, dar de la un moment dat — și tocmai acest moment trebuie surprins — segmentul începe să crească. Momentul acesta este momentul de minimă.

Din toate aceste considerații rezultă limpede că găsirea acestei limite nu se poate reduce la o activitate intuitivă, sincretică, globală.

Și aranjarea după mărime a unor cuburi de dimensiuni diferite, presupune o activitate mintală de comparare și seriere. Dar, în primul rînd, această seriere se poate reduce la o simplă comparație — predominant intuitivă — a obiectelor două cîte două. În al doilea rînd — și acest fapt ni se pare esențial — obiectul considerat ca fiind cel mai mic constituie pentru activitatea mintală un punct terminus, deci într-un anumit sens o realitate statică, numai determinată dar nu și determinantă.

Momentul de minim despre care vorbim în cazul distanței, al perpendicularei, reprezintă un hotar între două sensuri ale unei variații. Acesta nu reprezintă numai momentul în care o variație se termină — deci momentul determinat de epuizarea procesului — ci în același timp și un moment determinant, cel în care celălalt sens al variației începe. Acest minim, această limită, constituie o realitate dinamică — cerînd pentru a fi înțeleasă o coordonare superioară a operațiilor de gîndire.

c) Sesizarea ideii generale a variației și a prezenței momentului de minim, implică participarea și a altei proprietăți a operațiilor mintale și anume reversibilitatea. Variația nu trebuie concepută într-un singur sens, dinspre M spre N sau invers, ci posibilă în ambele sensuri. Ea nu este o variație înfăptuită și încheiată ci o variație posibilă, realizabilă (și nu realizată) — oricînd în ambele sensuri.

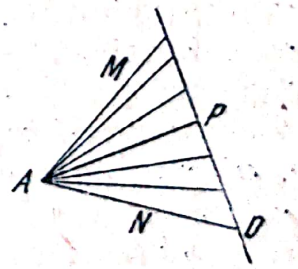


Fig. 47

Această variație este deci un act conceptualizat și nu un act efectiv. Momentul de minim apare ca un moment de echilibru, dar nu un echilibru consumat, înghețat, un punct mort, ci un echilibru dinamic, dialectic între două tendințe contrarii — descreșterea și creșterea — indiferent, în fond, față de

sensul rotirii segmentului, dar implicînd, deci, ca posibile, ambele sensuri.

d) Egalitatea unghiurilor de la baza segmentului nu apare ca o proprietate decurgînd analitic din proprietatea lungimii minime a perpendicularei ci ca o proprietate distinctă, exterioară, asociată cu lungimea minimă. Această proprietate sesizabilă intuitiv este descoperită (chiar dacă nu capătă din partea copilului o formulare explicită) şi utilizată drept semnal intuitiv al lungimii minime. Dar acest lucru se întîmplă numai după ce tot procesul descris anterior a avut loc, deci după ce lungimea minimă a fost stabilită în mod corect. Altfel copilul nu se arată preocupat de cele două unghiuri de la bază şi de variaţia lor, concomitentă cu rotirea segmentului şi deci şi cu variaţia acestuia. Numai ulterior — şi poate prin indicaţii venite de la profesor — copilul va sesiza prezenţa acestor unghiuri, faptul că mărimea lor variază în raport invers (pe măsură ce unul dintre unghiuri scade, celălalt creşte). Ideea perpendicularei va fi deplin însuşită atunci cînd copilul va ajunge să înţeleagă faptul că relaţia dintre variaţia lungimii segmentului şi variaţia diferenţei celor două unghiuri este o relaţie internă, necesară: diferenţa scade pe măsură ce scade lungimea segmentului, atinge un minim egal cu 0 — unghiurile devin egale — atunci cînd segmentul atinge dimensiunea minimă, apoi diferenţa începe din nou să crească atunci cînd lungimea segmentului începe şi ea din nou să crească.

e) Dar înţelegînd că relaţia dintre variaţia segmentului şi a unghiurilor — şi deci şi între cele 2 momente de minim — este o relaţie internă, necesară — copilul va putea gîndi şi invarianţa ortogonalităţii în raport cu schimbările de poziţie ale figurii, ca şi în raport cu modificările de similitudine. Sau, cu alte cuvinte, chiar dacă dreapta se află într-o poziţie oarecare în plan — de pildă, înclinată faţă de baza foii — drumul cel mai scurt rămîne tot segmentul care formează cu dreapta unghiuri egale. Figura trebuie considerată desprinsă din contextul poziţional — indiferentă faţă de acest context, nealterabilă de acest context. Acest fapt este esenţial. Or acest fapt se realizează — după cum vom vedea — şi a reieşit de altfel din exemplele noastre — foarte greu.

Din analiza făcută de noi pînă aci rezultă că ideea segmentului minim cuprins între un punct şi o dreaptă, solidară cu noţiunea de ortogonalitate, nu se poate forma prin simpla activitate de considerare intuitivă a unui ansamblu figural. Această

Scanned with OKEN Scanner

entitate mintală reprezintă un exemplu tipic de concept figural. Ea se dovedește a implica o construcție logico-intuitivă complexă în care procedeele logice dispunînd de un grad suficient de mobilitate și reversibilitate a compoziției își subordonează datele intuitive și le determină semnificația.

Înainte de a se fi desăvîrșit această construcție complexă logico-intitivă, răspunsurile copilului vor fi determinate de factorii activi de natură conceptuală sau intuitivă menționați mai sus.

Să analizăm, în lumina acestor considerente, exemplele pe care le-am citat.

Copilul Pred. Sim. (III). Începe prin a trasa un segment paralel cu baza tablei. Avem aci de a face cu o triplă influență: drumul este constituit dintr-o porțiune de linie dreaptă, prima condiție ca un drum să fie cel mai scurt — transpunerea experienței celui mai scurt drum dintre două puncte. Orientarea segmentului este însă greșită. „Drumul cel mai scurt este drumul drept" dar „drept" înseamnă în același timp pentru copil și *orizontal* adică direcția drumului obișnuit, pe pămînt, pe podea, pe stradă. Orientarea aceasta a segmentului este deci transpunerea grafică directă a experienței practice a copilului. Pe de altă parte această poziție a segmentului este favorizată și de paralelismul său cu baza foii.

La cererea de a rezolva problema și pe caiet, copilul repetă aceeași construcție. A doua soluție pe care o oferă (segmentul 2) este evident determinată de considerente de simetrie. La acest copil nu se vede încă apărînd un proces de investigație reală prin compararea unui șir de segmente, nu apare încercarea de a găsi segmente mai scurte, mai apropiate de soluția corectă.

Operația mintală, absolut necesară pentru a se ajunge la rezolvarea corectă, operația reprezentării rotirii indefinite a segmentului în jurul punctului fix, nu s-a format.

Copilul Ino. Gab. (III) face un pas mai departe. La insistențele experimentatorului de a găsi un drum mai scurt, copilul izbutește să traseze un segment intermediar mai apropiat de perpendiculară.

La Pop. Geo. (III) apare altă reacție mai puțin frecventă și anume segmentul vertical.

Cînd problema este transpusă pe pămînt, copilul fiind situat în partea opusă punctului, obținem aceleași oblice pe care le-am obținut și la subiecții Pred. Sim. și Ino. Gab. Aceasta înseamnă că tipurile de soluții la care ne-am referit în paginile

precedente nu exprimă reacţii stabile ale copilului, constante individuale. Copilul care a recurs la una din soluţii poate recurge alteori la alta.

Subiectul Pop. Ge. este trecut pe urmă chiar în punctul B. Totuşi nici în această poziţie soluţia corectă nu apare, copilul trasînd oblicele 1 şi 2, ceea ce înseamnă că influenţa reacţiei sale precedente (cînd era plasat în punctul A) se dovedeşte a fi mai puternică decît reacţia corectă pe care poziţia privilegiată ar fi trebuit s-o favorizeze.

Copilul Ung. Mar. (III) începe prin a trasa pe tablă oblica 1. Problema fiind însă transpusă pe sol iar copilul plasat de la început în poziţia B reacţia corectă, perpendiculara, apare dintr-odată.

Cu copilul Pro. Aur. (III) ordinea este inversată: experimentul începe pe sol copilul fiind aşezat de la început în poziţia B. După cum rezultă din protocol copilul trasează dintr-odată perpendiculara (respectiv se îndreaptă spre linia dreaptă înaintînd pe o direcţie perpendiculară).

Acelaşi copil după ce a rezolvat corect problema pe sol nu mai ştie s-o rezolve la tablă. Generalizarea experienţei dobîndite nu apare: el trasează oblica paralelă cu baza tablei. Ceea ce înseamnă că soluţia corectă obţinută iniţial pe sol nu este decît expresia directă a unei conduite practice. Dacă la baza acestei reacţii ar fi existat o construcţie conceptuală ea ar fi trebuit să aibă un caracter generalizat, construcţie capabilă de a anula jocul diverselor influenţe determinate de structura de ansamblu a imaginii intuitive.

După cum rezultă din datele statistice (vezi tabelul 13), există la clasele II şi III un procent redus de elevi care dau de la începutul experimentului răspunsuri corecte.

Faptul acesta rezultă şi din experimentele individuale. Dar aceste experimente ne arată însă în plus, că la vîrsta respectivă răspunsurile corecte sînt labile, uşor perturbate de variaţia datelor problemei.

Elevul Orz. Car. (III) cu care primul experiment a fost făcut pe sol a dat de la început răspunsul corect deşi se afla situat în partea opusă punctului. Pentru a se verifica stabilitatea răspunsului, orientarea dreptei se schimbă. Totuşi elevul dă şi în această situaţie răspunsul corect. Schimbîndu-se însă poziţia punctului, copilul abandonează soluţia corectă şi construieşte o oblică — deşi e vorba de o schimbare, în fond neesenţială pentru datele problemei.

Scanned with OKEN Scanner

Trecîndu-se la tablă elevul începe prin a trasa un segment apropiat de perpendiculară, un fel de perpendiculară în perspectivă. La schimbarea de direcţie a dreptei copilul recurge la răspunsul cel mai comun, segmentul paralel cu baza tablei. Aceeaşi labilitate a răspunsurilor apare şi atunci cînd se utilizează caietul. Perpendiculara apare la un moment dat, dar este apoi abandonată.

Iată aşadar, un caz deosebit de interesant: soluţia corectă apare de la început, reapare în cursul experimentului, dar este de fiecare dată abandonată. Construcţia mintală care-i serveşte ca suport nu este terminată, nu este desăvîrşită şi astfel suferă cu uşurinţă influenţele perturbatoare menţionate în paginile precedente.

Clasa a IV-a nu aduce schimbări calitative. Tabelul 13 ne-a arătat o creştere a procentului răspunsurilor corecte. Analiza experimentelor individuale ne arată faptul că la această clasă un număr de copii se apropie cu mai multă uşurinţă de soluţia corectă. Totuşi în general, soluţia se obţine încă prin tatonări.

Copilul Ion. Şer. nu izbuteşte să treacă dincolo de segmentul paralel cu baza foii şi simetricul acestuia. Dem. Ver (IV) în experimentul pe sol, din punctul A, trasează drumul spre extremitatea dreptei. Numai după ce este plasat în B găseşte soluţia corectă. Dăr. Nic. începe cu segmentul paralel cu baza foii, găseşte apoi perpendiculara dar la întrebările experimentatorului abandonează soluţia corectă şi trasează o serie de alte oblice. Pop. Nic. duce de la început un segment apropiat de perpendiculară, uşor înclinat, apoi se corectează însă, şi duce perpendiculara. Copilul afirmă cu multă siguranţă că alt drum mai scurt sau la fel de scurt nu se poate duce. Dar această siguranţă a răspunsurilor sale se datoreşte faptului că el posedă noţiunea de perpendiculară.

În clasa a V-a subiecţii cu care s-a experimentat nu aduc elemente noi. Bra. Zol. nu duce perpendiculara decît pe sol fiind situat în punctul B. În celelalte cazuri el trasează fie segmente paralele cu baza tablei sau a foii fie segmente care merg spre extremitatea dreptei. Che. Iul. izbuteşte să ajungă după o serie întreagă de tatonări la perpendiculară. Elevul Bus. Ste. ajunge mai repede la perpendiculară dar numai după ce a trasat oblice atît pe caiet cît şi pe sol. Pe sol rezolvarea corectă — după o încercare greşită — este dată chiar din poziţia A.

Scanned with OKEN Scanner

În clasa a VI-a însă, se poate vorbi, la o parte din subiecți, de o schimbare calitativă. Cei mai mulți subiecți construiesc perpendiculara, dovedind însă că ei cunosc noțiunea respectivă. Din răspunsurile lor se vede absolut limpede că siguranța cu care procedează (sau se corectează singuri) decurge din faptul că actul s-a conceptualizat.

Acești elevi nu mai ajung la rezolvare prin tatonări. Rezolvarea decurge dintr-o construcție conceptuală: drumul cel mai scurt de la punct la dreaptă este perpendiculara. Drumul, o dată trasat, copilul nu se mai îndoiește de exactitatea și — ceea ce este mai important — de unicitatea soluției.

Totuși procesul nu este încheiat la această vîrstă. Răspunsurile copiilor dovedesc faptul că între noua structură conceptuală și ansamblul vechilor influențe determinate de complexul figural, conflictul persistă — deși pînă la urmă noua formațiune iese învingătoare.

Subiectul Ili. Just. se află încă în stadiul preconceptual al rezolvării problemei. Pe caiet el începe prin a dirija segmentul către extremitatea superioară a dreptei. După ce experimentatorul insistă din nou ca elevul să găsească drumul cel mai scurt, Ili. Just. trasează un segment care face un unghi mai mic cu dreapta dar perpendiculara nu este încă găsită.

Pe sol problema nu este rezolvată decît în poziția privilegiată B.

Nici Hor. Syb. nu rezolvă dintr-odată problema. Totuși subiectul este într-un stadiu superior. El se apropie de perpendiculară printr-o serie de tatonări succesive, dar nu făcute la întîmplare. Copilul se apropie *constant*, de perpendiculară (spre deosebire de unele răspunsuri obținute în clasele precedente în care de asemenea apăreau tatonări, dar fără această orientare). Copilul nu are încă conștiința unicității soluției, el nu caută propriu-zis perpendiculara — în sensul că el nu face apel la egalitatea unghiurilor formate cu dreapta ca „semn" al distanței minime — dar el a descoperit tehnica de rezolvare care dovedește faptul că el este pe cale de a deveni conștient de un fapt esențial: modul în care variază dimensiunea segmentului ca urmare a rotirii sale. Copilul se află în pragul rezolvării, el posedă sistemul de operații mintale care-i permite să găsească, în cazul dat, drumul cel mai scurt. Dar el nu trece acest prag pentru că nu are conștiința relației esențiale dintre dimensiunea minimă a segmentului și ortogonalitate, nu are conștiința unicității soluției, pentru el nu există

Scanned with OKEN Scanner

propriu-zis perpendiculara ca limită unică a celor două sensuri ale variației.

Acest răspuns al copilului Hor. Syb. este foarte instructiv. El pune și mai bine în evidență faptul că soluția la problema segmentului de dimensiune minimă cuprins între un punct și o dreaptă, este o soluție conceptuală, rezultatul unei construcții conceptuale care reorganizează datele intuitive.

Tabelul nr. 13 ne arată că, începînd din clasa a II-a, obținem o creștere progresivă a procentului răspunsurilor corecte. Dar experimentele individuale ne arată că pînă la clasa a V-a răspunsurile corecte (de altfel puțin numeroase) sînt instabile, labile, ușor perturbate de variația datelor intuitive și de întrebările suplimentare. La clasa a V-a soluția corectă apare mai frecvent, prin tatonări succesive. Dar și de astă dată răspunsurile sînt nesigure, ezitante, labile. La fiecare schimbare a condițiilor apare pericolul dezorganizării răspunsurilor.

Hor. Syb. din clasa a VI-a, după cum am văzut, se dovedește a fi și mai apropiat de rezolvare întrucît încercările sale îl fac să descopere descreșterea constantă a segmentului pe măsura rotirii sale. Dar la nici unul din acești copii certitudinea soluției nu apare din considerarea complexului figural. Labilitatea răspunsurilor dispare numai acolo unde ansamblul datelor intuitive este subordonat unei construcții conceptuale — unde relația dintre dimensiunea minimă și ortogonalitate apare ca o relație necesară, reflectată conceptual.

Ceea ce vrem să subliniem este deci faptul că *trecerea de la soluția labilă, obținută prin tatonări, la soluția stabilă și certă, implică un salt calitativ constînd în realizarea unei construcții conceptuale capabilă să redistribuie datele intuitive și să le integreze într-o nouă semnificație.*

Extrem de interesante sînt situațiile în care cele două modalități de răspuns — cea corectă, din perspectiva conceptuală, și cea incorectă, dominată de considerentele intuitive — intră în conflict. Asemenea fenomene întîlnim de mai multe ori în clasa a VI-a.

Să luăm, de pildă, răspunsul copilului Geo. Sor. Așa cum rezultă din protocol, copilul începe prin a trasa segmentul, imprimîndu-i o direcție paralelă cu baza foii. Dar înainte ca reacția să fi fost încheiată copilul își dă singur seama de eroare (ceea ce ni se pare deosebit de important), și, fără alte încercări trasează perpendiculara.

Scanned with OKEN Scanner

La întrebarea experimentatorului, copilul dovedește că posedă noțiunea de perpendiculară. Așadar cele două direcții de rezolvare, cele două modalități de reacție apar aproape în același timp, cu un decalaj doar de cîteva secunde — deși e vorba de atitudini mentale radical deosebite. Asemenea coexistențe ale unor orientări opuse în activitatea psihică noi am mai găsit la copii și cu prilejul rezolvării altor probleme. Noțiunea de perpendiculară, pe care copilul și-a însușit-o, nu a reorganizat de la început ansamblul de date cu care aceasta avea contingențe — ceea ce înseamnă că o astfel de reorganizare nu se realizează spontan numai sub acțiunea legilor logice. Copilul cunoaște noțiunea de perpendiculară și totuși în primul moment el reacționează în baza vechiului sistem de influențe intuitive. Numai după ce conflictul a devenit manifest — în urma unui efort practic de rezolvare — deci numai după o ciocnire efectivă a celor două tendințe mintale — structura conceptuală a perpendicularei ajunge să determine reacția copilului.

Și mai pregnant apare acest conflict la copilul Bun. Ghe. Copilul afirmă că duce perpendiculara — și cu toate acestea trasează o oblică, intermediară între perpendiculară și verticală. Afirmația că va trasa perpendiculara el o face înaintea oricăror tatonări concrete. El nu descoperă perpendiculara din încercările sale, nu descoperă că drumul cel mai scurt, corect trasat, coincide cu perpendiculara. El își dă seama, deci printr-o înlănțuire logică, de faptul că drumul cel mai scurt este perpendiculara. În același timp în planul reacțiilor concrete, acțiunea sa este determinată de jocul forțelor intuitive. Cele două formațiuni mintale coexistă, deși opoziția lor este radicală.

Copilul Geo. Sor. s-a corectat singur, eliminînd una din tendințe în favoarea celeilalte. Copilul Bun. Ghe. nu se corectează, el le acceptă pe amîndouă.

S-ar putea pune problema: poate că Bun. Ghe. a afirmat din întîmplare că e vorba de perpendiculară, dar în fond noțiunea nu-i este cunoscută. Dar acest lucru nu corespunde realității. După ce experimentatorul îi atrage atenția, copilul își recunoaște greșeala și trasează perpendiculara corect.

Avem printre exemplele citate și două cazuri în care copiii afirmă de la început, ca răspuns la problema pusă, că trebuie să ducă perpendiculara — și procedează, fără să ezite, în consecință. Aceasta înseamnă că la copiii respectivi faza de conflict a fost depășită. Răspunsurile greșite și răspunsurile corecte, dar labile, obținute prin tatonări au dispărut, însă nu-

mai după ce structura conceptuală a fost realizată şi destul de bine consolidată pentru a putea anihila diversele influenţe străine domeniului.

★

Interpretarea tabelului nr. 15 ni se pare dificilă.

În primul rînd constatăm prezenţa a trei curbe avînd o alură aproximativ asemănătoare : curba oblicelor (O), curba răspunsurilor afirmative (D) şi curba oblicelor însoţite de răspunsuri afirmative (DO) (fig. 48). De aci rezultă presupunerea că, în dezvoltarea mintală a copilului, aceste răspunsuri au o evoluţie concordantă. Într-adevăr soluţia oblicei concordă cu ideea posibilităţii de a se găsi şi alte drumuri tot atît de scurte (spre deosebire de soluţia perpendicularei).

Totuşi, între aceste curbe există numai o concordanţă în ceea ce priveşte forma. În privinţa mărimii datelor apare o diferenţă pronunţată la fiecare clasă : numai o parte relativ mică dintre copiii care construiesc oblice (O) afirmă posibilitatea de a se găsi şi un alt drum tot atît de scurt ca primul (DO).

Acest lucru se explică în felul următor. Construcţia oblicei este determinată, după cum am văzut, de jocul de influenţe care ia naştere în complexul figural (incluzînd şi elemen-

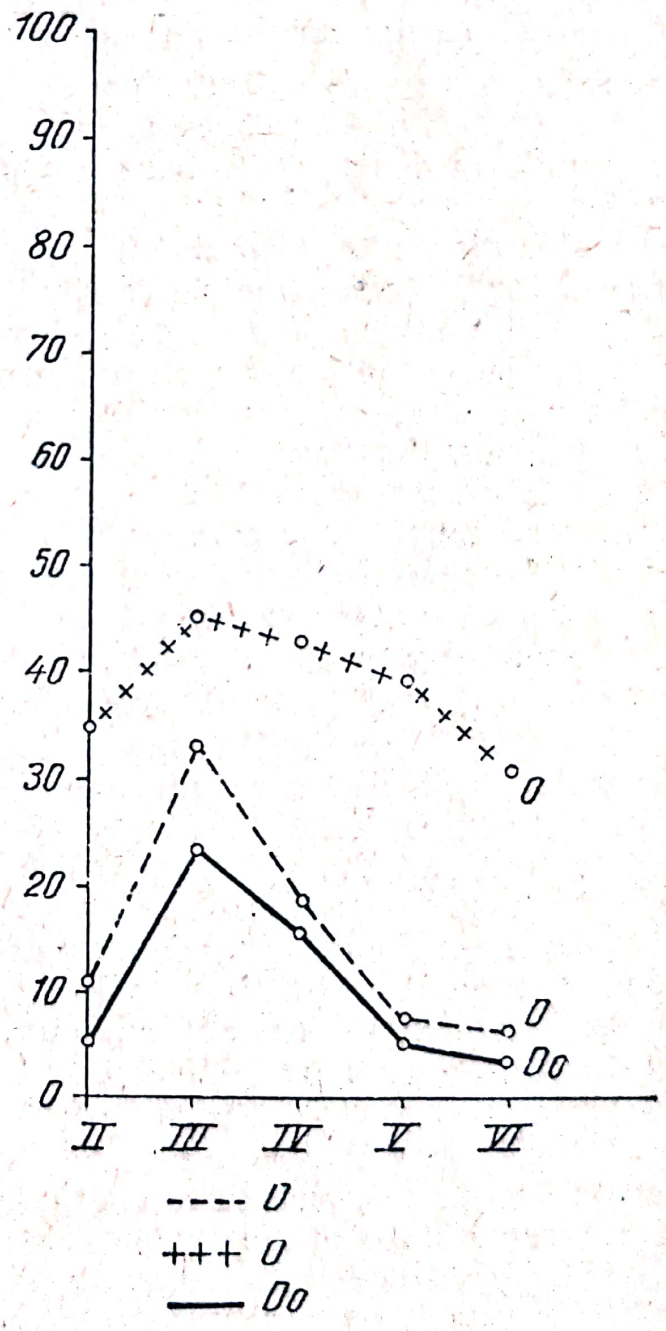


Fig. 48

te noţionale). Abandonarea acestei soluţii are loc treptat, ca urmare a restructurării sistemului logico-intuitiv.

Afirmaţia posibilităţii de a se face un alt drum tot atît de scurt ridică însă şi alte probleme. Pentru a găsi „un alt drum tot atît de scurt" copilul trebuie să dispună de o suficientă mobilitate a reprezentărilor pentru a căuta efectiv, printre oblicele duse între punct şi dreaptă, una de aceeaşi lungime cu prima. Dar în cazul acesta sînt multe şanse ca *a*) fie să-şi dea seama că prima oblică găsită nu este chiar drumul cel mai scurt, *b*) fie să găsească chiar perpendiculara şi să abandoneze prima soluţie. Este deci limpede că nu toţi copiii care au construit o oblică ajung să afirme că pot construi şi un alt drum tot atît de scurt. Dificultăţile ivite pe parcurs îi fac pe unii să renunţe la a mai răspunde la o doua întrebare sau îi fac chiar să răspundă negativ.

Vor răspunde afirmativ în special cei care cu puţine investigaţii vor da peste simetricul primei oblice.

Dar problema de a se găsi cel mai scurt drum de la punct la dreaptă sugerează, chiar, prin forma ei logică, un răspuns negativ la a doua întrebare înaintea unei examinări mai atente.

Intervenţia acestor factori face deci ca numărul copiilor care văd posibilitatea de a mai găsi „şi un alt drum tot atît de scurt" să fie în general mult mai mic decît al celor care construiesc oblice, deşi cum spuneam, curbele respective păstrează în mare aceeaşi alură de-a lungul celor cinci clase cercetate.

Să ne oprim acum asupra răspunsurilor negative.

Evoluţia lor este mai complexă (fig. 49). Pînă la clasa a IV-a curba reprezentativă are o formă asemănătoare cu cea a oblicelor, şi deci şi a răspunsurilor pozitive (cu o maximă, deşi mai puţin accentuată, la clasa a III-a). Începînd din clasa a IV-a curba urmează drumul perpendicularei (continuu crescătoare).

Dacă dintre răspunsurile negative le desprindem pe cele care însoţesc numai construcţia perpendicularei (NP) constatăm un fenomen deosebit de interesant. Curba aceasta urmează la oarecare distanţă curba perpendicularelor. Pe măsură ce ne apropiem de clasele mari (a V-a şi a VI-a) cele două curbe tind să se apropie iar la clasa a VI-a coincid aproape.

Dacă avem în vedere numai acele răspunsuri negative („Alt drum tot atît de scurt nu se poate duce") care însoţesc construcţia perpendicularei constatăm că în general nu toţi copiii care construiesc perpendiculara susţin şi faptul că alt drum tot atît de scurt nu se poate duce. Faptul acesta l-am putea explica în

felul următor: există un decalaj între momentul în care copilul descoperă perpendiculara ca soluție a problemei și momentul în care copilul descoperă unicitatea ei. Și e firesc să fie astfel. Descoperirea perpendicularei, așa cum a rezultat din tot ce am arătat pînă aci are loc în primul rînd ca o descoperire empirică, prin tatonări. E deci plauzibilă ideea că unicitatea perpendicularei devine evidentă numai după ce descoperirea copilului se restructurează într-o formație conceptuală, în care componentele intuitive sînt subordonate. Această explicație concordă perfect cu relațiile dintre cele două curbe. Pe măsură ce copilul avansează în vîrstă cresc mijloacele unei asemenea restructurări. La clasa a VI-a unde copilul învață la geometrie despre noțiunea de perpendiculară caracterul conceptual al soluției se va manifesta, fără îndoială la cei mai mulți copii. Este deci firesc ca decalajul să scadă iar la clasa a VI-a construcția perpendicularei și susținerea unicității soluției respective, să coincidă aproape.

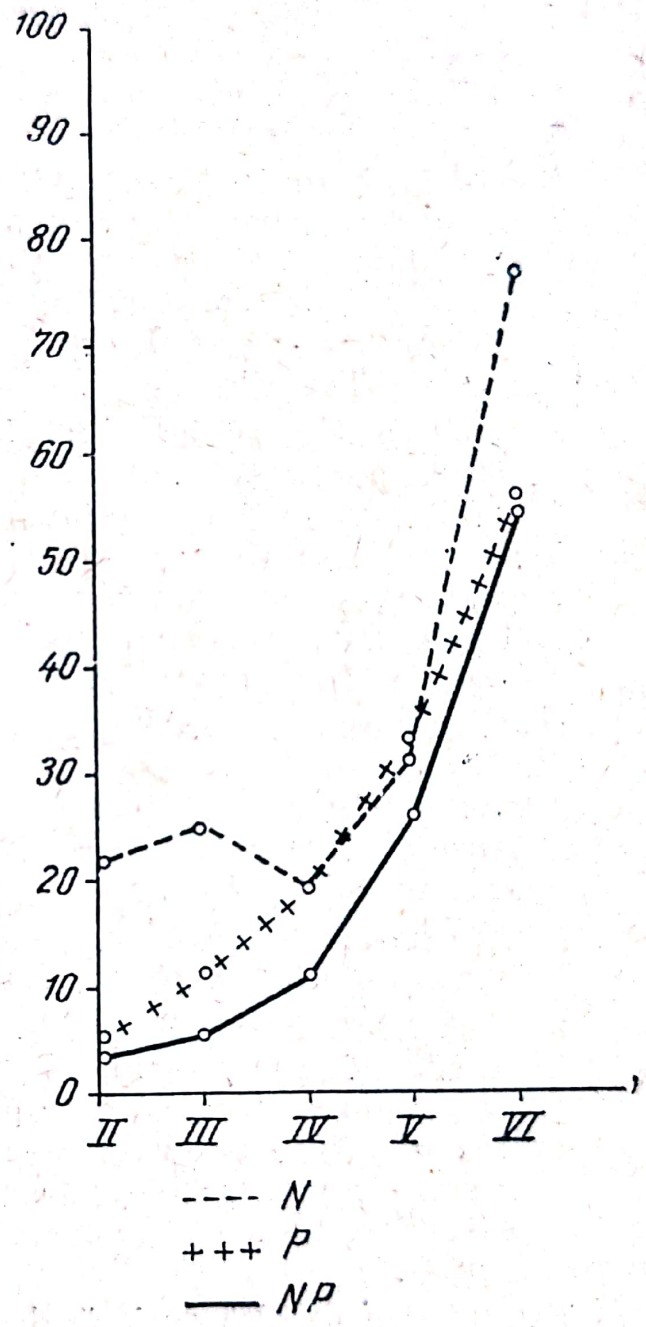


Fig. 49

Aceste considerații sînt în acord și cu un alt aspect. Dacă ne referim la cazurile opuse în care copiii, după ce au construit perpendiculara susțin și posibilitatea unei alte rezolvări echi-

valente (DP) constatăm că acestea sînt foarte rare. (Numai în clasa a III-a există trei copii care se comportă astfel. În clasele a II-a şi a V-a nici un copil, în clasele a IV-a şi a VI-a numai cîte un singur copil). Relaţia dintre construcţia perpendicularei şi negarea posibilităţii unei alte construcţii echivalente este la copiii respectivi expresia unei construcţii mintale active, conştiente. Diferenţele dintre curbe marchează timpul necesar desăvîrşirii acestei construcţii.

Există însă un fapt care pare să vină în contradicţie cu raţionamentul nostru şi care nu poate fi neglijat. E vorba de faptul că răspunsurile negative în ansamblu depăşesc la o parte din clasele cercetate, construcţiile de perpendiculare şi la toate clasele volumul construcţiilor de perpendiculare însoţite de negarea pluralităţii soluţiei .

Dacă această ierarhie a curbelor ar marca etape deosebite în rezolvarea problemei ar trebui ca aceste etape să fie următoarele : *a*) Elevul susţine unicitatea soluţiei, *b*) Construieşte perpendiculara, *c*) Consideră perpendiculara ca fiind unica soluţie. O asemenea succesiune e greu de admis. E puţin probabil ca un copil să deducă construcţia perpendicularei din ideea unicităţii soluţiei ivită mai devreme.

Dacă examinăm din nou curbele din figură remarcăm faptul că există o discordanţă, pînă la clasa a IV-a, între evoluţia răspunsurilor negative în ansamblu şi evoluţia construcţiei perpendicularelor — ceea ce reprezintă încă un argument împotriva succesiunii de mai sus.

Pentru lămurirea problemei mai rămîne să examinăm evoluţia răspunsurilor în care construcţia de oblice este însoţită de negarea posibilităţii unor construcţii echivalente (NO).

Dacă succesiunea presupusă mai sus ar fi fost reală, ar fi trebuit ca volumul răspunsurilor de tipul NO să scadă treptat pe măsură ce creşte volumul răspunsurilor NP. Or nici acest lucru nu se întîmplă. Curba NO scade într-adevăr pînă la clasa a IV-a, dar începe apoi să crească din nou, întrecînd chiar nivelul iniţial.

Din acestea rezultă deci că, deşi curba N (negarea posibilităţii unor construcţii echivalente) are valori superioare curbei NP, nu rezultă totuşi că descoperirea perpendicularei decurge logic, la toate nivelurile din descoperirea unicităţii soluţiei.

După părerea noastră toate datele obţinute se lămuresc dacă admitem următoarea ipoteză.

Scanned with OKEN Scanner

Există cel puțin trei izvoare, trei motivații distincte ale propoziției „Nu mai putem găsi un alt drum tot atît de scurt". Sau altfel spus: deși semnificația este totdeauna aceeași, această propoziție poate avea trei sensuri distincte (așa cum rezultă, de altfel, și din paginile precedente):

a) Copilul construiește o oblică și afirmă că altă construcție echivalentă nu mai este posibilă. Cauza acestei afirmații rezidă în sărăcia mijloacelor logico-intuitive. Oblica, o dată dusă, focalizează atenția și apare ca o soluție suficientă.

Copilul, fie că nu mai caută altă soluție, fie că o caută dar nu găsește oblica simetrică (ceea ce ar constitui soluția echivalentă), fie că o găsește dar n-o admite ca o soluție datorită orientării ei deosebite. În toate aceste cazuri rolul determinant îl joacă structura imaginii intuitive.

b) Copilul construiește oblica și, ca mai sus, neagă posibilitatea unei alte soluții echivalente. Dar negația nu este determinată de complexul figural (și respectiv de sărăcia procedeelor logice — incapabile să-l domine). Ea este sugerată nemijlocit de natura însăși a problemei puse: „Să se găsească drumul cel mai scurt de la un punct la o dreaptă". Independent de modul de rezolvare, faptul că se cere o soluție extremă „cel mai", împinge parcă gîndirea spre ideea unei soluții unice.

În ambele cazuri menționate mai sus negația însoțește construcția unor oblice. În nici un fel, ea nu-l apropie pe copil de descoperirea perpendicularei.

c) Copilul construiește perpendiculara. În cazul în care perpendiculara este rezultatul unei elaborări conceptuale ea trebuie să ducă la ideea unicității soluției, care o întregește.

Este evident că, deși semnificația obiectivă a negației este aceeași, avem de-a face, de fapt, cu *sensuri* cu totul deosebite exprimînd orientări mintale deosebite și — ceea ce este foarte important pentru interpretarea datelor obținute de noi — etape deosebite în dezvoltarea mintală a copilului.

La toate acestea trebuie adăugată și posibilitatea ca un copil să-și propună — în conformitate cu cunoștințele sale — să construiască perpendiculara și totuși, trasarea efectivă a liniei să fie influențată și modificată de contextul figural. Asemenea cazuri conflictuale am întîlnit în experimentele individuale și în cîteva răspunsuri din cadrul experimentelor colective la clasa a VI-a.

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere aceste modificări de sens ale propoziţiei „Nu se mai poate găsi nici un alt drum tot atît de scurt ca primul“ curbele obţinute sînt uşor de explicat.

În primul rînd este firesc ca această negaţie să apară mai frecvent decît construcţia perpendicularei pentru simplul motiv că ea nu decurge numai din construcţia perpendicularei ca o consecinţă logică a acesteia. Negaţia poate fi, cu alt sens însă, cu altă motivaţie, şi anterioară descoperirii perpendicularei.

Dacă ne referim numai la curba răspunsurilor NO, lucrurile devin de asemenea limpezi.

La elevii mai mici este vorba în primul rînd de sărăcia mijloacelor logico-intuitive care îi determină să susţină că „alt drum tot atît de scurt nu se poate găsi“.

Pe măsură ce copilul înaintează în vîrstă el descoperă faptul că soluţia găsită — e vorba de oblică — nu este unică şi că mai poate fi găsită cel puţin una echivalentă. Faptul acesta duce la o scădere a răspunsurilor de tipul NO. Ulterior, în clasele V şi VI intervin alţi factori care determină o nouă creştere a frecvenţei acestor răspunsuri. În primul rînd, dezvoltarea gîndirii logice a copilului măreşte şansele unei influenţe directe pe cale logică, a structurii primei întrebări („Să se găsească drumul cel mai scurt...“ etc.). În al doilea rînd, apar mai frecvent cazurile conflictuale (mai ales în clasa a VI-a) în care copilul construieşte o oblică dar gîndindu-se la perpendiculară răspunde cu *nu* la a doua întrebare.

Pentru a obţine o imagine mai completă a acestor fenomene foarte complexe am întocmit tabela 16 în care este prezentată repartiţia răspunsurilor constînd în construcţii de oblice : *a*) după felul oblicelor construite şi *b*) după natura răspunsului la a doua întrebare („Se mai poate găsi şi un alt drum tot atît de scurt?“).

Această tabelă ne arată următoarele :

1) Procentele construcţiilor în care apar mai multe oblice (tipurile d, e, f, h), cresc la clasele III şi IV, încep să scadă la clasa a V-a şi se reduc foarte mult la clasa a VI-a. Aceasta confirmă cele susţinute de noi mai sus privitor la faptul că soluţiile plurale denotă într-adevăr un progres al mijloacelor logico-intuitive. Este evident că evoluţia acestor răspunsuri va fi inversă în raport cu evoluţia răspunsurilor de tipul NO (negarea posibilităţii de a se găsi soluţii echivalente cu prima).

Scanned with OKEN Scanner

Tabela nr. 16

		II	%	III	%	IV	%	V	%	VI	%
a	D	1		3		3		—		—	
	N	13		6		4		—		15	
	F	8		2		3		3		2	
	T	22	22	11	10,4	10	9,4	3	3,8	17	14,5
b	D	—		—		3		1		—	
	N	—		—		—		2		3	
	F	1		2		3		1		—	
	T	1	1	2	1,9	6	5,7	4	5,0	3	2,5
c	D	—		3		—		—		—	
	N	2		3		2		1		—	
	F	1		3		2		1		—	
	T	3	3	9	8,6	4	3,8	2	2,5	—	
d	D	3		4		3		1		1	
	N	—		1		—		—		—	
	F	1		3		9		4		1	
	T	4	4	13	12,3	12	11,3	5	6,2	2	1,7
e	D	1		6		5		2		—	
	N	—		1		1		—		—	
	F	—		2		3		5		1	
	T	1	1	9	8,6	9	8,5	7	8,7	1	0,8
f	D	—		—		—		—		2	
	N	—		—		—		1		—	
	F	—		—		1		—		—	
	T	—	—	—		1	0,9	1	1,3	2	1,7
g	D	—		—		2		—		1	
	N	1		5		2		2		6	
	F	1		3		1		1		1	
	T	2	2	8	7,6	5	4,7	3	3,8	8	6,7
h	D	1		1		—		—		1	
	N	—		—		—		1		—	
	F	—		1		7		2		—	
	T	1	1	2	1,9	7	6,6	3	3,7	1	0,8
i	D	—		3		1		—		—	
	N	1		1		1		3		3	
	F	1		—		1		1		—	
	T	2	2	4	3,8	3	2,8	4	5,0	3	2,5
T	D	6	6	25	23,8	17	16,0	4	5,0	5	4,2
	N	17	17	17	16,2	10	9,4	10	12,5	27	22,7
	F	13	13	16	15,1	30	28,3	18	22,5	5	4,1
	T_G	36	36	58	55,1	57	53,7	32	40,0	37	31,0

Scanned with OKEN Scanner

2) Într-adevăr aceste soluţii plurale sînt însoţite de afirmarea posibilităţii de a se găsi mai multe soluţii echivalente (D) sau nu antrenează nici un răspuns la a doua întrebare (F).

3) Răspunsuri negative apar mai ales la trei tipuri de oblice singulare: a, g, i, — aceasta în special la clasele V şi VI. După orientarea acestor oblice putem presupune că e vorba aci, în afară de cazurile net conflictuale, despre care am vorbit mai sus şi de un fenomen de perspectivă. Copilul pare să reprezinte în plan, o perpendiculară imaginată în spaţiu (vezi mai ales tipul g).

Concluzii parţiale

Problema perpendicularei, în forma în care am pus-o noi („Drumul cel mai scurt de la un punct la o dreaptă") — are meritul de a ne permite să urmărim constituirea unui concept figural de la nivelul pre-geometric al unei conduite practice, trecînd prin nivelul intermediar al rezolvării în planul reprezentărilor (şi al unei logici implicite) şi ajungînd pînă la rezolvarea geometrico-deductivă.

Dacă ne referim la răspunsurile subiecţilor aşa cum apar în cercetările colective şi unde e vorba numai de problema prezentată grafic, constatăm o ameliorare progresivă a procentelor, curba înregistrînd creşteri de circa 70%, de la o clasă la alta.

Evoluţia soluţiilor corecte exprimă progresul general al mijloacelor logico-intuitive ale copilului. Datele statistice ne arată, de asemenea, că majoritatea copiilor, după un stadiu de dezorientare (absenţa răspunsurilor) trec printr-un stadiu de rezolvare eronată prin oblice, înainte de a ajunge la soluţia perpendicularei.

Oblicele utilizate de copii exprimă diversitatea influenţelor care acţionează în cîmpul logico-intuitiv al investigaţiei lor.

Spunem cîmp logico-intuitiv şi nu cîmp perceptiv pentru că, aşa cum rezultă din aceste date — şi din cele ce vor fi expuse în paginile următoare — cîmpul cognitiv apare, în aceste situaţii ca o structură organizată în a cărei dinamică forţele figurale şi cele de ordin logic se intrică într-o unitate mobilă, vie, exprimînd însăşi tendinţa către o reflectare activă, în continuu progres, a datelor obiective de către subiect.

În opoziţie cu tezele psihologiei gestaltiste, care pornesc de la ideea existenţei unor structuri preformate, guvernate de

Scanned with OKEN Scanner

legi transcendentale, rezultatele noastre subliniază conţinutul obiectiv şi obiectual al imaginilor noastre, caracterul evolutiv şi perfectibil al acestor imagini ca şi al dinamicii lor interne. Aceasta nu este o dinamică formală (simple jocuri de forme), ca în psihologia Gestalt-ului — ci o dinamică dialectică, concretă, în care componentele intuitive şi cele conceptuale tind activ, pe baza practicii, să reflecte cît mai fidel realitatea obiectivă.

Rezultatele statistice arată de asemenea faptul că ideea unicităţii soluţiei (ne referim la soluţia corectă, prin perpendiculară) nu apare decît după ce soluţia corectă a fost găsită.

Rezultatele obţinute în experimentele individuale ne permit o analiză mai amănunţită a procesului elaborării acestor răspunsuri.

În primul rînd, faptul demn de reţinut al existenţei unui decalaj apreciabil între cele trei modalităţi de rezolvare: practic, logico-intuitiv şi conceptual-deductiv.

Aproape toţi copiii, în limitele de vîrstă cercetate, rezolvă spontan problema găsirii celui mai scurt drum de la un punct la o dreaptă în cazul cînd rezolvarea constă într-o deplasare efectivă a subiectului de la punct la linie. Dar aceiaşi copii, puşi să rezolve problema printr-o acţiune mintală (al cărei rezultat se concretizează grafic) nu ajung decît treptat la perpendiculară, trecînd întîi prin stadiul rezolvării cu oblice şi recurgînd, în continuare, la tatonări succesive.

Chiar în cazul în care problema are forma practică (în sensul că se trasează o „apă curgătoare“ pe pămînt etc.) dar copilul nu este situat în punctul din care trebuie dus „drumul cel mai scurt“, găsirea soluţiei prezintă aceleaşi dificultăţi ca şi atunci cînd e dată, grafic, pe tablă sau pe caiet. Rezolvarea dintr-odată, fără tatonări apare în special la elevii din clasa a VI-a după ce noţiunea de perpendiculară a fost însuşită.

Pentru problema cercetată de noi este interesantă tocmai structura acestei formaţii mixte concepto-figurale, apărută înainte de constituirea conceptului figural propriu-zis, în baza activităţii cognitive investigatoare logico-intuitive, a copilului.

Aşa cum am constatat şi în formarea altor entităţi mintale geometrice, această formaţie se caracterizează, în primul rînd, prin labilitatea ei, prin instabilitatea structurii sale interne. Chiar după ce copilul a găsit, într-o împrejurare anumită, soluţia corectă — perpendiculara — această formaţie plasată în alt context figural suferă influenţele acestuia. Componenta intuitivă se desprinde de sub controlul structurii conceptuale, for-

Scanned with OKEN Scanner

maţia se dezagregă şi copilul trasează segmentul sub influenţa forţelor născute în ansamblul cîmpului perceptiv — segment paralel cu baza foii, segment perpendicular cu baza foii, segment dirijat spre una din extremităţile segmentului de dreaptă sau o soluţie intermediară.

Extrem de interesant este faptul că chiar după constituirea conceptului figural (prin însuşirea noţiunii geometrice de perpendiculară) istoria fenomenului nu se încheie.

Chiar în această situaţie — şi tocmai pentru că conceptul figural nu se naşte dintr-odată ci ca rezultat al evoluţiei descrise — formaţia respectivă mai păstrează încă, un timp, labilitatea structurilor pre-geometrice. Componenta intuitivă mai intră uneori în rezonanţă, chiar în această situaţie, cu complexul figural şi reacţia copilului este dictată de acesta din urmă. Numai după ce reacţia greşită a apărut efectiv intervine şi controlul conceptual iar copilul îşi corectează greşeala. Regăsim, astfel, într-o problemă cu totul deosebită, etapele descrise în paginile precedente (vezi cap. XIV).

Trebuie totuşi să subliniem faptul că în acest caz conflictul nu este intern ca în problema naturii punctului şi dreptei. Aşa cum am arătat, atît prin prizma orientării concrete cît şi conceptual soluţia este unică — perpendiculara. Numai aşa se explică progresul continuu de la o clasă la alta, independent de influenţa directă a cunoştinţelor geometrice. Conflictul apare numai sub influenţa unor forţe externe entităţii mintale respective.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XXI-lea

LOCUL GEOMETRIC (MEDIATOAREA)

Una dintre noţiunile fundamentale ale geometriei este aceea de loc geometric. Totalitatea punctelor care posedă o anumită proprietate comună formează, după cum se ştie, un loc geometric. Această noţiune este esenţială şi din punctul de vedere psihologic din care noi privim problema, cel al conceptelor figurale. Structura conceptuală a figurii se exprimă mai ales în legea ei de construcţie, în proprietatea comună a punctelor ei. A depăşi nivelul perceptiv în înţelegerea unor figuri cum sînt, de pildă, cercul, elipsa etc., pentru a ajunge la cel geometric, înseamnă tocmai a înţelege faptul că elementele figurii sînt strict determinate de o lege comună. Structura intuitivă nu este, prin aceasta, pierdută: ceea ce se naşte din asamblarea tuturor punctelor care posedă proprietatea comună este fără îndoială o figură, o imagine caracterizată sub raport intuitiv, de o anumită formă specifică.

În acelaşi timp însă, forma are un echivalent conceptual exprimat în însăşi proprietatea comună, generală, a punctelor figurii.

Din punct de vedere psihologic, problema care interesează in mod special în această direcţie, este aceea a etapelor prin care se realizează trecerea de la proprietatea, considerată ca singulară sau particulară — corespunzînd numai unui punct sau cîtorva puncte izolate — la conceptul figural, la ideea generalizării proprietăţii pentru un număr infinit de puncte integrabile într-o figură cu formă caracteristică.

În cercetările noastre ne-am ocupat în special de mediatoarea segmentului: locul punctelor situate la aceeaşi distanţă de două puncte date.

Scanned with OKEN Scanner

Chiar din primele cercetări individuale a rezultat faptul că prezentarea problemei într-o formă narativă facilitează mult înțelegerea sensului ei. De aceea vom prezenta separat rezultatele obținute pe această cale și cele obținute în experimentele colective (unde am utilizat o formulare grafico-geometrică).

Experimente individuale

Sto. Ghe. (grădiniță, 6 ani). Formulare narativă :

„Doi copii aruncă bile în aceeași gropiță. Să facem gropița la aceeași depărtare de cei doi copii, ca să nu se certe (gropițele sînt reprezentate pe foaie prin punctele A și B)".

Fig. 50 (a)

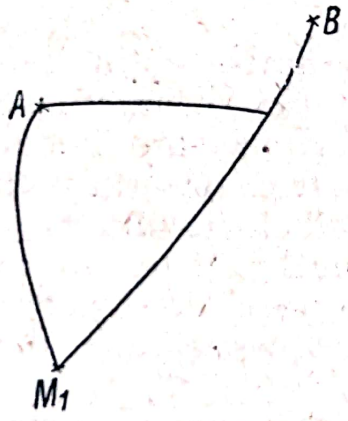


Fig. 50 (b)

Subiectul face punctul (M) în poziția arătată în fig. 50 a. Exp. atrage atenția că M e mai aproape de B și că deci nu e satisfăcută cerința.

Exp. face din nou două puncte, A, B.

Copilul plasează punctul M_1 ca în fig. 50 b și trasează liniile care se văd. După mai multe încercări, fără succes, se renunță.

Ili. Lui. (grădinița 6, 8).

Formularea narativă, a problemei. Copilul face punctul (1) (fig. 51)

Exp. De ce ai făcut gropița aici ?

Sub. (Nu răspunde).

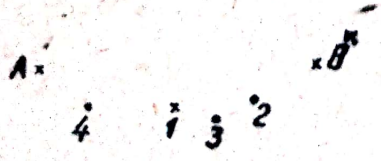


Fig. 51

Exp. Pentru ca să fie la aceeași depărtare. Mai fă un punct care să fie la aceeași depărtare de acestea două (A și B).

Sub. (desenează 2).

Exp. (Explică din nou).

Sub. (Desenează 3, 4).

Pen. Jen. (cl. I, 8, 1). După explicație copilul face imediat punctul (1) fig. 52.

Exp. Mai fă o gropiță așa ca să fie la aceeași depărtare de cei doi copii.

Sub. (Pare să nu înțeleagă).

Exp. (Acoperă primul punct cu o hîrtie și repetă cerința).

Sub. (Desenează (2) care e ceva mai aproape de A).

Exp. Nu este exact la aceeași depărtare de cei doi copii.

Sub. (desenează (3) mai bine plasat pe care-l lipește de (2)).

Exp. Mai fă încă patru puncte.

Sub. (Desenează corect).

Exp. Mai fă și altele, între ele.

Sub. (Mai face o serie de puncte).

Exp. Toate gropițele astea cum sînt așezate ?

Sub. În rînd.

Exp. (face punctul M). Uite, punctul acesta e bine așezat ?

Sub. Nu. E afară de gropițele astea, trebuie să fie în rînd.

Exp. Și ce e dacă nu e în rînd ?

Sub. (Nu răspunde).

Exp. De cine e mai aproape ?

Sub. De punctul acesta (B).

Exp. Dar punctul acesta (4) de cine e mai aproape ?

Sub. De nici unul.

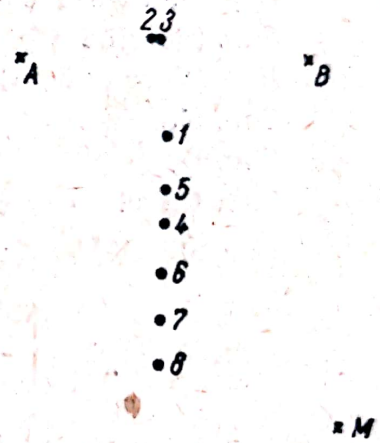


Fig. 52

Buc. Aug. (cl. a II-a, 8, 9). Formularea abstractă. Copilul face un punct în dreapta lui B. Formularea narativă. Subiectul plasează punctul corect ceva mai jos de linia AB. I se cere să găsească și alte puncte. Le face din nou în dreapta lui B. Nu se poate obține mai mult.

Bur. Vas. (clasa a II-a, 8, 6). Formulare abstractă. Copilul nu înțelege. Exp. face, ca model, punctul (1) ceva mai jos de linia AB și îi cere copilului să facă și el un alt punct dar nu obține nici un rezultat.

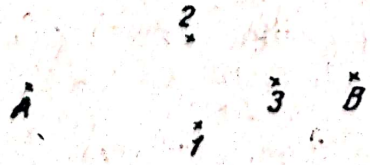


Fig. 53

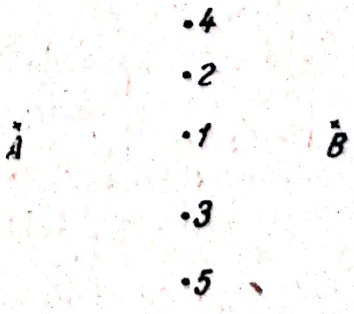


Fig. 54

Exp. face și punctul (2) ceva mai sus de linia AB. Copilul face punctul 3 aproape de B (fig. 53). Deci, nici după cele două exemple, copilul n-a înțeles problema.

Formulare narativă (fig. 54). Copilul face imediat punctul (1). Experimentatorul îi cere în continuare alte puncte și copilul le face pe rînd, în ordinea indicată pînă la (4).

Exp. (acoperă cu cîte o foaie de hîrtie A și B). Acum nu se mai văd copiii. Ai putea să mai faci și o altă gropiță ?

Sub. (face imediat punctul (5)).

Exp. De ce ai făcut acolo ?

Sub. (Se gîndește, nu răspunde).

Exp. (Face punctul M ca în figura 52). Dar aici ar fi bine ?

Sub. Nu.

Exp. De ce ?

Sub. Ca să nu se certe.

Fer. Con. (clasa a II-a). (formulare abstractă).

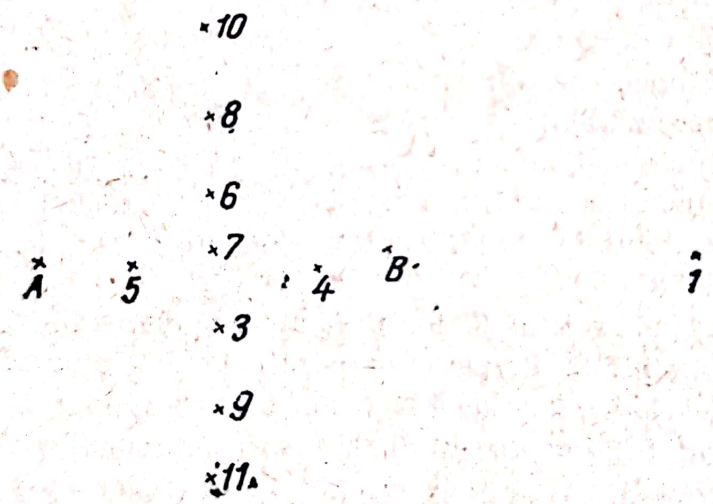


Fig. 55

Sub. Cum adică ?

Exp. (Repetă explicația).

Sub. (face punctul 1, la dreapta lui B la o distanță egală cu AB) (fig. 55).

Exp. Punctul (1) e la aceeași depărtare de A și de B ?

Sub. (Privește, apoi face punctul 2 și mai la dreapta).

Formulare narativă.

Sub. Trebuie făcută la mijloc (Face punctul 3).

Exp. Mai fă și altele.

Sub. (Face 4 şi 5). Cîte una pentru fiecare copil.

Exp. Nu, o singură gropiţă, nu uita.

Sub. (Se gîndeşte. Apoi face p. 6).

Exp. Şi altele ?

Sub.(Face, pe rînd, 7, 8, 9, 10).

Exp. Şi cîte poţi să pui aşa ?

Sub. Cît este cîmpul.

Exp. Cum se înşiră punctele astea ?

Sub. În linie dreaptă.

Exp. (Acoperă cu foi de hîrtie A şi B). Acum nu se mai văd copiii, poţi să mai faci o gropiţă ?

Sub. (Face p. 11).

Exp. De unde ştii că putem face aici gropiţa ?

Sub. Pentru că este în linie dreaptă.

Car. Gab. (clasa a III-a, 9 ani). Formulare abstractă. Copilul face punctul în dreapta, în afara intervalului AB.

Exp. repetă explicaţia, dar fără rezultat.

Formulare narativă.

Sub. (fără să ezite) La mijloc ! (Face punctul la mijloc pe linia AB).

Exp. De ce faci gropiţa la mijloc ?

Sub. Aşa trebuie !

Exp. De ce ?

Sub. Înseamnă că altfel n-ar cădea bilele în groapă.

Exp. (Precizează din nou cerinţa distanţei egale). Atunci să mai faci o gropiţă.

Sub. (Face incorect, lîngă B).

Exp. Aşa s-ar certa copiii, nu e bine.

Sub. (Face corect un punct).

Exp. Dar în altă parte mai poţi să faci ?

Sub. (Mai face cîteva puncte corect). Toate sînt în şir !

Exp. Ce formă are şiragul pe care-l formează gropiţele ?

Sub. E lung.

Exp. E strîmb, e drept, e rotund ?

Sub. Drept. Strîmb nu e.

Kre. Pau. (clasa a III-a, 9, 6). Exp. (Formulare abstractă).

Sub. (Se gîndeşte puţin şi face p. (1) (fig. 56)). (Aşadar nu mai este necesară formularea narativă !)

Exp. (Îi cere să continue).

Sub. (Face p. 2, 3) se opreşte şi nu mai ştie unde să facă. Apoi p. 4, 5). Aşadar, regula s-a pierdut.

Exp. (Îi atrage atenţia că 4, 5 nu sînt bine plasate).

Sub. (Face 6).

Scanned with OKEN Scanner

Exp. Dar aici (M_1) ar fi bine dacă ai face punctul ?
Sub. Nu... Ba da... Se poate...
Exp. Uită-te la șirul de puncte pe care l-ai făcut. Ce observi ?
Sub. Observ că toate sînt în aceeași linie.
Exp. Ce fel de linie ?
Sub. Dreaptă.

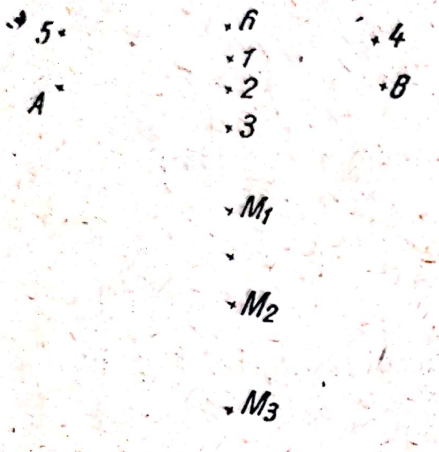


Fig. 56

Exp. Dacă ți-aș spune să mai faci și alte puncte care să fie la fel depărtate de cele două puncte unde le-ai face ? Unde crezi că ar trebui să fie așezate ?

Sub. Tot în linie dreaptă. Tot în același rînd cu punctele.

Exp. Dar dacă un punct e în afara liniei ?

Sub. N-ar fi bine. Dacă fac punctul aici (la dreapta mediatoarei), distanța nu mai este egală.

Exp. Orice punct de pe linia asta ar fi la aceeași depărtare de cele două puncte ?
Exp. De ce ?
Sub. Nu.
Sub. Nu putem merge în linie dreaptă (?!)
Exp. Punctul acesta (M_2) e bine așezat ?
Sub. Da, e bine.
Exp. Dar acesta (M_3) ?
Sub. Nu, pentru că este prea departe.
Exp. Și ce este dacă e prea departe ?
Sub. (Nu răspunde).
Exp. (Arată că distanțele M_3A și M_3B sînt egale).
Sub. Da, distanțele sînt egale.
Exp. Dar adineauri ce spuneai ?
Sub. Credeam că mergem așa și că nu mai putem afla distanța (trage o linie oblică).
Exp. Unde ar trebui să fie așezat un punct ca să știu că e la aceeași depărtare de cele două puncte ?
Sub. Oriunde pe linia asta. Numai pe linia asta.

★

Din aceste exemple rezultă următoarele.

1. Pînă la clasa a III-a nu se pot obține decît cu rare excepții, răspunsuri corecte la problema echidistanței formulată

abstract. După cum s-a văzut la Buc. Aug. (clasa a II-a) chiar după ce s-au oferit două puncte ca model, copilul nu a înțeles problema.

În cazul formulării narative însă obținem ca răspuns un punct chiar la unii copii de grădiniță (6—7 ani). La copii din clasele I, II, III (8—9 ani) se obțin, cu unele ezitări, șiruri de puncte corecte. Apare și ideea dreptei pe care aceste puncte se înșiră. Între aceste vîrste (8—9 ani) copiii izbutesc, pe baza imaginii concret-intuitive obținute, să degajeze o regulă de construcție sub forma rîndului, a liniei, a liniei drepte. În clasa a III-a copiii devin conștienți chiar de faptul că toate punctele care satisfac cerința se află pe dreapta respectivă.

Din observarea unor cazuri (dintre care n-am citat decît pe cel al lui Ili. Lui. (grădiniță) dar de genul cărora apar și la copiii din clasele I și II, am constatat că trecerea de la un punct la mai multe puncte reprezintă o dificultate, reprezintă un moment de salt.

În clasa a III-a apar și copii care rezolvă problema în formularea abstractă.

Dar ceea ce nu apare nici la copiii din această clasă este ideea locului ca linie, ca figură geometrică. Copiii ajung la ideea punctelor care se înșiră în linie dreaptă. Unii ajung chiar (de ex. Kre. Pau.) la ideea că orice punct care satisface cerința trebuie să se afle pe dreapta respectivă. Dar nu am găsit copii care să formuleze explicit ideea că toate punctele care satisfac regula echidistanței formează o linie dreaptă.

Așadar din aceste observații putem desprinde următoarele etape ale rezolvării problemei punctelor echidistante față de două puncte date în cazul formulării narative.

a) Copilul nu înțelege problema.

b) Copilul găsește un punct echidistant de cele două puncte date.

c) Copilul găsește un șir de puncte echidistante (căutînd separat fiecare punct).

d) Copilul explicitează regula de găsire a punctelor și deci degajează ideea dreptei. (O primă treaptă de generalizare).

e) Copilul dobîndește conștiința faptului că nici un punct aflat în afara dreptei nu satisface cerința. Această evoluție, după înțelegerea echidistanței are loc cu aproximație, între 6 și 9 ani, fără să putem stabili delimitări precise în raport cu vîrsta.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele obținute de J. Piaget [1]. Aceeași problemă a fost studiată de Piaget și colaboratorii săi care au folosit următoarele tehnici, reprezentînd modalități concrete de formulare (ceea ce noi am numit mai sus „formulare narativă"): 1) Doi copii se află în A și B. Unde trebuie plasat un anumit obiect (o agată) pentru ca să se afle la aceeași distanță de cei doi copii? 2) Doi copaci sînt plantați în A și B. Unde trebuie să stai ca să fi la aceeași depărtate de cei doi copaci? 3) În cazul copiilor mai mici, subiectul este separat de examinator prin lărgimea mesei: i se dau cîteva bile și i se cere să le așeze la aceeași distanță de amîndoi.

Se obțin următoarele stadii:

Stadiul I. Pînă către 5 ani copiii nu înțeleg noțiunea de echidistanță.

Stadiul II. Între 5 și 7 ani. (II A). Copiii înțeleg noțiunea de echidistanță dar este admisă numai pentru mijloc. O prima extensiune (care însă nu este încă o generalizare) constă în a considera că mijlocul comportă mai multe amplasamente (absența noțiunii de punct).

La un nivel mai înalt mai multe bile sînt plasate corect.

II B. Progresul este în special pe linia generalizării: puncte plasate simetric de o parte și de alta a mijlocului, puncte plasate în continuarea șirului, intercalări de puncte.

Stadiul III. (Începînd de la 7 ani) Construcția operatorie directă a locului. Subiecții pornesc imediat de la presupunerea că este posibil să se generalizeze raportul de echidistanță. Din exemplele citate de Piaget, rezultă că de fapt, reacția copilului constă în aceea că după primele puncte puse la cererea experimentatorului, subiectul începe să plaseze spontan o serie de puncte. La copiii mai mari apare chiar și ideea liniei drepte pe care se aranjează punctele.

Așadar, în linii mari rezultatele obținute de noi concordă cu cele apărute în cercetările lui Piaget în sensul că se constată aceleași etape. Piaget însă consideră evoluția terminată (deci ideea de „loc geometric" dobîndită), atunci cînd copilul devine conștient de faptul că punctele se înșiră în linie dreaptă.

După părerea noastră însă, trebuie să considerăm că ideea locului este dobîndită numai după ce copilul devine conștient de faptul că punctele respective formează de fapt o figură unitară, o figură geometrică. Or, din datele noastre ca și din cele ale lui Piaget rezultă faptul că această idee reprezintă o achiziție distinctă, o etapă superioară.

---

[1] J. Piaget, M. Inhelder, A. Szeminska, *La géometrie spontanée...*, cap. IX, p. 272—291.

Afirmaţia copilului : „se formează o linie“ (sau „o linie dreaptă“) nu este o dovadă sigură că el se referă la faptul că punctele respective se unesc într-o linie geometrică. Aceasta rezultă foarte bine din cazurile cînd copilul, după ce face această afirmaţie continuă să deseneze puncte separate. Linia dreaptă poate să nu reprezinte decît direcţia pe care se înşiră punctele. Pentru a ajunge la ideea locului în sens geometric este necesar ca copilul să fi ajuns la ideile de punct, linie, dreaptă, în sens geometric. „Pietricelele“ şi „gropiţele“ înşirate între A şi B, cît timp rămîn „pietricele“ şi „gropiţe“ nu se pot unifica într-o linie propriu-zisă — continuă, monodimensională, astfel încît toate punctele ei să fie echivalente sub raportul regulei date.

Cercetări colective

În cercetările colective, am folosit numai formularea abstractă. În felul acesta avem posibilitatea să confruntăm rezultatele obţinute pe cele două căi.

Rezultatele statistice sînt redate în tabelul nr. 17.

După cum era de aşteptat, avînd în vedere cercetările individuale, la copiii claselor II şi III obţinem un mare număr de

Tabela nr. 17

		II	III	IV	V	VI
Grafic	1. Soluţii greşite	49,0	60,8	34,8	15,0	10,9
	2. Unele puncte plasate corect, altele greşit	14,0	9,6	11,3	5,0	6,7
	3. Soluţii corecte: un punct	3,0	2,9	11,3	18,8	10,1
	4. Soluţii corecte: 2,3 puncte	3,0	5,7	12,3	18,7	9,3
	5. Soluţii corecte: peste 3 puncte	3,0	5,7	7,5	12,5	10,1
	6. Construcţia mediatoarei	—	—	—	1,2	3,4
Verbal	7. „Mediatoarea” (cu sau fără construcţie)	—	—	—	—	30,2
	8. „Perpendiculara”	—	—	—	—	3,3
	9. „În linie dreaptă”	—	—	—	—	1,7
	10. „O infinitate de puncte”	—	—	—	2,5	1,7
	11. „Şi alte puncte”	—	—	—	2,5	1,7
	12. „Nu se poate”	—	—	—	—	2,5
	13. Nu răspund	28,0	15,3	22,8	23,8	8,4

Scanned with OKEN Scanner

răspunsuri de la început greşite — rezultatul faptului că aceşti copii nu înţeleg echidistanţa formulată abstract.

Clasa a IV-a reprezintă un moment de cumpănă: numărul copiilor care dau răspunsuri greşite este apropiat de al celor care dau răspunsuri corecte. Începînd abia din clasa a V-a începe să predomine numărul copiilor care dau răspunsuri corecte. Dar nici în această clasă nu există încă decît un număr infim de copii care să ajungă la ideea locului, adică să ajungă în mod independent să construiască dreapta perpendiculară pe mijlocul lui AB. Un copil din clasa a V-a construieşte mediatoarea şi alţi doi răspund „o infinitate".

Abia în clasa a VI-a în legătură, evident, cu cunoştinţele de geometrie, apare această idee la un număr apreciabil de copii — la mulţi chiar în formularea corectă geometrică (mediatoarea segmentului).

Trebuie să remarcăm faptul că şi în cazul acestei probleme — a punctelor echidistante de două puncte date, ca şi în cazul perpendicularei — procentele de răspunsuri corecte cresc constant de la o clasă la alta, fără oscilaţii. Faptul acesta este adevărat atît pentru punctele singulare cît şi pentru răspunsuri constînd în 2, 3, ... n, puncte.

Creşterea paralelă a procentelor de răspunsuri corecte atît pentru punctele singulare cît şi pentru mai multe puncte exprimă faptul că e vorba aci, în fond, de suprapunerea mai multor probleme a căror rezolvare are loc în trepte — aşa cum de altfel am constatat şi din analiza exemplelor individuale.

Găsirea unui punct echidistant de două puncte date constituie o problemă în sine. Evoluţia lentă pe care am constatat-o pune în evidenţă dificultatea copilului de a înţelege raportarea simultană la două condiţii, atunci cînd această raportare este formulată abstract. Aceeaşi cerinţă, într-o formulare concretă, nu creează nici un fel de dificultăţi — începînd de la vîrsta de 5—6 ani.

Rezolvarea problemei punctului singular echidistant de două puncte date, nu determină o generalizare în mod nemijlocit. Dacă o asemenea generalizare ar fi avut loc — ţinînd seama de instructajul utilizat — n-am fi avut decît o singură rubrică de soluţii corecte, cea cu n puncte, lucru care nu se întîmplă.

Nici trecerea la locul geometric propriu-zis — dreapta unind toate punctele ce posedă proprietatea echidistanţei —

Scanned with OKEN Scanner

nu decurge automat din găsirea celor n puncte. Şi aceasta reprezintă o treaptă distinctă — asemenea soluţii nu apar mai frecvent după cum am văzut, decît din clasa a VI-a.

Dar, cum spuneam, pe toate aceste direcţii avem creşteri constante, fără oscilaţii, de la o clasă la alta.

Aceasta înseamnă că şi sub acest aspect — ca şi în cazul perpendicularei — avem de-a face cu o convergenţă a modurilor de soluţionare dependente de diferitele niveluri cognitive: concret (sub forma de obiecte), intuitiv-schematic, logic, conceptual-matematic. Existenţa unor decalaje între aceste direcţii de evoluţie nu determină, ca în problema naturii conceptelor figurale, fenomene de interferenţă a semnificaţiilor şi ca urmare, oscilaţia rezultatelor.

Concluzii parţiale

În constituirea ideii de loc geometric, reprezentată în cercetarea noastră prin mediatoare sînt puse în evidenţă următoarele etape:

1. Înţelegerea ideii de echidistanţă pentru punctul singular (deci înţelegerea dublei raportări).
2. Posibilitatea de a găsi mai multe puncte care îndeplinesc cerinţa respectivă.
3. Generalizarea regulei de găsire a punctelor prin descoperirea modului în care se înşiră (în linie dreaptă).
4. Apare conştiinţa faptului că nici un alt punct în afara şirului nu satisface cerinţa.

Aceste etape le găsim atît în condiţiile unei formulări narative a problemei cît şi în condiţiile unei formulări abstracte, cu deosebirea că în cazul al doilea etapele sînt decalate cu cîţiva ani.

Ultima etapă (5) constînd în apariţia ideii propriu-zise de loc geometric — entitate mintală în care fuzionează generalitatea conceptuală („totalitatea punctelor care...") cu o structură figurală — nu poate apare decît după ce s-au constituit ideile de punct, linie, dreaptă în sens geometric (la elevii din clasa a VI-a).

Interesul acestei cercetări constă mai ales în faptul că pune în evidenţă etapele de constituire ale unei modalităţi de generalizare a unei proprietăţi abstracte, generalizare exprimabilă intuitiv — modalitate specifică conceptelor figurale.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL AL XXII-lea

COORDONATELE UNUI PUNCT ÎN PLAN

În legătură cu constituirea conceptelor figurale, problema aceasta este interesantă, pentru că pune copilul în situaţia de a explicita în termeni concepto-figurali o soluţie dinainte găsită în planul intuitiv.

Condiţiile acestei probleme se deosebesc de cele ale distanţei de la un punct la o dreaptă, unde soluţia figurală nu poate fi anterioară posibilităţii de utilizare şi explicitare a procedeelor logice (logico-figurale).

Ele se deosebesc şi de cele ale problemei echidistanţei unui punct în raport cu două puncte date, deşi şi în acest caz e vorba de o dublă raportare.

În cazul coordonatelor, copilul porneşte de la un model intuitiv pe care el îl percepe.

E posibilă o soluţie corectă, intuitivă doar prin raportarea globală a punctului la imaginea de ansamblu a cadrului.

Ceea ce interesează aci este mecanismul detaşării din acest complex figural a mijloacelor concepto-figurale, esenţiale, de raportare a punctului la cadrul de referinţă — respectiv detaşarea sistemului de coordonate.

Tehnica utilizată este expusă în capitolul XIII, chestiunea J.

J. Piaget [1] a folosit, în principiu, acelaşi procedeu pentru studiul acestei probleme. În mare, a găsit aceleaşi etape în utilizarea de către copii a sistemelor de coordonate. Faptul că noi ne-am sprijinit pe date statistice ne-a permis însă să obţinem o imagine mai completă a întregului proces evolutiv, care se do-

---

[1] J. Piaget, B. Inhelder et A. Szeminska, *La géometrie spontanée...*, cap. VII, p. 200—224.

Scanned with OKEN Scanner

vedeşte mai complex decît cel rezultînd din cercetările lui Piaget. Faptul că etapele de constituire a sistemului de coordonate rectangulare corespund, în cazul subiecţilor cu care a lucrat Piaget, unor vîrste mai timpurii, se poate explica prin aceea că în cercetările sale se utilizau mult diverse întrebări ajutătoare care ghidau pe subiect. De altfel, deoarece nu ni se prezintă decît un material selecţionat, nu putem şti în ce măsură subiecţii citaţi sînt reprezentativi pentru vîrstele corespunzătoare.

Pentru vîrstele de care ne-am ocupat rezolvarea intuitivă a problemei stabilirii poziţiei unui punct într-un cadru de referinţă nu constituie nici o dificultate. Dificultatea începe atunci cînd copiii trebuie să expliciteze procedeele folosite.

Decalajul între soluţia intuitivă şi conştientizarea procedeelor este foarte mare. Procentul copiilor care nu răspund de loc este de 65% (tabela nr. 18) la clasa a II-a şi scade treptat în clasele următoare.

Dintre cei care răspund sînt încă mulţi care, de fapt, nu indică procedeul folosit ci dau un răspuns vag care ocoleşte problema : „M-am uitat", „M-am gîndit", „Am măsurat".

Între răspunsurile de tipul „M-am uitat, m-am gîndit" şi cele de tipul „Am măsurat" este o deosebire de nuanţă şi de aceea le-am calculat separat.

În răspunsul „M-am uitat", accentul cade pe o orientare, perceptivă globală. Copiii respectivi descriu destul de exact fenomenul petrecut (nu toţi izbutesc această desciere — deşi toţi cei care nu răspund, dar rezolvă intuitiv, procedează de fapt la fel). Ei privesc şi găsesc locul celui de-al doilea punct, în mod nemijlocit, în structura de ansamblu a figurii, fără a apela la un sistem anumit, diferenţiat, de coordonate.

Cadrul de referinţă există — e format din laturile pătratului. El este luat în seamă — altfel soluţia n-ar putea fi dată. Dar situarea punctului în raport cu cadrul de referinţă nu se face prin utilizarea conştientă a două coordonate detaşate din contextul intuitiv şi explicitate. Situarea punctului se realizează prin raportarea la complexul figural ca atare. Copilul măsoară şi în acest caz, dar el nu desprinde distanţe, în sensul propriu al cuvîntului, care apoi sînt conjugate. El are un mod specific de a măsura: global, figural, prin confruntarea perceptivă a unor ansambluri.

Scanned with OKEN Scanner

Dialectica marxistă ne învaţă că măsura este unitatea cantităţii şi a calităţii. Măsura nu este doar cantitate abstractă ci determinarea cantităţii într-un domeniu calitativ dat.

Analiza genetică ne arată că această categorie, a măsurii, se constituie progresiv la copil. Utilizarea ei poate fi mai simplă sau mai dificilă, în funcţie de natura problemei. Determinarea poziţiei punctului în plan este o problemă mai complicată decît măsura mono-dimensională şi, de aceea, chiar dacă procedeul măsurătorii în forma sa simplă a fost însuşit, este posibil ca copilul să nu poată rezolva această problemă în sensul utilizării conştiente a sistemului de coordonate.

Soluţia intuitivă oferită de copii ne arată existenţa, în constituirea categoriei de măsură, a unui stadiu pre-geometric, sub forma unei infra-măsuri în care cantitatea este subordonată calităţii, în care aprecierea cantitativă apare ca o rezultantă secundară a aprecierii calitative.

Copilul compară în bloc cele două pătrate date, iar poziţiile celor două puncte sînt determinate în primul rînd ca elemente calitative ale figurilor.

Iată cîteva exemple ale unor astfel de răspunsuri :

Bob. Bea. (II) „Eu m-am uitat exact la al doilea pătrat".

Din. Geo. (II) „Eu am făcut după celălalt pătrat".

Rad. Mar. (II) „Eu am aşezat pe amîndouă la fel".

Cez. Mag. (III) „Am privit unde este casa clădită în prima curte".

Son. Cri. (III) „Noi am făcut aşa casa vecinului, pentru că casa celuilalt vecin este în partea dreaptă în colţul de sus".

Un pas mai departe îl constituie formularea: „Am măsurat". Nici în acest caz copilul nu ne indică ce anume a măsurat, la ce distanţe s-a referit. Dar el devine conştient de faptul că a făcut şi altceva decît „a privit". Măsura liniară el o cunoaşte. Faptul că şi în cazul determinării poziţiei punctului în plan el afirmă că „a măsurat" înseamnă că el a izbutit să se ridice la o treaptă mai înaltă de generalitate a noţiunii de măsură (deşi încă într-o formă vagă, copilul nefiind încă în stare să rezolve pînă la capăt problema, în cazul dat).

Ghe. Eug. (II) „Eu am măsurat cît a fost în primul pătrat".

Mar. Gab. (II) „Noi am măsurat din ochi".

Mar. Vio. (II) „Noi am măsurat pe foaie cu centimetrul".

Str. Mar. (III) „Noi am măsurat cu linia".

Drag. Aur. (III) „Am măsurat în primul şi apoi în al doilea".

Scanned with OKEN Scanner

Dum. Flor. (IV) „Noi măsurăm cu metrul ca să putem vedea ce distanță este".

Rad. El. (IV) „Noi măsurăm cu linia gradată".

Suc. Paul (IV) „Se măsoară distanța de la primul pătrat și se măsoară la al doilea pătrat".

Dobr. Mih. (V) „Trebuie să măsurăm cîtă depărtare este între loc și casă".

Dur. Ste. (VI) „Am pus punctul în același loc la amîndouă pătratele măsurînd distanța".

Tabela nr. 18

Tipuri de răspunsuri	II	III	IV	V	VI
1. „Am măsurat"	3,0	15,3	46,1	16,3	17,6
2. „M-am uitat", „M-am gîndit"	9,0	5,7	1,9	6,2	0,9
3. „Cu rigla, cu creionul"	—	3,8	—	—	—
4. „Trăgînd o linie"	11,0	18,1	12,2	2,6	2,5
5. 1 coordonată : de la colț	1,0	3,8	3,8	13,8	1,7
6. 1 coordonată : de la o latură	1,0	1,9	2,8	2,5	7,6
7. 1 coordonată : de la centru	—	—	—	1,2	0,9
Total 1 coordonată	2,0	5,7	6,6	17,5	10,2
8. 2 coordonate : un colț și o latură	—	1,9	0,9	—	—
9. 2 laturi	—	1,9	1,9	13,7	16,8
Total 2 coordonate	—	3,8	2,8	13,7	16,8
10. 3 indicații	—	—	0,9	3,8	—
11. „De la colțuri", „de la margini", „de la laturi"	1,0	—	4,7	11,3	4,2
12. Prin suprapunere	—	5,7	—	1,2	16,0
13. Alte răspunsuri	9,0	0,9	5,7	11,3	18,5
14. Nu răspund	65,0	41,0	19,1	16,2	13,3

În general, aceste răspunsuri cîștigă în preciziune la clasele mai mari. Apar indicații privitoare la instrumentul de măsură (centimetru, rigla, rigla gradată). Se explicitează faptul că, întîi „am măsurat într-un patrat" apoi s-a transportat rezultatul măsurătorii la al doilea. Apare indicația mai concretă: „Am mă-

Scanned with OKEN Scanner

surat distanţa de la punct la patrat“ ceea ce face trecerea la un alt tip de răspuns: „Am măsurat distanţa la marginile (sau laturile) patratului“.

Tabelul nr. 18 ne arată următoarele. La clasa a II-a mai mulţi copii folosesc formularea „M-am uitat (9%) decît „Am măsurat“ (3%). Începînd de la clasa a III-a raportul se schimbă: copiii care folosesc formularea „am măsurat“ devin mai numeroşi. Această evoluţie denotă că, într-adevăr, este vorba de un stadiu superior. Procentul acestor răspunsuri creşte mult la clasa a IV-a unde atinge o maximă: 46,1% şi scade apoi la clasele V şi VI (16,3% şi 17,6%). Faptul că, începînd din clasa a V-a procentul copiilor care dau răspunsul „am măsurat“ scade mult se explică prin înmulţirea răspunsurilor cuprinzînd indicaţii mai precise privitoare la coordonatele utilizate.

Procentul răspunsurilor de tipul „M-am uitat“, scade treptat de la clasa a II-a la clasa a VI-a cu o abatere pronunţată la clasa a V-a ceea ce concordă cu faptele constatate de noi pînă în prezent privitoare la o recrudescenţă a orientării intuitive la această clasă.

Un alt tip de răspunsuri, care apare relativ frecvent la clasele mici constă în trasarea unei linii de legătură între cele două puncte. Este, potrivit evoluţiei procentajelor, primul răspuns care apare la copii cuprinzînd o indicaţie privitoare la un procedeu de rezolvare.

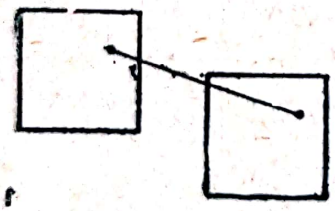


Fig. 57

Unii dintre copii se mulţumesc cu desenul (fig. 57) — un segment care uneşte cele două puncte.

Alţii însă, adaugă şi explicaţii verbale, care ne ajută să interpretăm semnificaţia acestui gen de răspuns.

Băn. Cor. (III) Ne-am luat după direcţia terenurilor.

Drag. Ghe. (III) Prin aceeaşi direcţie.

Ber. Val. (IV) Am măsurat cu o linie drumul de la punctul prim la celălalt.

Jia Ste. (IV) Am găsit locul măsurînd cu vederea.

De fapt, după cum ne dăm lesne seama, segmentul trasat nu constituie în nici un fel un procedeu pentru găsirea celui de-al doilea punct. El nu poate fi trasat decît după ce al doilea punct a fost găsit. Se petrece aci un fenomen pe care l-am mai constatat şi cu alt prilej: inversarea, în relatarea verbală, a ordinii reale în care au avut loc operaţiile mintale. Copilul ia

Scanned with OKEN Scanner

drept prima operaţie cu funcţiune de antecedent, de cauză, ultima, cea mai apropiată în timp, cea mai prezentă.

Dar cum apare această linie, care, de fapt, nu îndeplineşte vreun rol în determinarea poziţiei punctului? Linia respectivă nu este o pură ficţiune. Ea exprimă un proces real şi anume mişcarea privirii copilului care trece de mai multe ori de la un pătrat la celălalt, pînă la rezolvarea problemei. Esenţială este confruntarea pătratelor dar copilul, înainte de a dobîndi ideea mai complexă a sistemului de coordonate, reţine în primul rînd această pendulare a privirii adică procesul motor cel mai pregnant — deşi în aspectele sale neesenţiale. Mişcarea privirii între cele două pătrate are loc şi în cursul căutării punctului dar şi după ce punctul a fost găsit, cu rol de verificare.

Trasarea segmentului se efectuează — aşa cum spuneam — după ce punctul a fost găsit dar actul acesta de trasare exprimă un proces care, cel puţin în parte, este anterior găsirii punctului (pendularea privirii). Aşa se explică intervertirea succesiunii celor două operaţii în explicaţia copilului.

După cum rezultă din tabel, acest tip de răspuns este cel mai frecvent la clasele II şi III. Curba creşte de la clasa a II-a (11%) la clasa a III-a (18,1%) (unde avem o maximă) scăzînd apoi la clasa a IV-a (12,2%). La clasele V şi VI procentele acestui tip de răspuns scad mult (2,5%) la ambele clase.

Explicitarea unui sistem de referinţă apare în forma cea mai rudimentară în răspunsurile de tipul: „Am măsurat de la punct la laturile pătratului". Nu există aci precizarea a 2 coordonate ci doar ideea mai vagă a referirii la „margini", la laturi.

Const. Dan. (IV) „Măsurătorile le facem măsurînd distanţa de la punct la toate laturile".

Vas. Dan. (IV) „Am măsurat distanţa dintre laturi şi punct".

Mar. Rad. (V) „Cu ochiul, măsurînd de la marginile pătratului".

Fuc. Ios. (V) „Am măsurat cu ochiul toate lungimile de la acel punct pînă la marginile pătratului şi apoi l-am plasat".

Sof. San. (V) „Vom măsura împrejurimile din jurul casei din al doilea teren şi apoi vom executa la fel şi în al doilea pătrat".

Vla. Mar. (VI) „În al doilea pătrat am dus un punct în acelaşi loc cu primul, măsurînd distanţa dintre el şi laturile pătratului".

Dim. Iul. (VI) „Am măsurat distanţa la fiecare latură".

Acest gen de răspunsuri nu există decît la clasele IV (4,7%), V (7,5%) şi VI (4,2%). (Un singur copil din clasa a II-a a răspuns: „Măsurînd cu ochiul cele 4 distanţe").

La clasa a V-a avem şi trei copii a căror soluţie globală nu constă în raportarea la laturi ci la colţuri (3,8%). De pildă:

Spi. Oct. (V) „Noi am măsurat după colţuri".

Răspunsurile care se referă la o singură coordonată sînt de trei tipuri principale.

a) Unii copii arată că au găsit cel de-al doilea punct „trăgînd o linie de la colţ". Răspunsurile sînt date în desen (fig. 58) sau verbal.

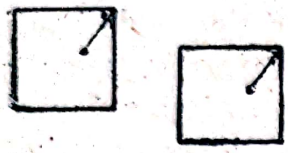


Fig. 58

Dib. Ion. (IV) „Eu am măsurat dinspre colţ înspre punct la amîndouă pătratele".

Ena. Ion. (V) „Să măsurăm de la colţul pătratului pînă la literă".

Alp. Mar. (V) „Ştiind că pătratele sînt egale am măsurat cît rămîne de la punct la unul din capetele uneia din laturi şi am făcut acelaşi lucru cu acelaşi punct din celălalt pătrat".

Bal. Aug. (VI) „Măsurăm distanţa de la colţ şi apoi aceeaşi distanţă o măsurăm şi în celălalt pătrat".

În clasa a II-a avem un singur răspuns de genul acesta, procentajul creşte la clasele III şi IV la 3,8% — reprezentînd deci, încă, o frecvenţă foarte scăzută. La clasa a V-a creşterea este mai importantă: ajungem la 13,8%. La clasa a VI-a curba scade mult ajungînd la 1,7%.

b) Al doilea tip de răspuns care se referă la o singură coordonată, cuprinde indicarea unei coordonate rectangulare (în desen) sau verbal sub forma „Măsurăm distanţa de la punct la o latură".

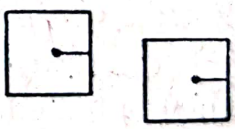


Fig. 59

Sar. Mar. (II) „Noi am măsurat după celălalt". Răspunsul este însoţit de o figură de tipul (fig. 59).

Mor. Ele. (III) „M-am uitat la prima cît e de la linie pînă la punct".

Iva. Tud. (III) „Am procedat astfel: am pus creionul la ochi şi am măsurat lăţimea".

Ion. Lil. (III) „Noi putem merge în jos cu el". Răspunsul este însoţit de figura alăturată (fig. 60).

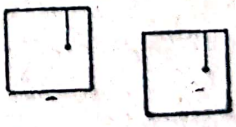


Fig. 60

Fin. Sor. (IV) „Pentru a pune şi în el al doilea pătrat un punct, trebuie să măsurăm distanţa de la punct pînă la linie".

Ale. Lust. (IV) „Măsor distanţa de la punct la marginea pătratului şi adaug şi la celălalt pătrat".

Con. Cor. (V) „Vom măsura de la partea de sus pînă la punct".

Scanned with OKEN Scanner

Geo. Cor. (V) „Trebuie să măsurăm cu metru. Măsurăm de la punct la linie".

Pan. Mih. (VI) „Noi tragem o dreaptă și măsurăm distanța dintre latură și punct și facem la fel și la al doilea pătrat".

Sol. Sim. (VI). „Am măsurat de la punct la dreapta cea mai apropiată și apoi am măsurat la fel în celălalt".

Puț. Mar. (VI). „Am măsurat de la EO și punem la FO". Răspunsul este însoțit de figură alăturat (fig. 61).

Răspunsurile cuprinzînd indicarea unei singure coordonate rectangulare sînt relativ puțin frecvente. La clasele II—V nu trec de 3%. La clasa a VI-a procentajul e mai mare, ajungînd la 7,6%.

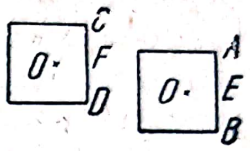


Fig. 61

c) Al treilea tip de răspunsuri constituie o varietate rară. El constă în raportarea punctului la centrul pătratului.

Răspunsurile cuprinzînd indicarea a 2 coordonate sînt de două tipuri principale.

a) În unele răspunsuri copilul combină raportarea la un vîrf al pătratului („colțul") cu raportarea la o latură.

Raz. Const. (IV). „Am măsurat lungimea dintre punct și unghi și lungimea dintre latură și punct pentru a afla locul".

Această combinație este rară. Ea apare la doi copii din clasa a III-a (1,9%) și la un copil din clasa a IV-a (0,9%).

b) Mai frecvente, în special la clasele V și VI sînt răspunsurile în care copilul indică două coordonate rectangulare, fie în desen (fig. 62) fie verbal, sub forma „Măsurăm lungimea și lățimea", „măsurăm distanța de la punct la 2 laturi" etc.

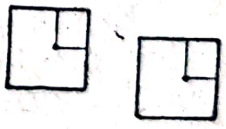


Fig. 62

Const. Paul (IV) „Măsurăm înălțimea și lungimea".

Blum. Flor (V) „Poziția punctului am măsurat-o astfel. Am măsurat distanța pe venticală a punctului într-o parte și alta, apoi distanța pe orizontală într-o parte și alta".

Fil. L. (V) „Am măsurat la al doilea pătrat de la latura de sus pînă la punct și de la latura din margine pînă la punct și am pus la pătratul unu".

Mar. Aur. (V) „Am măsurat latura pătratului și am văzut unde se află, după aceea am măsurat și cealaltă latură și am văzut cît e de distanțat de latură".

Mic. Nic. (V) „Luăm lungimea pînă la punct și lățimea".

Ilie Dom. (V) „Trebuie să măsurăm și lungimea și lățimea".

Sir. Har. (V) „Trebuie să măsurăm într-o parte și în alta". Copilul face și desenul alăturat (fig. 63).

Nuț. Cor. (VI) „Eu am măsurat distanțele din laturile din dreapta și laturile de sus".

Răd. Dum. (VI). „Putem găsi un punct egal depărtat de marginile pătratului celălalt (fig. 63).

Ghe. Mar. (VI) „Măsurăm distanța de la punct la două dintre laturile pătratului pe o perpendiculară dusă din punct pe laturi și apoi fixăm exact în pătratul celălalt".

Ini. Geo. (VI) „Măsurăm pe o perpendiculară distanța a două din laturile pătratului și apoi fixăm celălalt punct pe pătratul celălalt".

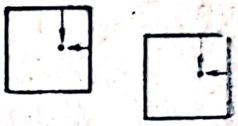


Fig. 63

Răspunsuri cuprinzînd indicarea a 2 coordonate rectangulare nu apar în clasa a II-a. La clasa a III-a și a IV-a sînt încă rare (1,9%). Creșterea este apreciabilă la clasele V (13,7%) și VI (16,8%).

După cum rezultă din exemplele citate, copiii utilizează formulări variate pentru a-și exprima ideea. Caracterul spontan al rezolvării este neîndoielnic dacă ținem seama de aceste formulări mai mult sau mai puțin stîngace („lungimea și lățimea", „latura din dreapta și latura de sus" etc.).

Exprimarea faptului că raportarea punctului la laturi se face măsurînd perpendicularele duse din punct la aceste laturi nu apare decît la clasa a VI-a — evident, în legătură cu cunoștințele de geometrie dobîndite.

Există și răspunsuri, rare de altfel, în care apar 3 indicații privitoare la coordonte, ceea ce înseamnă că acești copii ajungînd la ideea coordonatelor nu izbutesc totuși să degajeze numărul minim de date necesar — fiind deci încă într-o anumită măsură sub stăpînirea viziunii globale. La clasa a IV-a apare un singur răspuns de genul acesta (0,9%) iar la clasa a V-a avem trei asemenea răspunsuri (3,8%).

Ion. Laur. (IV) „Noi măsurăm lungimea, lățimea și apoi din punct în colț".

Ned. Ste. (V) „Măsurăm la pătratul 2 distanța de la ambele margini pînă la casă și din colț pînă la casă și apoi măsurăm din colț de la pătratul 1 aceeași distanță ca la pătratul 2 și procedăm la fel și la laturi".

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrşit, o parte din copii apelează la procedeul suprapunerii celor două pătrate. Asemenea răspunsuri apar la clasa a III-a (5,7%) şi la clasa a VI-a (16,0%). La clasa a V-a un singur copil dă acest răspuns.

Glă. Vas. (III) „Noi am pus pătrat peste pătrat".

Bol. Mih. (III). „Am pus pătrat peste pătrat".

Voi. Pel. (III). „Am pus pătratul unul peste altul şi am aflat".

Gra. Pau. (VI). „Pentru ca punctul din primul pătrat să fie în aceeaşi poziţie faţă de punctul din al doilea pătrat trebuie să le luăm şi să le aşezăm unul peste altul ca ele să coincidă".

Bul. Rol. (VI). „Luăm pătratul ABCD şi-l suprapunem peste pătratul EFGH. Măsurăm distanţa de la punct la laturi şi măsurăm şi pe pătratul celălalt".

Bob Gur. „Am suprapus pătratele şi am găsit punctul la aceeaşi distanţă în acelaşi loc.

Răspunsurile elevilor din clasa a VI-a sînt, cum era şi de aşteptat, net superioare. Apare explicită ideea că în felul acesta obţinem o identitate de poziţie a celor două puncte, că această identitate este rezultatul coincidenţei totale a figurilor. Elevul Bul. Rol. simte nevoia să adauge şi actul de măsurare a distanţelor la laturile pătratelor.

Vom adăuga cîteva exemple şi din experienţele individuale care pot pune mai bine în evidenţă dinamica etapelor tranzitorii în constituirea conceptului figural.

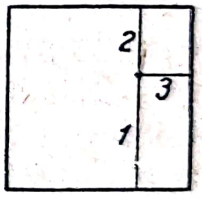


Fig. 64

Mit. Flor. (cl. V-a —12,0). Face punctul fără să ezite. Apoi trasează segmentele în ordinea indicată în figura alăturată (fig. 64).

Pop Eug. (cl. VI-a —12,4) trasează întîi segmentele perpendiculare pe latura din dreapta şi de sus. Apoi, adaugă un segment perpendicular pe latura de jos.

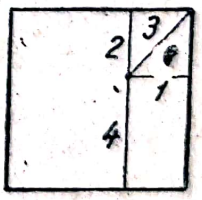


Fig. 65

Zah. Ion, (cl. VI-a —13,6). Trasează întîi coordonatele spre dreapta şi în sus. Apoi adaugă: „Ca să ne convingem că distanţele sînt egale, că n-am greşit ducem şi aceasta". (Trasează un segment perpendicular pe latura de jos.

Bar. Ghe. După ce face punctul, trasează segmentele 1, 2. Se opreşte şi priveşte figura apoi adaugă segmentele 3,4 (fig. 65).

E posibil ca pe baza acestor date să obţinem imaginea constituirii ontogenetice a conceptului de sistem de coordonate?

Etape distincte, evident, nu există. La aceeaşi vîrstă obţinem răspunsurile cele mai variate reprezentînd grade diferite de apropiere de soluţia completă (sistemul de 2 coordonate rectangulare).

Urmărind modul în care se situează maximele diferitelor curbe ale răspunsurilor putem obţine însă imaginea unei tendinţe generale a evoluţiei.

La clasa a II-a, deci la 8—9 ani, copiii rezolvă cu uşurinţă problema pe cale intuitivă, printr-o apreciere globală a figurii. Sînt foarte rare cazurile în care copii de această vîrstă indică în mod independent procedeul folosit dar şi de astă dată e vorba de o singură coordonată.

La clasa a III-a o mare parte dintre copii rezolvă încă intuitiv problema fără explicitarea procedeului folosit.

Dintre răspunsurile cuprinzînd indicarea unui procedeu, cea mai mare frecvenţă o au cele care se referă la linia de legătură dintre cele două puncte. Trasarea segmentului respectiv are loc după ce punctul a fost găsit şi nu prezintă nici o utilitate pentru găsirea punctului. Ca răspuns la cererea experimentatorului de a arăta cum a procedat, deci cum a găsit al doilea punct pe baza primului, copilul nu face decît să unească cele două puncte — cel dat şi cel găsit — ceea ce reprezintă modul cel mai simplu de a indica, de a exprima, relaţia dintre puncte.

Evident este o cale înfundată. Ea nu poate duce prin ameliorări succesive la descoperirea sistemului de coordonate. În modul acesta am putea proceda dacă, dîndu-se un punct, s-ar cere găsirea celui de-al doilea punct la o distanţă dată de primul, deci nu prin mijlocirea unor cadre de referinţă. Copilul, mulţumindu-se cu linia de legătură dovedeşte că, încercînd să se desprindă de actul de determinare prin raportare intuitivă, globală la cadrul de referinţă, ajunge să ignoreze cu totul acest cadru.

La nivelul mai înalt, al procedeelor explicite, el nu realizează decît raportarea directă, monodimensională a celor două puncte.

Cu alte cuvinte trasarea liniei de legătură între cele două puncte şi acceptarea acestei acţiuni ca o soluţie a problemei, cu ignorarea cadrului de referinţă pe care de fapt copilul l-a avut în vedere, exprimă decalajul şi deci şi conflictul existent între cele două planuri ale activităţii mintale. Încercarea de a depăşi planul soluţiei intuitive pentru a se ajunge la o reconstrucţie a soluţiei prin procedee explicite, duce la prăbuşirea ei.

Scanned with OKEN Scanner

La clasa a IV-a procentul cel mai mare îl deţin răspunsurile de tipul „Am măsurat" cu rigla, cu creionul etc. Frecvenţa mare a acestor răspunsuri este, fără îndoială rezultatul cunoştinţelor de geometrie. Ideea determinării cantitative, prin măsurare, a unor raporturi spaţiale prinde din ce în ce mai mult teren la copii. Dar aceste răspunsuri mai semnifică ceva. În problema dată nu e vorba de simpla utilizare a ideii de măsură în situaţii cunoscute copilului din procesul de învăţămînt (măsura monodimensională). Copilul dovedeşte, prin răspunsul său, că este capabil să gîndească ideea de măsură şi pentru această situaţie nouă, în care e vorba de o bi-determinare, de un cuplu de date, de o raportare a punctului nu la un alt punct ci la un cadru de referinţă. Or, această situaţie este calitativ nouă faţă de măsura monodimensională.

Problema care se pune acuma, este aceea a fuziunii totale dintre calitate şi cantitate, în aşa fel încît actul intuitiv al raportării calitative la un cadru de referinţă să nu înceteze complet, să existe (ca în soluţia segmentului de legătură, atunci cînd se încearcă precizarea mijloacelor cantitative), ci să fie integral restructurat într-un act de dublă raportare la acelaşi cadru — devenit sistem de referinţă.

Cifrele din tabelul nr. 18 arată că acest fapt se petrece în două etape.

La clasa a V-a frecvenţa cea mai mare o au răspunsurile în care se indică o singură coordonată, iar dintre acestea, cele mai multe pun în legătură punctul cu unul din vîrfurile pătratului (deci nu e vorba încă de coordonate rectangulare).

Acest procedeu poate fi considerat ca o soluţie intermediară. Înainte de a raporta punctul la o dreaptă de referinţă, el îl raportează la un punct de referinţă. Evident avem aci un progres esenţial faţă de soluţia segmentului de legătură. În această soluţie nu exista încă nici un element de referinţă propriu-zis. Vîrful pătratului joacă însă acest rol în răspunsurile copiilor. De ce apare, la cei mai mulţi copii, întîi raportarea la vîrful pătratului? Raportarea la laturi înseamnă măsura distanţei între un punct şi o dreaptă, deci construcţia, întîi, a perpendicularei. Raportarea punctului la un vîrf al pătratului înseamnă raportarea la un alt punct existent, determinat intuitiv, deci o operaţie mult mai simplă.

Scanned with OKEN Scanner

Dar tot în clasa a V-a avem și o creștere pronunțată a procentului copiilor care se referă la 2 coordonate rectangulare (deși numărul lor e mai mic decît al celor care utilizează o singură coordonată). Această evoluție a procentajelor indică posibilitatea ca uneori copiii să ajungă la înțelegerea sistemului de coordonate rectangulare fără a trece prin faza unei singure coordonate.

La clasa a VI-a avem procentul cel mai mare de răspunsuri în care apare cuplul de coordonate rectangulare (în raport cu clasele anterioare). Totuși nici la această clasă procentul nu este mare: doar 16,8% din copii răspund astfel. Această cifră nu ne indică posibilitățile reale ale copiilor de a rezolva corect problema.

Dacă urmărim datele tabelului nr. 18 constatăm că avem un procent aproape egal de răspunsuri în care soluția oferită constă în procedeul suprapunerii. Numai în clasa a III-a am mai avut asemenea răspunsuri (în clasa a V-a doar un singur copil). Dar în timp ce în clasa a III-a suprapunerea reprezenta o soluție spontană, intuitivă abandonată de copiii mai mari, la clasa a VI-a același răspuns reprezintă un procedeu de confruntare logico-intuitiv însușit sistematic la lecțiile de geometrie. Procentul relativ mare al acestor răspunsuri la clasa a VI-a este deci rezultatul acestei influențe didactice.

Dar tot la clasa a VI-a avem și un procent relativ mare de „alte răspunsuri" variate. Ce reprezintă acestea? În majoritatea lor ele sînt rezultatul intervenției cunoștințelor geometrice nou însușite.

Dăm cîteva exemple și din acest gen de răspunsuri:

Beld. Alex. „Cu compasul tragem un arc cu centru în A care să treacă prin punct.".

Bru. Geo. „Am dus un cerc cu centrul în punct și care trece printr-un colț al pătratului. Facem aceeași operație și la celălalt cu cercul care să aibă aceeași rază".

Vot. Mir. „Dacă aceste pătrate sînt egale și ducem axa de simetrie la ambele pătrate și vedem distanța".

Bol. Teod. „Ducem diagonalele".

Vasile Const. „Ducem o diagonală apoi coborîm din punct pe dreaptă o perpendiculară, apoi măsurăm distanța din capătul perpendicularei pînă la perpendiculară".

Scanned with OKEN Scanner

Bar. Adr. „Ducem diagonalele A′ C′ şi B′ D′ şi AC şi DB. Punctul de intersecţie este centru de simetrie al pătratelor apoi găsim punctele".

Este neîndoielnic că aceste răspunsuri au apărut sub influenţa cunoştinţelor geometrice recente, insuficient asimilate. Copilul caută soluţia în direcţia acestor cunoştinţe şi pierde astfel din vedere soluţia corectă şi în acelaşi timp mai simplă. În unele din aceste răspunsuri apare chiar ideea elementelor de referinţă dar complicată de noţiuni geometrice neadecvate.

Toate acestea fac ca la clasa a VI-a să nu putem obţine o imagine reală a posibilităţii elevilor de a utiliza în mod spontan sistemul de coordonate rectangulare.

Concluzii parţiale

Această cercetare pune în evidenţă dificultăţile întîmpinate de copil în degajarea structurii concepto-figurale dintr-un complex figural dat. De la găsirea pe cale figurală, intuitivă, a soluţiei corecte în problema determinării poziţiei unui punct în plan, pînă la posibilitatea utilizării conştiente a unor procedee concepto-figurale (incluzînd atribute ca esenţialitate, generalitate, necesitate), pentru rezolvarea aceleiaşi probleme, drumul se dovedeşte destul de îndelungat.

După depăşirea etapei primare a rezolvării intuitive (şi care, dacă nu intervin sugestii din afară, ţine pînă în clasa a IV-a inclusiv) copilul izbuteşte să detaşeze o singură coordonată (în special în clasa a V-a) şi numai apoi două coordonate (în special în clasa a VI-a).

Dar pe parcurs apar şi alte soluţii care pun în evidenţă complexitatea relaţiilor dintre intuitiv şi conceptual în acest proces de degajare.

Structura figurală se prezintă ca o formaţie bine încheiată, tenace, care opune o rezistenţă desprinderii elementelor concepto-figurale.

Lucrul acesta nu rezultă numai din faptul că această desprindere are loc relativ tîrziu, dar şi din apariţia unor formaţii mixte, diverse, în care conceptualizarea este incompletă sau deformată, din cauza presiunii structurii intuitive. Aceasta este situaţia răspunsului eronat constînd în trasarea unei „linii de

Scanned with OKEN Scanner

legătură“ (expresie pseudo-geometrică a pendulării privirii între cele două sisteme de referinţe), aceasta este situaţia referirii nediferenţiate, globale la „margini“, la „laturi“ (degajarea incompletă din complexul figural) sau a referirii la 3 coordonate (reducerea la esenţial este continuată dar nu încheiată).

Acest fenomen, pus în evidenţă de cercetarea de care ne ocupăm, ni se pare deosebit de important pentru procesul constituirii conceptelor figurale. Este vorba de faptul că în cazurile în care soluţiile intuitive sînt nemijlocit posibile, pe baza unor considerente figurale, structura intuitivă constituită, încheiată, poate ea însăşi deveni o piedică în calea degajării reţelei conceptuale şi a constituirii conceptelor figurale corespunzătoare (în care elementele intuitive vor trebui să intre numai în calitate de componente subordonate).

Scanned with OKEN Scanner

CONCLUZII

Analiza psihologică a figurilor geometrice ne-a dus la concluzia că ele reprezintă modalităţi de reflectare ce nu pot fi reduse nici la concepte propriu-zise şi nici la reprezentări. Aceste entităţi mintale posedă proprietăţile conceptului: ele sînt abstracţii care reflectă trăsături esenţiale, generale, ale unor clase de lucruri într-o formă idealizată, pură, invariantă. În acelaşi timp însă, ele ţin de domeniul intuitivului întrucît sînt imagini spaţiale caracterizate prin formă şi dimensiuni.

Între figura geometrică propriu-zisă şi imaginea ei materializată (desenul sau reprezentarea acestuia) este, într-o anumită măsură, aceeaşi relaţie ca între semnificaţie şi expresia ei sonoră sub forma cuvîntului. Fără o expresie sensibilă nu e posibilă existenţa, vehicularea, manipularea unei semnificaţii — deşi semnificaţia este altceva decît structura sonoră corespunzătoare. Figura geometrică este şi ea, în acest sens, semnificaţie — semnificaţia purtată de modelul grafic — dar o semnificaţie intuitivă în structura ei.

La o primă impresie, n-ar exista aici decît două faţete: deoparte conceptul, de altă parte desenul (sau obiectul material). În realitate însă, geometrul, atunci cînd are de rezolvat o problemă, nu operează nici cu concepte pure, purtate de simboluri verbale sau de altă natură, nici cu proprietăţile materiale ale obiectului desenat. El deplasează, roteşte, suprapune, inversează, secţionează imagini spaţiale pure exprimate într-o formă materială. Această imagine spaţială pură nu poate exista decît în virtutea unui concept — a unei definiţii, a unei reguli de construcţie. Dar nu conceptul însuşi este secţionat, inversat, de-

Scanned with OKEN Scanner

plasat, ci figura corespunzătoare, figura gîndită dincolo de complexul de însuşiri material-concrete ale desenului sau ale reprezentării acestuia. Atît figura cît şi operaţiile la care este supusă reproduc *intuitiv*, dar idealizat, forme şi operaţii concrete, materiale. Atît figura cît şi operaţiile la care este supusă au trecut printr-un proces de purificare, de esenţializare care le-au conferit proprietăţile conceptului.

Produsul obţinut se poate insera, astfel, în dinamica unui raţionament riguros de tip matematic cu drepturi egale cu cele ale conceptului propriu-zis.

Figura geometrică nu reprezintă o simplă verigă de legătură între abstract şi treapta intuitivă a reflectării. Ea constituie un produs mintal specific, a cărui calitate esenţială este aceea de a conferi operaţiilor de gîndire în care se inserează posibilitatea progresului continuu, infinit, în cunoaşterea realităţii, cu menţinerea, totuşi, a stringenţei logice.

Aceste formaţii mintale, numite de noi concepte figurale, fac parte din clasa mai vastă a imaginilor-abstracţii, frecvent întîlnite în gîndirea ştiinţifică, imagini intuitive mai mult sau mai puţin idealizate, conceptualizate al căror rol principal este acelaşi: menţinerea caracterului productiv, constructiv, al gîndirii în reflectarea bogăţiei inepuizabile a realităţii, fără periclitarea corectitudinii logice.

Specific pentru conceptele figurale ale geometriei este faptul că, în cazul acestora, conceptualizarea este aproape totală, ceea ce face ca, în limite foarte largi, investigaţia să se poată menţine la nivelul operaţiilor mintale, iar mersul raţionamentului să poată fi reexpus într-o formă strict deductivă. În acest stadiu, reţeaua conceptuală se poate desprinde de faţeta intuitivă şi poate forma un angrenaj autonom, pur logic — expunerea axiomatică a geometriei.

Posibilitatea acestei matematizări a ştiinţei despre relaţiile spaţiale exprimă în fond *gradul mare de separabilitate a acestui domeniu de legitate.*

Conexiunea universală nu înseamnă amalgamarea amorfă, inextricabilă a fenomenelor lumii materiale. Realitatea obiectivă este organizată pe domenii de legitate (fapt care rezultă şi din sistematica ştiinţelor, din modul lor istoric de constituire) domenii în interiorul cărora interdependenţele ating o mare densitate. Aceste domenii de interacţiune nu sînt izolate nici între ele. Ele sînt mai mult sau mai puţin interdependente într-un vast sistem ierarhic. Gîndirea în structura şi dinamica ei

Scanned with OKEN Scanner

tinde să reflecte însăşi această ierarhizare obiectivă a domeniilor de legitate. Proprietăţile spaţiale s-au dovedit, însă, a forma un domeniu de legitate aproape închis, aproape integral separabil de ansamblul celorlalte domenii, cu o dependenţă practic nulă faţă de celelalte domenii în limitele dimensiunilor mijlocii.

Pentru a se putea desprinde de contactul nemijlocit cu practica şi a se putea menţine — temporar — în planul abstracţiilor fără ca totuşi să ajungă la ficţiuni, gîndirea are nevoie de un control intern. Acest control intern realizat de către legile logicii — elaborate la rîndul lor pe baza unei îndelungate practici sociale — este exprimat foarte bine în condiţiile grupului matematic, în primul rînd în condiţia fundamentală : produsul a două elemente ale sistemului trebuie să dea un element al sistemului. Aceasta nu înseamnă altceva decît că suita operaţiilor de gîndire trebuie să se desfăşoare astfel încît — prin respectarea unor invarianţi fundamentali — să nu depăşească hotarele domeniului de legitate dat. Depăşirea acestor limite pretinde fie angajarea într-un domeniu determinat de legitate cu o arie mai vastă — fie, în ultimă instanţă, reluarea contactului cu realitatea materială, pe baza practicii. Astfel, cu cît va fi mai redusă interdependenţa unui domeniu de legitate cu alte domenii, cu atît va fi mai mare posibilitatea menţinerii operaţiilor de cunoaştere activă, de investigaţie, în planul abstracţiilor fără riscul evaziunii în ficţiune şi, prin urmare, cu atît va fi mai deplin gradul de conceptualizare al imaginilor utilizate. Acesta este, în primul rînd, cazul *numerelor* care, exprimînd raporturi cantitative pure — fără nici o referire la conţinutul concret, ceea ce ar obliga la interdependenţe diverse — au putut constitui un domeniu de legitate deplin autonom. Este apoi cazul raporturilor spaţiale, care — nu deplin, dar în limite foarte largi — s-au dovedit a dispune de o relativă autonomie şi s-au putut încadra astfel printre disciplinele matematice. Figura geometrică — iniţial imagine nemijlocită a unor forme materiale investigabile experimental — s-a purificat, s-a conceptualizat şi a devenit un element component al unor operaţii logice.

În structura figurii geometrice, sub raportul generalizării, mecanismele fizio-psihologice ale reflectării au făcut posibilă o operaţie de clivaj, care s-a dovedit extrem de importantă în cunoaşterea realităţii: *desprinderea formei de dimensiune*. Forma este încă intuitivă. Este posibilă reflectarea intuitivă a

Scanned with OKEN Scanner

formei ca atare, fără dimensiuni determinate. Acest lucru se petrece în cazul reprezentărilor. Dimensiunea nu este dată nemijlocit în reprezentare, ci numai prin intermediul semnificației: îmi imaginez un obiect cunoscut și el va poseda dimensiunea pe care, prin experiență, presupun că o are. În cazul percepției, aprecierea dimensiunii este, de asemenea, dependentă de o serie de factori de ambianță. Dar aici, fuziunea este mult mai stabilă, mai profundă, între influențele acestor factori care determină constituirea imaginii spațiale. În cazul reprezentării, ceea ce este dat nemijlocit este forma, iar dimensiunea este adăugată.

În domeniul figurilor geometrice, unde nu reproducem obiecte ca atare, ci numai raporturi spațiale, fenomenul acesta este și mai evident: figura geometrică *reprezentată* are o formă dată, dar dimensiuni nedeterminate. Aceste dimensiuni se precizează prin intermediul semnificației, prin raportarea imaginii la o anumită ambianță determinată (de exemplu: îmi imaginez triunghiul desenat pe caiet, presupus la o anumită distanță de privire). Dar, în mod obișnuit, această precizare nu intervine.

Faptul cel mai important este că acest clivaj, permis de mecanismele fizio-psihologice, corespunde deplin cu clivajul obiectiv al domeniilor respective de legitate : din ansamblul cunoștințelor dobîndite de omenire despre proprietățile relațiilor spațiale, s-a desprins la un moment dat domeniul *formelor* ca atare, domeniul exprimat în grupul G_s al similitudinilor spațiului : geometria euclidiană și-a delimitat domeniul în raport cu acest criteriu, cuprinzînd astfel o arie mult mai vastă de proprietăți decît metrica elementară. Raționamentul geometric, deși recurge la imagini, nu este grevat de prezența aspectelor dimensionale și dispune astfel exact de gradul de generalitate cerut de geometria euclidiană — geometria invarianței formelor spațiale. Particularizarea prin dimensiuni nu intervine decît atunci cînd acest lucru devine necesar pentru reluarea contactului cu realitatea materială.

★

Acestea fiind premisele teoretice generale, ne-am pus problema de a urmări constituirea în dezvoltarea gîndirii copilului, a acestor modalități deosebite de reflectare — conceptele figurale.

Studiul evoluției cunoștințelor geometrice ale copilului a mai fost abordat în literatură. Ceea ce ne-a interesat însă, în mod special pe noi a fost procesul însuși al conceptualizării ima-

Scanned with OKEN Scanner

ginilor spaţiale — de la imaginea brută a obiectului concret, pînă la imaginea intuitivă, pur spaţială, controlată conceptual, inserabilă deplin într-un raţionament şi impregnată senzorial numai în măsura necesară pentru a menţine priza acţiunilor mintale asupra ei.

Se detaşau aici două aspecte fundamentale :

1. Desprinderea mintală a proprietăţilor spaţiale pure din complexul de însuşiri materiale ale obiectului concret şi constituirea lor în abstracţii, în imagini conceptualizate.

2. Evoluţia relaţiilor dintre imaginea intuitivă şi concept ; procesul de fuziune a imaginii cu conceptul, de subordonare a imaginii faţă de concept.

Primul aspect — cel al relaţiilor concret-abstract — se referă mai ales la *natura* entităţilor geometrice, la modul în care această natură este considerată de copil.

Cel de-al doilea aspect se referă mai ales la *organizarea internă a entităţilor geometrice,* ca modalităţi de reflectare sub raportul relaţiilor concept-imagine.

Evident, cele două aspecte sînt strîns interdependente, fără însă a se reduce unul la celălalt — fapt confirmat de rezultatele cercetării.

În cercetarea noastră, noi am abordat cîteva dintre noţiunile geometrice elementare, a căror considerare duce la problemele mai sus amintite. Ne-am ocupat, în primul rînd, de *punct* şi de *linia dreapta* — noţiuni geometrice primare, care prin specificul lor pun în evidenţă, în special, relaţia conflictuală concret-abstract, dar fără îndoială şi pe cea intuitiv-conceptual.

Ne-am ocupat, în al doilea rînd, de noţiunile de *distanţă, loc geometric* (mediatoarea segmentului) şi *sistem de referinţe* care pun în evidenţă în special relaţiile dintre *intuitiv* şi *conceptual,* întrucît nu e vorba de considerarea unor entităţi date, ci de procedee de orientare activă în cîmpul spaţial.

În ceea ce priveşte punctul şi dreapta, problema a fost abordată din diferite unghiuri de vedere în aşa fel încît să putem confrunta *utilizarea* conceptelor şi imaginilor respective, în diverse contexte logico-intuitive, cu *definirea* aceloraşi entităţi.

În legătură cu ultimele trei chestiuni, am confruntat, în general, procedeele practice de rezolvare, cu explicitarea, în planul logico-verbal, a mijloacelor folosite.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele obținute de noi ne permit să răspundem, în primul rînd, la cele două probleme formulate mai sus și care privesc constituirea conceptelor figurale în general.

Ele ne permit, de asemenea, să urmărim unele aspecte specifice privitoare la evoluția fiecăreia dintre entitățile și procedeele geometrice considerate.

În sfîrșit, în al treilea rînd, aceste rezultate deschid unele probleme în legătură cu direcțiile dezvoltării intelectuale a copilului.

Evoluția relațiilor concret-abstract, în constituirea conceptelor figurale. În ceea ce privește interpretarea naturii figurii geometrice se pot desprinde trei tendințe principale : a) substanțialistă ; b) grafică, c) abstractă.

a) Pentru prima interpretare, figura geometrică nu poate exista altfel decît ca obiect material : punctul este un obiect minuscul, avînd formă, dimensiuni și chiar greutate. Linia dreaptă este o sîrmă bine întinsă, o bară rigidă, un fir de ață etc. Patru linii formează, la intersecție, un punct mai mare și mai greu decît două linii. Trecînd de la o linie dreaptă la o linie frîntă, există riscul ca linia să se rupă dacă nu este destul de flexibilă.

b) A doua interpretare, grafică se află la jumătatea drumului între cea substanțialistă și cea abstractă. Figura geometrică este un *desen,* o construcție grafică (e vorba de figuri plane). Ca atare, ea este bidimensională — ceea ce, evident, constituie un progres în direcția abstractizării. Un punct, în această accepțiune, are mărime, are formă, dar n-are greutate. Linia nu se rupe cînd devine linie frîntă, pentru că „nu poate ieși din desen", „nu se poate deslipi de pe foaie". În această accepțiune, figura geometrică este rezultatul acțiunii subiectului și calitățile ei sînt dependente de calitățile acțiunii : „Linia dreaptă nu se rupe pentru că este trasă cu mîna", „Linia dreaptă este linia trasă drept".

c) Cea de-a treia interpretare, propriu-zis geometrică, este cea care consideră entitățile geometrice ca abstracții iar modelul material sau desenul numai ca modalități de concretizare a abstracțiilor respective.

Aceste modalități de interpretare corespund parțial cu cele găsite de Deschamps și Michaud. Principala deosebire față de acești autori constă în faptul că noi insistăm asupra caracterului reflectoriu al acestor modalități de interpretare. Aceste

modalităţi nu sînt decît trepte de abstractizare, care duc la forme de reflectare din ce în ce mai riguroase şi mai generale.

A doua deosebire — dacă lăsăm la o parte problema terminologiei — se referă la grupa de interpretări denumită de Deschamps şi Michaud *pragmatică* şi de noi *grafică*. La unii dintre subiecţii respectivi apare, într-adevăr, preocuparea pentru actul de construcţie al figurii, dar particularităţile acesteia sînt legate, în special, de proprietăţile *spaţiului grafic*. Aceasta ni s-a părut a fi caracteristica generală. (Actul de construcţie al figurii poate fi, de fapt, luat în consideraţie în toate cele trei interpretări).

Rezultatele cercetărilor noastre arată că cele trei modalităţi de interpretare nu se succed simplu, înlocuindu-se una pe cealaltă. Prima constatare importantă este aceea că în evoluţia generală nu avem de-a face cu un progres continuu, de la interpretarea substanţialistă la cea abstractă, ci cu oscilaţii, exprimînd o alternanţă a fazelor de progres cu faze de regres. (Sub raportul abstractizării). În unele cazuri, mai ales în trecerea de la clasa a IV-a la clasa a V-a creşte frecvenţa atît a răspunsurilor „substanţialiste" cît şi a celor care exprimă interpretarea abstractă, creşterea răspunsurilor substanţialiste fiind însă mai pronunţată. Aceste oscilaţii nu sînt întotdeauna sincrone pentru diferitele aspecte ale figurilor geometrice.

Principalele momente care pot fi detaşate sînt următoarele : predominarea interpretării substanţialiste la clasa a II-a, dispersarea formelor de interpretare la clasa a III-a, predominarea interpretării grafice la clasa a IV-a, revenirea la interpretarea substanţialistă la clasa a V-a, predominarea interpretării abstracte la clasa a VI-a.

Cum se explică aceste alternanţe ?

Analiza răspunsurilor date de copii arată că de fapt avem de-a face cu doi factori esenţiali care intră în conflict. Primul se referă la dezvoltarea intelectuală generală a copilului.

În general, se vorbeşte despre dezvoltarea gîndirii copilului de la concret la abstract.

Este, însă, necesar să luăm în consideraţie în această privinţă, o distincţie care ni se pare extrem de importantă pentru problema noastră. Şi anume, distincţia între abstracţii ca momente, ca elemente componente ale proceselor şi procedeelor de cunoaştere şi abstracţiile constituite în sisteme autonome, mai mult sau mai puţin ample şi care formează, ele însele, la un moment dat obiectul cercetării. Evident, distincţia este re-

lativă, întrucît, în ultimă instanță, cunoașterea trebuie să ajungă la practică și deci, implicit, la stăpînirea concretului. Dar — așa cum am mai arătat — cunoașterea științifică desprinde domenii de legitate care, în funcție de gradul lor de separabilitate, pot fi considerate — temporar — ca autonome iar investigația poate fi purtată numai asupra reflectărilor mintale corespunzătoare, asupra abstracțiilor. Sub raportul psihologiei genetice, între cele două funcțiuni ale abstracțiilor apare o deosebire netă.

În ceea ce privește *mijloacele* de cunoaștere, progresul are loc, într-adevăr, în sensul perfecționării procedeelor logice și al abstracțiilor utilizate.

În ceea ce privește însă orientarea cunoașterii exprimată atît în *obiective*, cît și în *interese*, pînă la 12—13 ani linia majoră este cea *realist-concretă*. Copilul își perfecționează mijloacele de cunoaștere (implicit abstracțiile utilizate) *în sensul unei reflectări mai depline, mai bogate, mai corecte, mai obiective a obiectelor în realitatea lor concretă*. Dificultățile apar în momentul în care abstracțiile își părăsesc rolul lor de verigi ale procesului investigator și se prezintă — ele însele — ca obiecte autonome de cunoaștere, constituite în sisteme mai mult sau mai puțin complexe.

Dacă operațiile cu aceste abstracții pot fi organizate în algoritmi stabili, așa cum se întîmplă în calculul aritmetic sau algebric, atunci dificultatea este, într-o anumită măsură, ocolită. Dacă însă această algoritmare nu poate juca decît un rol redus, dacă copilul este pus în situația de a realiza construcții, mai mult sau mai puțin independente, în cadrul sistemelor de abstracții atunci dificultuțile se manifestă cu toată forța.

Între direcția principală pe care este orientat progresul cunoașterii copilului și exigențele acestor domenii de cunoaștere apare un conflict destul de greu de depășit.

Aceasta este situația în cazul geometriei. Geometria îi cere copilului să opereze cu entități abstracte, să le cerceteze proprietățile sau să aplice proprietăți cunoscute la combinații noi.

Faptul că aceste entități sînt imagini — concepte figurale — nu simplifică lucrurile, ci le complică extrem de mult.

Gîndirea copilului se găsește astfel supusă — în legătură cu însușirea cunoștințelor geometrice — la două influențe opuse : pe de o parte orientarea realist-concretă în cunoașterea obiectelor din lumea înconjurătoare, orientare care este în plin progres în etapa respectivă ; pe de altă parte, specificul dome-

Scanned with OKEN Scanner

niului : domeniu de abstracţii, închis, autonom (în limitele cunoştinţelor şcolare). Cercetînd modelul material al figurii geometrice, copilul va fi împins, în mod firesc, să ia în consideraţie atributele materiale ale acestui model — cele percepute direct sau cele presupuse — şi să le ia în consideraţie chiar mai bine, mai complet pe măsură ce înaintează în vîrstă. Evident, această tendinţă firească este contrazisă de exigenţele domeniului.

Rezultatul este evoluţia cu oscilaţii şi discordanţe pe care am constatat-o sub influenţa unor cunoştinţe geometrice recent însuşite. Orientarea firească a copilului spre o interpretare realist-concretă a lucrurilor, este — în cazul geometriei — mascată parţial şi apar răspunsuri care par să exprime un progres în sensul abstractizării. În perioadele însă, în care, datorită programei şcolare, nu se predă geometria (cum a fost cazul clasei a V-a în anii în care ne-am făcut cercetările), orientarea firească a gîndirii copilului reapare cu toată vigoarea. Din cauza acestei opoziţii, rămasă adeseori în afara controlului didactic, asistăm la constituirea unui mare număr de formaţii mintale hibride care perturbă activitatea mintală a copilului în însuşirea cunoştinţelor de geometrie : fenomene şi simbioză mintală între motivaţii de sens opus, suprapuneri şi interferenţe de semnificaţii etc.

Nu e vorba de fenomenul uitării, întrucît întrebările noastre nu se refereau la cunoştinţe însuşite ca atare în clasă. Întrebările noastre vizau un mod de interpretare a figurii geometrice care trebuia însuşit indirect prin operarea cu aceste figuri.

Dacă progresul general al gîndirii copilului ar fi favorizat şi progresul operaţiilor cu sisteme de abstracţii, atunci efectul predării geometriei într-o anumită etapă n-ar fi fost atît de efemer. Or, ce se constată ? În clasa a V-a, pe toate planurile — şi, cum spuneam, e vorba de chestiuni nelegate direct de cunoştinţe şcolare — apare *mai puternică tendinţa copiilor spre o interpretare concretă, substanţialistă a figurilor geometrice, decît în clasa a IV-a şi uneori chiar decît în clasele mai mici.* Faptul acesta apare — în cercetările noastre — în legătură cu natura punctului geometric, cu numărul de puncte situabil între două repere, în legătură cu natura liniei drepte şi cu posibilitatea prelungirii ei etc. (Vezi tabelele 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11).

Dacă cunoştinţele geometrice însuşite în clasa a III-a şi mai ales a IV-a nu au influenţat, nu au modificat durabil modul de interpretare a figurilor geometrice în sensul abstractizării,

Scanned with OKEN Scanner

aceasta nu se poate explica decît prin faptul că această interpretare este nefirească pentru copilul de vîrsta respectivă. Progresul real al gîndirii copilului are loc în sensul cunoașterii mai complete, mai nuanțate, mai exacte, a obiectelor și fenomenelor în realitatea lor concretă, materială.

G. H. Luquet, în cunoscuta sa carte: *Le dessin enfantin*[1], stabilește următoarele stadii ale dezvoltării capacității copilului de a desena: 1. Desenul involuntar — copilul nu are încă intenția de a reproduce imaginea unui obiect, ci trasează pur și simplu, jucîndu-se, diverse linii. La un moment dat însă, copilul constată, observînd mai ales desenul adulților, rolul figurativ al acestui gen de joc și astfel apare *intenția* de a reproduce imaginea unui obiect. 2. Cu aceasta ajungem la al doilea stadiu, care este de fapt primul stadiu al desenului intențional. Caracteristica sa este *intenția realistă*, contracarată de o incapacitate sintetică (le réalisme manqué). 3. În stadiul al treilea, acest obstacol este depășit și copilul progresează în direcția reproducerii adecvate — *realiste* — a imaginii obiectului. Dar este vorba de un „realism intelectual": copilul nu reproduce doar ceea ce se poate înregistra perceptiv, ceea ce știe că aparține obiectului — inclusiv elemente care nu pot fi percepute direct (de exemplu obiecte situate în interiorul unei clădiri). 4. În sfîrșit, stadiul al IV-a este stadiul realismului vizual — care, ca structură generală, se apropie de desenul adultului: respectarea perspectivei, redarea imaginii perceptive.

Dar Luquet utilizează în descrierea acestor stadii teoria sa a „modelului intern". Copilul nu este preocupat să reproducă obiectul ca atare, ci o reprezentare a acestuia, imaginea pe care el însuși și-a făurit-o despre obiectul respectiv — ceea ce ar însemna că imaginile grafice imperfecte, incomplete, deformate cu amestecuri de perspective, ar fi expresia modului în care copilul își reprezintă obiectele din lumea externă. De fapt, după părerea noastră, un asemenea model intern nu există: nimic nu ne îndreptățește să admitem că mintea copilului este populată de astfel de imagini monstruoase despre lucrurile care-l înconjoară. Copilul tinde cu adevărat să reproducă imaginile obiectelor din lumea înconjurătoare, Progresele remarcate de Luquet însuși, sînt de fapt progresele realizate pe linia acestei orientări realiste. Desenul nu este un simplu calc pasiv, ci este o reconstrucție activă. Rezultatele acestei reconstrucții nu sînt în funcție de un model intern dat (sub formă de reprezentări), ci de capacitatea mijloacelor cognitive (logico-perceptive și expresive) de a reconstitui activ, conștient, imaginile obiectelor percepute. Or, și faptele

[1] G. H. Luquet, *Le dessin enfantin*, Alcan, Paris, 1927.

citate de Luquet confirmă această teză: direcția principală pe care se dezvoltă cunoașterea copilului este aceea a unei reflectări realiste cît mai complete și mai corecte a obiectelor în înfățișarea lor obiectiv-concretă.

Am văzut că după Piaget, gîndirea ajunsă la nivelul operațiilor parcurge două stadii: stadiul operațiilor concrete (7—12 ani) și cel al operațiilor formale (după 12 ani).

După părerea noastră, această diviziune nu este justificată de fapte. În primul rînd, *concretul* și *formalul*, nu exprimă, prin opoziție, același criteriu de clasificare. Un raționament formal este un raționament care nu se raportează la nici un conținut — concret sau abstract.

Piaget citează următoarea problemă pe care un copil de 7—8 ani n-o poate rezolva: „Cîteva flori din buchetul meu sînt galbene", zice un copil surorilor sale. Prima răspunde: «Atunci toate florile tale sînt galbene». A doua răspunde: «O parte din flori sînt galbene» iar a treia «Nici una». Care din ele are dreptate?" [1].

Piaget explică dificultatea copilului prin aceea că i se cere să se raporteze nu la o situație reală, ci la o situație imaginară — soluția fiind dependentă de corectitudinea structurii formale a raționamentului.

De fapt, după cum au arătat și alți autori (Deshaies, Hazlitt, Isaacs, Abel [2]), dificultatea întîmpinată de copil este aici dependentă de complexitatea sistemului de relații care intervine în raționament. Un copil poate foarte bine raționa și pe situații imaginare, cum se întîmplă adeseori în jocurile sale.

După părerea noastră, opoziția reală care interesează în dezvoltarea gîndirii copilului se referă la *conținutul*, la *obiectul* operațiilor de gîndire: deși își perfecționează continuu procedeele logico-abstracte, gîndirea copilului rămîne orientată spre înfățișarea obiectiv-concretă a lucrurilor.

„O altă particularitate importantă a activității de gîndire a preadolescentului — scriu V. A. Krutețki și I. S. Lukin — se referă la *rolul însemnat al componentelor concrete, plastice* ale gîndirii. O dată cu dezvoltarea gîndirii abstracte, componentele concrete-plastice (intuitive) ale gîndirii preadolescentului nu dispar, ci se păstrează și se dezvoltă, continuînd să joace un rol esențial în structura generală a gîndirii (mai ales la elevii din clasele a V-a și a VI-a)" [3].

---

[1] Jean Piaget, *La psychologie de l'intelligence*, Colin, Paris, 1947.

[2] Citați de P. Guillaume, *La psychologie de l'enfant*, Hermann et C-ie, Paris, 1940, p. 38.

[3] V. A. Krutețki și I. S. Lukin, *Psihologia preadolescentului*, E.S.D.P. Buc., 1960, p. 193.

Această deosebire, dezvăluită de cercetări, între evoluţia procedeelor de cunoaţşere şi evoluţia orientării cunoaşterii ni se pare a nu fi fost suficient luată în consideraţie în general în procesul pedagogic şi mai ales în legătură cu predarea matematicilor.

Relaţiile dintre intuitiv şi conceptual în constituirea conceptelor figurale. Evoluţia, sub acest raport, se dovedeşte a fi cu totul deosebită. Conceptualul şi intuitivul nu reprezintă două modalităţi opuse de interpretare a proprietăţilor spaţiale care pot duce fiecare la concluzii deosebite în funcţie de punctul de vedere din care ne situăm.

Cînd cerem unui copil să compare un punct desenat cu creta pe tablă cu un punct desenat cu creionul pe caiet sînt posibile două răspunsuri opuse, dar care fiecare poate fi adevărat — în funcţie de planul în care situăm discuţia. Dacă vom considera punctele în realitatea lor materială, trebuie să admitem că ele se deosebesc din cauza modului de construcţie. Dacă însă vom avea în vedere abstracţiile geometrice — punctele matematice — şi vom socoti urmele de cretă sau de creion numai ca figurări ale acestor abstracţii, atunci, se înţelege, între cele două puncte nu va fi nici o deosebire (afară de cea, exterioară, a poziţiei).

În problema relaţiilor dintre intuitiv şi conceptual, o asemenea opoziţie esenţială nu există. Centrul unui cerc este în principiu acelaşi, indiferent dacă îl găsim printr-o considerare globală, intuitivă, a formei de ansamblu a figurii, sau dacă îl găsim printr-un procedeu de măsurare oarecare. Dacă apar deosebiri, ele nu se datoresc decît unei imperfecţiuni retuşabile. Ele nu sînt rezultatul unor deosebiri esenţiale în natura celor două modalităţi de considerare a figurii. La fel, pentru cele trei probleme puse de noi copiilor : drumul cel mai scurt de la un punct la o dreaptă, plasarea unui punct într-un cadru de referinţă după un model dat, găsirea locului geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date.

Există deosebiri interesante între aceste probleme sub raportul cerinţelor psihologice, fiecare dintre ele relevînd alte aspecte în constituirea conceptelor figurale. Dar în toate aceste cazuri, soluţia nu mai este obligată să oscileze între două moduri de interpretare radical opuse. Acest gen de probleme ne-a permis să urmărim procesul *organizării interne a conceptului figural,* procesul fuziunii dintre conceptual şi intuitiv, al subordonării imaginii intuitive, spaţiale faţă de normele conceptuale.

Scanned with OKEN Scanner

Faptul esențial este că, *în aceste cazuri, obținem de la o vîrstă la alta, de la o clasă la alta progrese continui, fără oscilații.* Aceste progrese sînt dependente de activitatea școlară a copilului, de activitatea sa practică, de influențele instructiv-educative generale. Chiar și în trecereae de la clasa a IV-a la clasa a V-a — clasă la care, cum am văzut, nu se preda geometria atunci cînd ne-am făcut cercetările — se înregistrează progrese de același ordin.

Se înțelege, pentru constituirea deplină a conceptului figural este necesară desăvîrșirea ambelor procese : atît procesul de abstractizare cît și procesul de conceptualizare. Prin investigația noastră, noi am disociat — relativ, bineînțeles — cele două fenomene. Pentru a stabili corect poziția unui punct în plan cu ajutorul a două coordonate nu este neapărat necesar să te situezi în domeniul abstracțiilor. Cu alte cuvinte, această evoluție — trecerea de la rezolvarea intuitiv-globală, la rezolvarea sistematică, apelînd la mijloace conceptuale explicite — poate fi, dar poate să și nu fie afectată de cealaltă linie de evoluție, cea de la concret la abstract. Răspunsul nu poate fi dat decît de cercetarea experimentală. Or, cercetarea experimentală ne arată că atunci cînd problema nu implică în mod necesar optarea pentru una din cele două interpretări (concret-abstract), *considerentele respective nu influențează procesul general de conceptualizare a imaginilor.* Tabelele din cuprinsul lucrării (vezi tabelele nr. 13, nr. 17, nr. 18) ne arată progresul continuu (începînd de la clasa a III-a) al răspunsurilor date de copii la problemele respective : drumul cel mai scurt de la un punct la o dreaptă, sistemul de coordonate, mediatoarea segmentului. Aceste progrese exprimă progresele generale ale mijloacelor intelectuale ale copilului în cunoașterea realității înconjurătoare, perfecționarea procedeelor logico-abstracte în interpretarea faptelor.

Există, firește, diferențe în privința vitezei cu care are loc acest progres în funcție de dificultățile specifice fiecărei probleme. În cazul perpendicularei — unde experiența practică vine mai direct în ajutorul construcției logico-intuitive — se înregistrează progresul cel mai spectaculos. „Mediatoarea“ implică, după cum am văzut, suprapunerea unui grup de probleme relativ deosebite (dubla relație, generalizarea, trecerea la considerarea abstractă a punctului și fuziunea între generalitatea conceptuală și structura figurală) — ceea ce face ca pro-

gresul să aibă loc în trepte și, în general, să fie mai lent. Și mai lent este progresul în ceea ce privește coordonatele rectangulare (chiar dacă nu ținem seama de clasa a VI-a — unde elevii învață despre perpendiculare și mediatoare, dar nu învață despre coordonate). „Frîna" în cazul acesta s-a dovedit a fi însăși structura figurilor. Deși între rezultatul obținut pe cale intuitiv-globală și cel obținut pe cale conceptuală (prin coordonate) nu este nici o deosebire, se manifestă aici o anumită dificultate produsă de opoziția netă între caracterul imediat al rezolvării intuitive și caracterul mijlocit, ocolit, al rezolvării prin celălalt procedeu. Cu toată această opoziție, convergența soluțiilor determină îmbunătățirea progresivă a rezultatelor de la o vîrstă la alta.

★

Dacă părăsim prezentarea statistică și urmărim procesul psihologic individual al constituirii conceptelor figurale la copii, ni se dezvăluie și aici o serie de aspecte conflictuale. Dar de astă dată nu mai e vorba de o opoziție de esență, ci de una — ca să zicem așa — conjuncturală : imaginea și conceptul deși țin de planuri deosebite, trebuie pînă la urmă să fuzioneze în structura conceptului figural. Pînă la fuziunea completă însă, pînă la conceptualizarea integrală a imaginii, avem de-a face cu structuri concepto-figurale instabile, a căror componentă intuitivă este ușor desprinsă de sub controlul conceptual și supusă influențelor complexului figural ambiant. Copilul care este capabil să găsească perpendiculara (drumul cel mai scurt de la punct la dreaptă) pe pămînt sau, în anumite condiții, pe foaia de hîrtie, nu mai construiește perpendiculara, în condiții în care poziția dreptei în raport cu cadrul spațial sugerează, intuitiv, alte direcții. Un copil care a desenat cîteva puncte echidistante față de două repere A, B, conform cerințelor, începe la un moment dat să facă perechi de puncte, fiecare la aceeași distanță de A, B. Un copil care indică întîi cele două coordonate necesare pentru stabilirea poziției unui punct, mai adaugă pe urmă, sub influența imaginii, celelalte două distanțe ale punctului la laturile cadrului.

O asemenea instabilitate a formațiilor concepto-figurale am găsit și în legătură cu problemele referitoare la punct și la dreaptă. În acest caz, instabilitatea era accentuată și de conflictul concret-abstract — ca urmare a modului în care erau puse chestiunile.

Scanned with OKEN Scanner

În linii mari se pot lua în considerație următoarele grade de asimilare a conceptelor figurale, în ceea ce privește relațiile dintre intuitiv și conceptual.

1. O primă etapă, pre-geometrică, în care soluția este dată printr-o considerare globală, intuitivă a imaginii. Această cale nu este nelogică sau alogică. Avem de-a face de fapt, cu o logică implicită a cîmpului optic. Cîmpul spațial considerat este organizat, structurat, nu amorf. În această structură se fac confruntări, analize, sinteze, generalizări, raportări simple sau multiple etc. Dar toate aceste operații logice — care fără îndoială se bazează pe activitatea celui de-al doilea sistem de semnalizare, — nu ne sînt date explicit, verbal. Ele sînt implicate nemijlocit în semnificația raporturilor intuitive, spațiale.

Noi nu am urmărit evoluția acestor fenomene întrucît cercetările noastre încep de la vîrsta de 9 ani (și pentru unele aspecte de la 6 ani). Dar din cercetările moderne rezultă clar că punctul de vedere gestaltist este eronat : aceste structuri intuitive nu sînt formații primare, guvernate de legi apriori, ci rezultatul unei activități de reflectare pe care practica copilului și cunoștințele dobîndite din mediul social o perfecționează continuu.

În unele cazuri, această considerare globală, intuitivă, este suficientă pentru a permite copilului să găsească soluția justă (de pildă, centrul unui cerc, distanța de la un punct la o dreaptă, cînd dreapta este paralelă cu baza foii de hîrtie, plasare corectă a unui punct într-un cadru de referință). În alte cazuri însă, acest nivel este insuficient și este necesar un grad oarecare de conceptualizare a procedeelor pentru a se găsi soluția (ca de pildă, în problema distanței de la un punct la o dreaptă cînd dreapta se află într-o poziție oarecare, punctele echidistante față de două puncte date).

2. În a doua etapă, apar elemente conceptualo-verbale explicite, care pot justifica într-o măsură oarecare (uneori corect, uneori greșit, uneori insuficient) soluția găsită. Dar preponderentă rămîne, în această etapă, imaginea intuitivă — figura. Un copil care a găsit centrul unui cerc explică operația efectuată ducînd (de fapt „din ochi") un diametru și găsindu-i mijlocul. Un copil care a stabilit, după un model, poziția unui punct într-un cadru de referință arată că el s-a orientat „după laturi" — ceea ce nu este, de fapt, decît expresia verbală a operației de considerare globală a cadrului de referință etc.

Scanned with OKEN Scanner

În general, se poate constata această opoziție a structurii intuitive a figurii — completă, echilibrată, închegată, — față de eforturile de degajare a mijloacelor conceptuale, degajare care, inițial, strică echilibrul constituit. Este un conflict dialectic extrem de interesant între o formație mai veche, mai săracă în mijloace, dar stabilizată, și un procedeu nou cu posibilități mult mai mari, dar încă labil și a cărui introducere strică un echilibru cîștigat, înainte de a da măsura posibilităților sale.

3. A treia etapă, cea mai interesantă din punct de vedere didactic, este cea a formațiilor concepto-figurale în care componenta conceptuală a devenit preponderentă, fără însă a asigura stabilitatea formațiilor respective. Aceste formații sînt disociabile, supuse unor influențe diverse — și în primul rînd ale cîmpului figural. Cîmpul figural le poate masca, le poate descompune (ca în cercetările lui Iakimanskaia), poate devia direcțiile, dezorganiza procedeele de rezolvare (ca în exemplele citate de noi mai sus).

4. În sfîrșit, ultima etapă, cea a conceptelor figurale caracterizate prin controlul deplin al semnificației imaginii de către concept.

Aceste grade de asimilare ale conceptelor figurale nu sînt decît într-o anumită măsură dependente de vîrsta copilului. Nivelul la care ajunge procesul de conceptualizare a imaginii spațiale (și implicit, de stabilizare a ei) este dependent direct de buna organizare a activității didactice în predarea cunoștințelor de geometrie.

Concluzii pedagogice

Indicații metodice sigure nu se pot obține decît pe baza practicii instructiv-educative, prin experimentarea și verificarea diverselor procedee sugerate de teoria psiho-pedagogică sau de practica însăși, ghidată de această teorie.

Noi, însă, nu am avut încă prilejul unor astfel de cercetări. De aceea, cele ce urmează, nu reprezintă decît cîteva sugestii generale desprinse din cercetările noastre psihologice.

1. Geometria, așa cum se predă în prezent, este de fapt — cum se exprimă un autor — o geometrie „a foii de hîrtie“ — geometrie grafică.

Baza intuitivă este constituită de cîteva referiri la obiectele din clasă (muchea tablei, fața tablei etc.). Se trece apoi, repede, la desen pentru a rămîne aproape exclusiv la acesta.

Scanned with OKEN Scanner

Există aici două erori de bază, rezultat al aceleiași indistincții.

Desenul nu este geometria însăși. Pentru cel care a ajuns la nivelul abstracțiilor geometrice, desenul este procedeul cel mai economic de modelare materială a acestor abstracții. Pentru copilul care n-a ajuns încă la acest nivel, desenul poate constitui o etapă intermediară care să faciliteze trecerea de la considerarea proprietăților spațiale ale obiectului concret la reflectarea aceleiași proprietăți în forma lor conceptualizată.

Aceste două roluri ale desenului în geometrie trebuie net deosebite. Or, acest lucru de obicei nu se face. Masarea preocupărilor didactice pe desen (și adeseori pe desene standard, cum au arătat Mencinskaia, Kabanova-Meller, Zîkova etc.) face ca elevul să nu ajungă, sau să ajungă foarte greu, la sensul fundamental al geometriei : reflectarea generalizată *și totodată eficientă,* a proprietăților spațiale obiective. În cel mai bun caz, elevul se deprinde să manevreze figuri desenate (dar, de fapt, adeseori, nici la aceasta nu ajunge). El are mari dificultăți cînd trebuie să treacă de la abstracțiile geometrice la realitatea concretă — sau invers, pentru că de fapt, legăturile dintre ceea ce și-a însușit elevul drept geometrie și cele două laturi fundamentale — raporturile spațiale obiective, pe de o parte și abstracțiile spațiale științifice, pe de altă parte, sînt foarte slabe.

Toate acestea nu înseamnă că desenul nu trebuie să joace un rol de prim ordin în predarea geometriei. Dimpotrivă. Dar desenul înțeles în funcțiile sale reale. Noi propunem, pe baza rezultatelor obținute, ca în însușirea geometriei să se parcurgă o serie de etape, corespunzătoare particularităților de vîrstă ale copilului.

În cele ce urmează, ne sprijinim și pe teoria acțiunilor mintale a lui P. I. Galperin. După părerea noastră, așa cum am mai arătat această teorie este importantă în special pentru însușirea geometriei. Dintre toate proprietățile obiectelor, proprietățile spațiale sînt cele care reclamă în cea mai mare măsură acțiunea efectivă pentru dezvăluirea lor.

1. În clasele II—III, trebuie să se formeze o bază fermă — pornind de la practic și intuitiv pentru cunoașterea proprietăților și raporturilor spațiale. Noi nu putem decît să schițăm cîteva elemente ale unui astfel de program. Orientarea în spațiul înconjurător în percepție și reprezentare. Capacitatea de reprezentare a unor raporturi spațiale (așezarea în spațiu a unor obiecte) din diverse puncte de vedere. Aprecierea „din

ochi“ a unor distanţe. Măsurători pe teren. Ridicarea unor planuri : clasa, şcoala, curtea şcolii etc. Studiul practic al unor obiecte cu forma geometrică simplă, cu descrierea verbală corespunzătoare (paralelipiped, cub, piramidă, trunchi de piramidă, sferă, cilindru etc.).

2. Clasele IV—V. Trecerea la „geometria grafică“. În acest stadiu, desenul trece pe primul plan, dar nu ca o obiectivare a unor abstracţii elaborate, ci ca o treaptă pentru elaborarea acestor abstracţii. De aceea, în acest stadiu nu va fi vorba de punct fără dimensiuni, de linii „cu o singură dimensiune etc.“. În general, ne vom sprijini, în ceea ce priveşte aceste noţiuni fundamentale, pe cunoştinţele empirice ale copiilor — fără a mai interveni cu definiţii propriu-zise. Copiii ştiu ce este un punct şi el nu trebuie să capete, în acest stadiu, altă semnificaţie decît aceea a punctului desenat. Tot aşa, în legătură cu linia dreaptă (linie pe care o tragem cu rigla).

După părerea noastră, trebuie să se înceapă cu desenarea obiectelor de formă geometrică (despre care a fost vorba mai sus) din diferite poziţii. Această transpunere în plan a unor figuri în spaţiu realizată efectiv de copil ni se pare o acţiune esenţială pentru procesul de abstractizare. Şi pentru că vor exista dificultăţi, propunem să se înceapă cu *desenarea unor elemente* ale obiectelor respective (feţe, mai ales, aşezate în poziţii diferite în raport cu privirea).

După ce se obţin asemenea desene, se trece la studiul proprietăţilor unora dintre figurile plane desenate : dreptunghi, pătrat, triunghi, trapez, cerc etc. Aceste proprietăţi se vor studia inductiv şi descriptiv. (Se formează cu acest prilej şi noţiunile de drepte paralele, unghiuri, drepte intersectate etc.). De exemplu, proprietăţile dreptunghiului : laturi paralele, unghiuri drepte, diagonale egale etc.

Se trece apoi la calculul ariilor.

În tot acest stadiu, domeniul de preocupare rămîne *figura desenată ca reproducere simplificată a unor obiecte sau părţi de obiecte reale.*

Este foarte important ca în acest stadiu să dezvoltăm capacitatea copiilor de a se orienta activ în figura desenată. G. A. Vladimirski [1] a elaborat un sistem de exerciţii care dezvoltă

[1] Г. А. Владимирский, *Экспериментальное образование системы и методики упражнений в развитии пространственного воображения.* Изд. АПН РСФСР, вып. 21, 1941.

capacitatea copiilor de a descoperi în desen figuri mascate de complexul imaginii, capacitatea de a modifica semnificaţia unui element al imaginii în funcţie de figura în care acest element este considerat etc. Toate acestea înseamnă mobilitatea percepţiei, mobilitatea reprezentărilor şi în acelaşi timp subordonarea treptată a dinamicii imaginilor intuitive, faţă de structura conceptuală.

Dar în acest stadiu nu este încă vorba de concepte figurale. Există pe de o parte desenele, clasele de figuri şi pe de altă parte reflectarea generalizată a acestor clase de figuri sub forma conceptelor.

3. Începînd din clasa a VI-a se trece, treptat, la elaborarea abstracţiilor geometrice propriu-zise.

Într-un prim substadiu, despre care nu ştim cît trebuie să dureze — poate în tot decursul clasei a VI-a sau chiar mai mult — *se pregăteşte* această trecere apelînd la o serie de mijloace specifice sugerate de conţinutul capitolelor, dintre care vom menţiona unele.

Procesul de abstractizare este favorizat de :

a) Faptul că se trece de la procedeul descrierii unor figuri date, la cel al construirii figurilor conform unor *reguli de construcţie*. Definiţia ajunge să preceadă sau în orice caz să controleze semnificaţia imaginii [1]. Chiar dacă uneori dăm întîi figura şi apoi definiţia ei, elevul trebuie să înţeleagă că, de fapt, noi am plecat de la această definiţie şi am construit figura conform ei. Ulterior însă, este necesar să se recurgă la procedeul indicat mai sus : construcţia unor figuri numai pe baza definiţiei.

b) În felul acesta se poate ajunge treptat la distincţia între *desen* şi *figura ideală, perfectă* pe care de fapt o avem în vedere. Ar fi indicat să se facă chiar exerciţii speciale în acest sens. De exemplu : elevii desenează pe caietele lor cercuri de aceeaşi rază în culori diferite şi li se cere să rezolve o problemă oarecare. Este influenţat rezultatul problemei de culoarea desenului, de grosimea vîrfului de creion etc. ? Evident că nu. Prin asemenea mijloace, ajutăm copilul să conştientizeze procesul de desprindere a formei ideale de obiectivarea sa grafică şi de subordonare a acestei forme numai faţă de controlul conceptual.

---

[1] Aceasta este, în fond, sensul procedeului utilizat de Galperin şi Talîzina în experimentul lor privitor la predarea noţiunilor geometrice. Numai că acest stadiu, după părerea noastră, trebuie să fie precedat de stadiul concret şi cel grafic.

Scanned with OKEN Scanner

c) **Figurile sînt supuse unor operaţii care,** deşi reproduc acţiuni efective, sînt în realitate acţiuni mintale. E vorba, în primul rînd, de grupul deplasărilor. După părerea noastră e vorba aici de un aspect esenţial care este, în genere, neglijat în predarea geometriei. Nu este nevoie să ajungem în clasa a VI-a la conceptul general de grup. Dar ni se pare destul de simplu — şi în acelaşi timp extrem de important pentru formarea conceptelor figurale ale geometriei — să ne ocupăm sistematic de grupul de deplasări. Problema fundamentală, aşa cum am arătat, este aceea ca elevul *să ajungă să opereze cu abstracţiile geometrice respectînd limitele acestui domeniu de legitate.* Şi aceasta înseamnă că, în primul rînd, el trebuie să ajungă la ideea *proprietăţilor invariante ale figurilor* în raport cu diverse transformări la care sînt supuse. Invariantul fundamental este figura însăşi — cu forma şi dimensiunile respective — atunci cînd e vorba de grupul de deplasări. Avînd în vedere rezultatele cercetărilor psihologice considerăm necesar *să se insiste explicit asupra acestei* invarianţe (ideale) a figurii, atunci cînd este supusă la translaţii sau rotaţii. Dar trebuie, credem, mers şi mai departe. Inspirîndu-ne din axiomele grupului, şi pentru a servi la constituirea cel puţin implicită a conceptului respectiv, ne vom ocupa de combinarea acestor operaţii (avînd ca rezultat tot o operaţie a grupului), de posibilitatea de a reveni la situaţia iniţială. În felul acesta, copilul va fi făcut să înţeleagă, treptat, faptul că se află într-un *domeniu închis de operaţii,* alle cărui hotare nu-i este permis să le calce şi nu le va călca dacă va respecta regulile. Dar aceste reguli sînt reguli ale unor operaţii ideale ca figuri ideale. În anumite cazuri avem operaţii care, deşi imită în natura lor intuitivă operaţii materiale, sînt totuşi irealizabile material ! Pentru a demonstra că un triunghi care are două laturi egale (isoscel), are şi două unghiuri egale, îl răsturnăm făcînd ca fiecare din laturile egale să coincidă prin răsturnare cu egala ei. Or, o asemenea operaţie este imposibilă practic. Triunghiul nu poate fi *în acelaşi timp* şi în poziţia iniţială, şi inversat. E vorba aici de o operaţie pe care numai mintal o putem efectua. Deşi intuitivă, ea implică totuşi o reversibilitate completă, ceea ce constituie încă o dovadă a caracterului dublu, logico-figurativ al entităţilor geometrice.

d) Aceste operaţii — şi în afară de ele toate celelalte care transformă figura (secţionări etc.) — se desfăşoară şi ele în conformitate cu anumite definiţii sau reguli. Rezultatul ce se ob-

Scanned with OKEN Scanner

ţine nu este o simplă constatare. Rezultatul se impune, este necesar. Cu alte cuvinte, operaţiile respective trebuie şi ele să fie perfect controlate conceptual, inserabile deplin într-un raţionament deductiv.

Prin introducerea treptată a figurilor şi a operaţiilor cu ele în raţionamente deductive, aceste figuri şi operaţii nu se desubstanţializează numai, dar se şi „logicizează", fără ca pentru aceasta să fie necesar să-şi piardă aspectul intuitiv-spaţial.

e) După cum arată rezultatele cercetărilor noastre, copiii îşi însuşesc progresiv ideea de infinit în legătură cu linia dreaptă (ceea ce am numit infinit extensiv). Nu este vorba încă de noţiunea propriu-zisă de infinit din matematică. Infinitul copilului este concret şi dinamic. Dreapta infinită este ceva ce în mod concret se construieşte fără oprire, fără obstacol. Cu toate acestea, este vorba de o *acţiune potenţială*, de o acţiune realizabilă numai mintal, conform unei reguli de construcţie. De aceea, formarea ideii de dreaptă infinită (în legătură cu proprietăţile dreptei, cu dreptele paralele, cu drepte avînd diverse funcţiuni (mediatoare, tangente etc.) contribuie la procesul de conceptualizare a imaginilor şi deci la constituirea conceptelor figurale.

f) Ni se pare că un rol important în formarea conceptelor figurale trebuie acordat locurilor geometrice. Cercetările arată că locuri geometrice simple, cum sînt cercul sau mediatoarea, se pot forma ca structuri concrete destul de devreme la copii. Sub influenţa cunoştinţelor de geometrie — în clasa a VI-a — are loc procesul de abstractizare. Importanţa deosebită a locurilor geometrice în formarea conceptelor figurale constă în faptul că în acest caz se explicitează deplin faptul că imaginea geometrică este strict dependentă de un concept, de o regulă de construcţie — figura nefiind altceva decît mulţimea de puncte cu aceeaşi proprietate. Componenta figurală şi cea conceptuală sînt aici perfect puse în evidenţă în interdependenţa lor.

g) Însăşi raportarea sistematică la realitatea obiectivă poate şi trebuie să devină un procedeu util pentru elaborarea conceptelor figurale. Dacă vom da ocazia elevului să confrunte activ schiţele sale cu aspecte spaţiale concrete, în cadrul rezolvării unor probleme, atunci va fi facilitat procesul acesta al abstra-

Scanned with OKEN Scanner

gerii formei spaţiale pure şi controlate conceptual în care se menţin relaţiile esenţiale — sub raport spaţial — comune celor două realităţi deosebite : imaginea grafică şi terenul.

★

Tot complexul de procedee de care am vorbit mai sus — şi la care cercetările metodice vor putea adăuga multe altele — este menit să realizeze, în etapa respectivă, acest obiectiv esenţial : formarea conceptelor figurale, formarea unor entităţi mintale care, fără a-şi pierde intuitivitatea, dobîndesc calităţi conceptuale : esenţialitate, idealitate, invarianţă etc.

Abia după ce această etapă de elaborare a conceptelor figurale a fost parcursă, etapă în care elevul îşi însuşeşte *concomitent* şi tehnica demonstraţiei geometrice — e vorba, de fapt, de două faţete ale unui progres unitar — se trece în clasele mai mari, la predarea sistematică, deductivă a întregii geometrii (fără a se părăsi figurile).

Aceste procedee — şi încă multe altele — se găsesc expuse în diverse metodici şi manuale. Ceea ce vrem noi să subliniem, pe baza rezultatelor obţinute, este necesitatea predării etajate a geometriei, dar în alt sens decît se face în prezent acest lucru pentru diversele discipline. Nu ne referim numai la necesitatea lărgirii treptate a ariei de cunoştinţe şi nici la simpla modificare a raportului de la o clasă la alta, dintre elementele intuitive şi cele abstracte.

Ceea ce propunem noi este ca în această predare etajată, fiecare stadiu să exprime un punct de vedere deosebit în considerarea obiectului însuşi al disciplinei de care ne ocupăm, dar în aşa fel încît în cursul fiecărui stadiu să se pregătească trecerea la punctul de vedere al stadiului următor.

În primul stadiu, obiectul de studiu îl constituie proprietăţile spaţiale ale obiectelor concrete. Dar chiar în cursul acestui stadiu, copilul trece treptat la utilizarea desenului pentru o mai bună cunoaştere, pe baza *acţiunii* de a desena, a proprietăţilor respective. În al doilea stadiu, imaginea grafică însăşi devine obiectul principal de preocupare (fără a se uita că e vorba de reproducerea schematizată a unor însuşiri obiective). Dar acest stadiu serveşte şi ca o treaptă în procesul de abstrac-

tizare înfăptuit în al treilea stadiu, prin simplul fapt că ne străduim să reţinem în desen numai aspectele spaţiale — iar dintre acestea numai o parte — neglijînd complet alte aspecte.

După părerea noastră, această predare etajată a geometriei va permite evitarea şocului dintre caracterul abstract al geometriei şi orientarea realist-concretă, în plin progres, a gîndirii copilului, evitarea oscilaţiilor, a recăderilor determinate de această contradicţie.

În acelaşi timp, acest program, credem noi, va favoriza procesul de conceptualizare a imaginilor spaţiale, aşa încît acestea să devină modalităţi stabile de reflectare a realităţii obiective, inserabile deplin într-un raţionament deductiv, eficiente în rezolvarea problemelor teoretice şi practice.

Scanned with OKEN Scanner

ФИГУРНЫЕ КОНЦЕПТЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИРОДЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ ЭВОЛЮЦИИ В ОНТОГЕНЕЗИСЕ

РЕЗЮМЕ

Психологический анализ геометрических фигур приводит нас к выводу, что они представляют собой формы отражения, которые не могут быть отнесены ни к собственно понятиям, ни к представлениям. Эти умственные элементы обладают всеми свойствами понятия: они являются абстракциями, отражающими в идеализированной, чистой, неизменной форме существенные черты, общие одному и тому же классу предметов. Однако, в то же самое время они принадлежат и к области конкретных образов, так как являются пространственными изображениями, характеризующимися формой и размерами.

Между геометрической фигурой как таковой и ее материализированным изображением (чертеж или же его представление) в определенной мере существует такое же соотношение, как и между значением и его звуковым словесным выражением. Без чувственного выражения невозможны существование, перенос, манипуляции значения, несмотря на то, что значение является чем-то иным, нежели соответствующая звуковая структура. В этом смысле и геометрическая фигура является значением (значением, представленным графической моделью), таким, которое по своей структуре наглядно.

На первый взгляд кажется, что здесь существуют только две грани: с одной стороны, понятие, с другой — чертеж (или же материальный предмет). В действительности же, геометр при решении задачи не имеет дела ни с чистыми понятиями, представленными словесными знаками или знаками

другого рода, ни с материальными свойствами изображаемого предмета. Он передвигает, вращает, накладывает одно на другое, располагает в обратном порядке, разделяет чистые пространственные изображения, выраженные в материальной форме. Это чистое пространственное изображение не может существовать иначе, как на основе какого то понятия — определения, правила построения. Однако не само понятие разделяется, переворачивается, вращается, а соответствующая фигура, задуманная при помощи комплекса материально-конкретных свойств чертежа или его представления. Как фигура, так и действия, которым она подвергается, воспроизводят *наглядно*, но в абстрактном виде конкретные материальные формы и действия. Как фигура, так и действия, которым она подвергается, прошли через процесс очистки, выявления сущности, придавший им свойства понятия.

Полученный таким образом результат, так же как и любое понятие, можно включить в динамику строгого суждения математического типа.

Геометрическая фигура не является простым связующим звеном между абстракцией и наглядной ступенью отражения. Она представляет собой специфический умственный продукт; ее существенное качество состоит в том, что она предоставляет мыслительным операциям, в которые она включается, возможность непрерывного прогресса, бесконечного в познании действительности при сохранении все же логической необходимости.

Эти умственные формации, называемые нами «фигурными концептами», относятся к более обширному классу изображений-абстракций, часто встречающихся в научном мышлении, наглядных изображений, более или менее абстрагированных, со свойствами понятия, но главная роль которых является одной и той же: сохранение продуктивного конструктивного характера мышления в процессе отражения неисчерпаемого богатства действительности, без ущерба для логической правильности.

Специфика фигурных геометрических концептов заключается в том, что процесс получения ими свойств понятия является почти полным; это позволяет, в очень широких пределах, сохранить исследование на уровне умственных операций, а ход суждения излагать в строго дедуктивной

Scanned with OKEN Scanner

форме. На этой стадии сеть понятий может отделиться от наглядной грани и сформировать самостоятельную, чисто логическую совокупность — аксиоматическое изложение геометрии.

Возможность такой «математизации» науки о пространственных отношениях в основном выражает *большую степень отделимости этой закономерной области.*

Однако, всеобщая связь не означает бесформенного запутанного смешения явлений материального мира. Объективная реальность организована по закономерным областям (обстоятельство, вытекающее как из систематичности наук, так и из исторического характера их образования), внутри которых взаимозависимости достигают большого удельного веса. Эти области взаимодействующи и не изолированы друг от друга. Они находятся в более или менее тесной взаимозависимости в рамках обширной иерархической системы. Мышление в своей структуре и динамике стремится отразить эту объективную иерархизацию закономерных областей. Однако выяснилось, что пространственные свойства в состоянии образовать закономерную область почти замкнутую, почти полностью отделимую от совокупности других областей, практически совершенно независимую от остальных областей в пределах средних размеров.

Чтобы отделиться от непосредственного контакта с практикой и удержаться — временно — в плане абстракций, не доходя все же до фикций, мышление нуждается во внутреннем контроле. Этот внутренний контроль, создаваемый законами логики, разработанными в свою очередь на основе длительной социальной практики, выражен очень хорошо в условиях математической группы (понятие, впервые введенное в психологию Жаном Пиаже). Мы имеем в виду прежде всего основное условие: произведение двух элементов системы должно дать элемент системы. Это означает, что ряд мыслительных операций должен развертываться таким образом, чтобы — соблюдая основные инварианты — не выходить за пределы данной закономерной области. Выход за эти пределы или потребует вступления в определенную, более широкую область, или — в конечном счете — возобновления связи с материальной реальностью, на основе практики. Таким образом, чем меньше будет взаимозависимость одной закономерной области по отношению к другим областям, тем большей будет возможность сохранения операций

активного познания — исследовательских — в плане абстракций без риска скатиться к фикциям, а следовательно, тем более полной будет степень получения свойств понятия используемыми изображениями. Это, в первую очередь, относится к *числам*, которые, выражая собой чисто количественные соотношения — не имея никакого отношения к конкретному содержанию, что обязывало бы к различным взаимозависимостям — образуют совершенно независимую закономерную область. Это относится также к пространственным соотошениям, которые — неполностью, но в очень широких пределах — обладают относительной независимостью и, таким образом, включаются в математические дисциплины. Геометрическая фигура — первоначально непосредственное изображение материальных форм, исследуемых экспериментально — очистилась, приобрела свойства понятия и стала составляющим элементом некоторых логических операций. Из совокупности приобретенных человечеством знаний о свойствах пространственных отношений в определенный момент выделилась область *форм* как таковых, область, выраженная в группе G_5 пространственных подобий: в соответствии с этим критерием эвклидова геометрия определила свои рамки, охватив, таким образом, гораздо большие свойства, чем элементарная метрика. Геометрическое суждение, хотя и прибегает к изображениям, не обременено наличием размерных аспектов и, таким образом, располагает степенью обобщения, требуемой эвклидовой геометрией — геометрией неизменных пространственных форм. С психологической точки зрения это расслоение между формой и размерами возможно потому, что в представлении размеры не возникают непосредственно, а появляются благодаря значению изображения. Спецификация с помощью размеров происходит лишь тогда, когда это становится необходимым для восстановления связи с материальной реальностью.

★

Основываясь на этих общих теоретических предпосылках, мы поставили себе задачей проследить, каким образом в процессе развития мышления ребенка образуются особые формы отражения — *фигурные концепты*.

Проблема эволюции геометрических познаний ребенка уже рассматривалась в литературе. Нас интересовал глав-

ным образом сам процесс приобретения свойств понятия пространственными образами — от первоначального образа конкретного предмета до чисто пространственного, проверенного понятием, полностью включающегося в суждение наглядного образа, который чувственно запечатлевается только в той мере, в какой это необходимо для сохранения действенности операций, связанных с ним.

Здесь выделились два основных аспекта:

1. Мысленное выделение чистых пространственных свойств из комплекса материальных свойств конкретного предмета и преобразование их в абстракции, в понятие.

2. Эволюция отношений между наглядным образом и понятием: процесс слияния образа с понятием, подчинения образа понятию.

Первый аспект, касающийся соотношения конкретное-абстрактное, относится прежде всего к *природе* геометрических элементов, к тому, каким образом эта природа рассматривается ребенком.

Второй аспект относится прежде всего к *внутренней организации геометрических элементов*, как форм отражения в области соотношения понятие-образ.

Очевидно, что эти два аспекта находятся в тесной взаимозависимости, но без того, чтобы один сводился к другому — обстоятельство, подтвержденное результатами наших исследований.

В наших исследованиях мы занялись несколькими элементарными геометрическими понятиями, рассмотрение которых приводит к вышеупомянутым проблемам. В первую очередь исследовали *точку* и *прямую линию* — начальные геометрические понятия, которые благодаря своей специфике выявляют как, в особенности, конфликтное соотношение конкретное-абстрактное, так и, без сомнения, соотношение наглядное-понятийное.

Во-вторых, мы занялись понятием *расстояния*, *геометрического места* (перпендикуляр, восставленный в середине отрезка) и *системы координат*, которые выявляют, главным образом, связь между *наглядным* образом и *понятием*, поскольку здесь речь идет не о рассматривании данных элементов, а о способах активной ориентировки в пространственном поле.

Что касается точки и прямой, то этот вопрос был рассмотрен под разными углами зрения таким образом, чтобы

можно было сравнить *применение* соответствующих понятий и образов, в различных наглядно-логических контекстах, с *определением* тех же самых элементов.

В связи с последними тремя геометрическими понятиями, мы, вообще, сравнили и практические способы решения, с пояснением в словесно-логическом плане применяемых средств.

Эволюция соотношения конкретное-абстрактное при образовании фигурных понятий. Что касается толкования природы геометрических фигур, то можно выделить три главных тенденции: а) материализованное толкование, б) графическое, в) абстрактное.

а) В первом толковании геометрическая фигура может существовать только как материальный предмет: точка — крошечный предмет, имеющий форму, размеры и даже вес. Прямая линия — это хорошо натянутая проволока, жесткий брус, нитка и т.д. Четыре линии при пересечении образуют точку больше и тяжелее, чем две линии. При переходе от прямой линии к ломаной существует опасность ее разрыва, если она не достаточно гибка.

б) Второе толкование, графическое, находится посередине между материализованным и абстрактным толкованиями. Геометрическая фигура — это *рисунок*, графическая конструкция (речь идет о фигурах на плоскости). Следовательно, она двуразмерная, что, само собой понятно, составляет уже прогресс в направлении абстрактизации. Точка, в этом смысле, имеет величину, форму, но у нее нет веса. Линия не разрывается, когда становится ломаной, т.к. «она не может покинуть рисунка», «она не может отлепиться от листа». В этом смысле геометрическая фигура является результатом действия субъекта и ее качества зависят от качества действия: «Прямая линия не разрывается, потому что она проведена рукой», «Прямая линия — это линия, проведенная прямо».

в) Третье толкование, собственно геометрическое, это то, которое рассматривает геометрические элементы как абстракции, а материальную модель или рисунок — только как способы конкретизации соответствующих абстракций.

Эти типы толкования частично соответствуют тем, что были найдены Дешаном и Мишо в 1947, 1949, 1951 гг. Главное различие между этими авторами и нами состоит в том, что мы настойчиво указываем на отражательный характер этих типов толкования. Эти типы являются ничем иным,

Scanned with OKEN Scanner

как ступенями абстрактизации, которые ведут к все более чистым и общим формам отражения.

Второе различие — если отложим в сторону проблему терминологии — относится к группе толкований, названных Дешаном и Мишо *прагматической*, а нами графической. Действительно, у некоторых соответствующих субъектов проявляется забота об акте построения фигуры, особенности которой связаны, в частности, с особенностями *графического пространства*. Это, как нам показалось, является общей характерной чертой. (Акт построения фигуры, в действительности , может быть принят во внимание при всех трех толкованиях).

Результаты наших исследований показывают, что эти три типа толкования не чередуются просто, заменяя один другой. Первый важный вывод заключается в том, что в общей эволюции приходится иметь дело не с непрерывным прогрессом, от материализованного толкования к абстрактному, а с колебаниями, выражающими чередование фаз прогресса с фазами регресса (с точки зрения абстрактизации). В некоторых случаях, чаще при переходе из IV-го класса в V-ый, растет частота как «материализованных» ответов, так и «абстрактных», причем рост первых более резко выражен. Эти колебания не всегда бывают синхронными для разных видов геометрических фигур.

Главными моментами, которые можно выделить, являются следующие: преобладание материализованного толкования во II-ом классе, наличие различных форм толкования в III-ем, преобладание графического толкования в IV-ом классе, возврат к материализованному толкованию в V-ом, преобладание абстрактного толкования в VI-ом классе.

За пределами этих колебаний можно отметить некоторые тенденции, касающиеся процесса создания различных геометрических элементов. Таким образом, в связи с точкой: первое материальное свойство, от которого отвлекается ребенок, это — *вес*. За этим следует *величина* (воспринимаемая двуразмерно) и, наконец, *форма*.

Как объяснить зарегистрированные чередования и несоответствия?

Анализ ответов, полученных от детей, указывает на то обстоятельство, что нам приходится иметь дело с двумя сталкивающимися существенными факторами. Первый относится к общему умственному развитию детей.

Scanned with OKEN Scanner

Вообще, речь идет о развитии мышления ребенка от конкретного к абстрактному.

В этом отношении, однако, нужно принять во внимание различие, которое кажется нам очень важным для нашей задачи. А именно, различие между абстракциями как моментами, как составляющими элементами мыслительных процессов и приемов, и абстракциями, объединенными в более или менее широкие автономные системы, которые сами в определенный момент могут явиться предметом исследования. Ясно, что это различие — относительно, в виду того, что в последнем счете познание должно дойти до практики, а следовательно и до овладения конкретным. Однако, как мы уже указывали, научное познание выделяет закономерные области, которые в зависимости от степени их выделяемости могут рассматриваться — временно — как независимые, исследование же может осуществляться только над соответствующими мысленными отражениями, над абстракциями. С точки зрения генетической психологии, между этими двумя функциями абстракций имеется резкое различие.

Что касается познавательных *средств*, то здесь, действительно, наблюдается прогресс в смысле совершенствования логических приемов и используемых абстракций.

Что же касается ориентировки познания, выражающейся как в *целях*, так и в *интересе*, то здесь до 12—13 лет основным направлением является конкретно-реалистическое. Ребенок совершенствует свои познавательные средства (подразумеваются применяемые абстракции) *в смысле более полного, богатого, конкретного, объективного отражения предметов в их конкретной реальности.* Затруднения появляются в тот момент, когда абстракции теряют свою роль звена в исследовательском процессе и сами выступают в качестве самостоятельных объектов познания, объединенных в более или менее сложные системы.

Когда действия с этими абстракциями могут быть организованы в постоянные алгорифмы, как это имеет место в арифметических или алгебраических расчетах, тогда затруднение, в определенной мере, устранено. Но когда эти алгорифмы играют меньшую роль, когда ребенок вынужден выполнять построения, более или менее независимые, в рамках абстрактных систем, тогда затруднения проявляются во всей своей полноте.

Scanned with OKEN Scanner

Между главным направлением, по которому направлен прогресс познания ребенка, и требованиями, предъявляемыми этими областями познания, возникает довольно трудно преодолимый конфликт.

Такое положение создается в геометрии. Геометрия заставляет ребенка оперировать абстрактными элементами, исследовать их свойства или применять уже известные свойства в новых комбинациях.

То обстоятельство, что эти элементы являются образами, фигурными концептами, не упрощает положение, а усложняет его в высшей степени.

Этим противоречием, часто остающимся вне дидактического контроля, объясняется составление большого числа умственных гибридных формаций, нарушающих умственную деятельность ребенка при усваивании геометрических знаний; *явления умственного симбиоза между противоположными мотивациями, наслоениями и смысловыми интерференциями и т.д.*

Речь не идет здесь о забывчивости, так как наши вопросы не относились к усвоенным в классе познаниям. Наши вопросы имели в виду тип толкования геометрической фигуры, который должен быть усвоен в процессе оперирования этими фигурами.

Если бы общий прогресс мышления ребенка содействовал и прогрессу операций с системами абстракций, тогда эффект преподавания геометрии на определенном этапе не оказался бы таким мимолетным. Что же происходит на самом деле? В V-ом классе повсеместно, — причем, как мы уже указывали, имеются в виду проблемы, не связанные непосредственно с школьными знаниями, — у детей *тенденция к конкретному, материализованному толкованию геометрических фигур проявляется гораздо сильнее, чем в IV-ом, а иногда даже и в более младших классах.* В наших исследованиях это обстоятельство было отмечено в связи с природой геометрической точки, с числом точек, располагаемых между двумя реперами, в связи с природой прямой линии и с возможностью ее продления и т.д. (см. таблицы 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11).

Как уже упоминалось, по Пиаже, мышление, достигшее уровня операции, проходит через две стадии: стадию конкретных операций (7—12 лет) и стадию формальных операций (после 12 лет).

Scanned with OKEN Scanner

По нашему мнению, это разделение не оправдывается фактами. В первую очередь, *конкретное* и *формальное*, будучи противопоставлены, не выражают те же самые критерии классификации. Формальное суждение является суждением, не относящимся ни к какому содержанию — конкретному или абстрактному.

Пиаже приводит следующую задачу, неразрешимую для ребенка в возрасте 7—8 лет: «Сколько желтых цветов в моем букете?» спрашивает ребенок своих сестер. Первая отвечает: «Тогда все твои цветы — желтые». Другая: «Часть цветов — желтые», а третья говорит: «Ни одного». Которая из них права?

Пиаже объясняет затруднение ребенка тем, что от него требуют примениться не к реальному положению вещей, а к воображаемому; решение же находится в зависимости от правильности формальной структуры рассуждения.

В действительности же, встреченное в данном случае ребенком затруднение зависит от сложности системы соотношений, вмешивающихся в суждение. Ребенок может судить очень хорошо и о воображаемых положениях, очень часто встречающихся в его играх.

По нашему мнению, реальное противопоставление, интересующее нас в развитии мышления ребенка, относится к *содержанию*, к *объекту* мыслительных операций: *несмотря на постоянное усовершенствование своих абстрактно-логических средств, мышление ребенка остается направленным к объективно-конкретному представлению предметов.*

★

Соотношения между наглядным и абстрактным при образовании фигурных понятий. С этой точки зрения эволюция различна. Абстрактное и наглядное не представляют собой два противоположных типа толкования пространственных свойств, из которых каждый может привести к разным выводам в зависимости от точки зрения, которую принимаем.

В принципе центр круга является одним и тем же, независимо от того, найдем ли мы его при помощи наглядного полного рассмотрения совокупной формы фигуры, или при помощи какого-нибудь измерительного метода. Если и возникают различия, то лишь благодаря поправимому несовер-

Scanned with OKEN Scanner

шенству метода. Они не являются результатом существенных различий в природе этих двух типов рассмотрения фигуры. То же наблюдается и при решении трех задач, предложенных нами детям: наикратчайшее расстояние от какой-либо точки до прямой, расположение точки в соответствии с данными координатами, нахождение геометрического места точек, равнорасположенных от двух данных точек.

Между этими задачами имеются интересные различия, с точки зрения предъявляемых ими психологических требований, поскольку каждая из них выявляет другие аспекты при образовании фигурных концептов. Но во всех этих случаях решение не обязано больше колебаться между двумя радикально противоположными типами толкования. Эти задачи позволили нам проследить процесс *внутренней организации фигурного концепта*, процесс слияния абстрактного с наглядным, подчинения наглядного, пространственного образа понятийным нормам. Существенным здесь является то, *что в этих случаях мы добиваемся непрерывного, без колебаний, прогресса по мере роста ребенка, по мере перехода его из одного класса в другой.* Этот прогресс зависит от школьной деятельности ребенка, от его практической деятельности, от общего учебно-воспитательного фактора, но не зависит от свежести преподанных геометрических знаний. Даже при переходе из IV-го класса в V-ый, в котором геометрия не преподается, отмечается подобный прогресс. Таблицы, содержащиеся в книге (см. таблицы №№ 13, 17, 18), показывают непрерывный прогресс (начиная с III-го класса) в ответах детей на соответствующие задачи: наикратчайший путь от точки до прямой, система координат, перпендикуляр, восставленный в середине отрезка.

Сравнивая наши результаты с результатами, полученными Пиаже относительно геометрического места (перпендикуляр, восставленный в середине отрезка) и системы прямоугольных координат, устанавливаем, что в общих чертах они сходятся (мы приводим в дополнение статистические данные).

Таким образом, в разрешении первой задачи мы получили следующие этапы:

1. Понимание идеи равного расстояния для одной точки.
2. Возможность нахождения большого числа точек, удовлетворяющих соответствующим условиям.
3. Обобщение правила нахождения точек, благодаря открытию способа их расположения в ряду (по прямой линии).
4. Осознание того факта, что никакая другая точка, не расположенная в ряду, не удовлетворяет условию.

5. Идея, как таковая, геометрического места (абстрактная прямая как совокупность точек, удовлетворяющих соответствующему условию).

В результатах, полученных Пиаже, этапы 3, 4, 5 до некоторой степени сливаются.

Что касается координат, нами были отмечены следующие этапы:

1. Начальный этап с решением полностью наглядным, без возможности выяснения координат.

2. Выделение соотношений между двумя точками, символизированными соединяющим их отрезком прямой.

3. Выделение одной координаты (в особенности в V-ом классе, в 11—12 лет).

4. Выделение двух координат (в особенности в VI-ом классе, в 12—13 лет).

Между 3 и 4 этапами существуют переходные формы, состоящие из начертания 3 и 4 отрезков, что свидетельствует о еще неопреодоленном влиянии фигурного изображения.

★

Что касается фигурно-концептивных отношений, то в общих чертах можно указать на следующие степени усвоения фигурных концептов.

1. Первый этап, догеометрический, на котором решение получается с помощью общего наглядного образа. Этот путь не является нелогичным или алогичным. В действительности, здесь мы имеем дело с внутренней логикой оптического поля. Рассматриваемое пространственное поле не бесформенно, оно организовано, имеет свою структуру. В этой структуре осуществляются сравнения, анализы, синтезы, обобщения, простые или сложные отношения и т.д. Но все эти логические операции — основывающиеся без сомнения на второй сигнальной системе — не даны нам в ясной словесной форме. Они содержатся непосредственно в значении наглядных пространственных отношений.

2. На втором этапе появляются ясно выраженные понятийно - словесные элементы, которые в некоторой степени могут обосновать (иногда правильно, иногда ошибочно, иногда недостаточно) найденное решение. Но преобладающим, на этом этапе, остается наглядное изображение — фигура. Ребенок, нашедший центр круга, объясняет совершенное действие, проводя (практически «на глазок») диаметр и находя его середину. Ребенок, установивший по образцу положение точки в рамках указанных координат, говорит, что он ориентировался «по сторонам» — что, в действительности, является ничем иным, как словесным выражением операции по совокупному рассмотрению координат и т.д.

Scanned with OKEN Scanner

В общем, здесь можно установить эту противоположность наглядной структуры фигуры — полной, уравновешенной, прочной — по сравнению с усилиями, потраченными на выработку логических средств, выработку, которая первоначально нарушает созданное равновесие. Это в высшей степени интересный диалектический конфликт между более старой, более бедной средствами, но устойчивой формацией и новым способом, располагающим более обширными возможностями, но пока еще неустойчивым, применение которого первоначально, прежде чем проявятся все его преимущества, нарушает добытое равновесие.

3. Третий этап, самый интересный с дидактической точки зрения, это этап понятийно-фигурных формаций, когда абстрактное мышление стало преобладать, но еще не обеспечивает устойчивости соответствующих формаций. Эти формации могут распадаться и подвергаются разным влияниям, в первую очередь, фигурного поля. Фигурное поле может их маскировать, разложить (как в исследованиях Якиманской), может отклонить направление, дезорганизовать способы решения (как в примерах, указанных нами выше).

4. Наконец, последний этап — это этап фигурных концептов, характеризующихся тем, что понятие осуществляет полный контроль значения образа.

Эти степени освоения фигурных концептов лишь в определенной мере зависят от возраста ребенка. Уровень, достигаемый в процессе приобретения свойств понятия пространственным образом (и, разумеется, его устойчивость), прямо зависит от хорошей организации дидактической деятельности при преподавании геометрии.

Учитывая эти данные, мы предлагаем преподавание геометрии по этапам, когда от одного этапа к другому меняется точка зрения, с которой рассматривается сам предмет этой дисциплины.

1. Во II-ом и III-м классах должна создаваться прочная, база, исходя из *практического и наглядного*, для познания пространственных свойств и отношений. Мы можем только наметить некоторые элементы подобной программы. Ориентировка в окружающем пространстве при помощи восприятия и представления. Способность представления пространственных отношений (расположение предметов в простран-

стве) с разных точек зрения. Оценка расстояний на глаз. Измерения местности. Черчение планов: класса, школы, школьного двора и т.д. Практическое изучение предметов простой геометрической формы, с соответствующим устным описанием (параллелепипед, куб, пирамида, усеченная пирамида, шар, цилиндр и т.д.).

2. В IV—V классах происходит переход к «графической» геометрии. В этой стадии, чертеж находится на первом плане, но не как конкретизация выработанных абстракций, а как ступень для их выработки. Поэтому, в этой стадии еще ничего не говорится о безразмерной точке, о линии «с одним размером» и т.д. Вообще, в том, что касается этих основных понятий, мы будем опираться на эмпирические познания детей, не пользуясь собственно определениями. Дети знают, что такое точка, и в этой стадии им не нужно другого значения кроме значения начерченной точки. То же самое относится и к прямой линии (проведенной с помощью линейки).

По нашему мнению, следует начать с начертания предметов геометрической формы (о которых говорилось выше) с разных позиций. Это перемещение пространственных фигур в план, осуществленное ребенком, представляется нам существенным действием в процессе абстрактизации. И имея в виду, что здесь встретятся определенные трудности, мы предлагаем начать с *начертания отдельных элементов* соответствующих предметов (особенно, граней, расположенных под разными углами).

От этих чертежей переходят к изучению свойств некоторых из начерченных плоскостных фигур (прямоугольник, квадрат, треугольник, трапеция, круг и т.д.). Эти свойства изучаются индуктивно и описательно (в связи с этим формируются понятия о параллельных линиях, пересеченных линиях, углах, и т.д.). Например, свойства прямоугольника: параллельные стороны, прямые углы, равные диагонали и т.д. Переходят также к расчету поверхностей.

В течении всего этого этапа предметом изучения остается *начерченная фигура как упрощенное воспроизведение предметов или частей реальных предметов.*

3. Начиная с VI-го класса постепенно переходят к выработке собственно геометрических абстракций.

В первой подстадии, продолжительность которой нам неизвестна — может в течение всего VI-го класса, а может

быть и дольше — *подготовляется* этот переход, прибегая к специфическим средствам (о некоторых из них мы будем говорить ниже), в зависимости от содержания глав.

Процессу абстрактизации способствует:

а) То обстоятельство, что от описательного способа данных фигур переходят к способу построения их согласно некоторым *правилам построения.* Определение, таким образом, предшествует или же, во всяком случае, контролирует значение изображения. Этим путем постепенно можно дойти до понимания разницы между *чертежом и идеальной, совершенной фигурой*, которую фактически мы имеем в виду.

б) Фигуры подвергаются операциям, которые хотя и воспроизводят фактические действия, в действительности являются умственными действиями. Речь идет, в первую очередь, о группе движений. По нашему мнению, это один из существеннейших моментов, которым при преподавании геометрии, как правило, пренебрегают. Нет необходимости, чтобы в VI-ом классе было усвоено общее понятие группы. Но мы считаем, что систематическое ознакомление с группой движений — дело довольно несложное — играет чрезвычайно важную роль в образовании фигурных геометрических понятий. Основной задачей, как мы уже указывали, является то, чтобы ученик *смог оперировать геометрическими абстракциями в пределах этой закономерной области.* А это означает, что, в первую очередь, он должен усвоить *идею неизменности свойств фигур* по отношению к различным преобразованиям, которым они подвергаются. Основным инвариантом является сама фигура — с соответствующими размерами и формой — когда говорится о группе движений. Принимая во внимание результаты психологических исследований, мы считаем, что необходимо *особо подчеркивать эту* неизменность (идеальную) фигуры при ее перемещении или вращении. Но, разумеется, нужно идти еще дальше. Исходя из аксиом группы, с целью содействовать образованию соответствующего понятия, надо приступить к комбинированию этих операций (получая в результате опять таки операцию группы), исследовать возможность возврата к начальному положению. Таким образом ребенок постепенно придет к пониманию того факта, что он имеет дело с *замкнутой областью операций*, пределы которой нельзя переступать, и он их не переступит, если будет соблюдать определенные правила.

в) Эти операции — а также и все другие, ведущие к преобразованию фигуры (сечения и т.д.) — развертываются согласно известным определениям или правилам. Получаемый результат не является простой констатацией. Результат обязателен, он необходим. Другими словами, соответствующие операции должны, в свою очередь, полностью подчиняться контролю понятия, полностью включаться в дедуктивное суждение.

Постепенное введение фигур и операций в дедуктивные суждения содействует тому, что эти фигуры и операции не только теряют свою материальную сущность, но и становятся логичными, без того чтобы была необходима при этом утрата их наглядно-пространственного аспекта.

г) Как показывают результаты наших исследований, дети прогрессивно усваивают идею о бесконечности, связанную с прямой линией (названную нами экстенсивной бесконечностью). Речь не идет еще о математической бесконечности как таковой. Бесконечность понимается ребенком конкретно и динамически. Бесконечная прямая это та, которая создается конкретно, без остановки, без препятствий. Несмотря на это, речь все же идет здесь о *потенциальном действии*, действии, выполняемом только умственно, согласно правилу построения. Поэтому образование идеи о бесконечной прямой (в связи со свойствами прямой, в связи с параллельными прямыми, прямыми, обладающими разными функциями — перпендикуляр, восставленный в середине отрезка, тангенсы и т.д.) содействует процессу приобретения изображениями свойств понятий, а следовательно, образованию фигурных концептов.

д) По нашему мнению, важную роль в образовании фигурных концептов играют геометрические места. Исследования показывают, что понятия простых геометрических мест, как круг или перпендикуляр, восставленный в середине отрезка, могут образоваться у детей, как конкретные структуры, довольно рано. Под влиянием геометрических познаний — в VI-ом классе — происходит процесс абстрактизации. Особое значение геометрических мест при образовании фигурных концептов заключается в том, что в этом случае полностью выявляется факт строгой зависимости геометрического изображения от понятия, от правила построения, поскольку фигура является ни чем иным, как множеством точек с одинаковыми свойствами. Таким образом, здесь со

Scanned with OKEN Scanner

всей очевидностью видна взаимозависимость содержания фигуры и содержания понятия.

е) Само систематическое обращение к объективной реальности может стать полезным приемом в выработке фигурных концептов. Если мы создадим ученику возможность при решении задач сверять свои чертежи с конкретными пространственными формами, то это облегчит процесс абстрагирования чистой, контролируемой понятием пространственной формы.

Сущность нашего предложения заключается именно в этом ступенчатом преподавании, когда каждая его стадия выражала бы новую точку зрения в рассмотрении самого предмета геометрии, но таким образом, чтобы в течение каждой стадии подготовлялся переход на точку зрения следующей стадии.

По нашему мнению, это ступенчатое преподавание геометрии позволит избежать столкновения между абстрактным характером геометрии и конкретной реалистической, постоянно развивающейся ориентировкой мышления ребенка, избежать колебаний, непонимания, вызываемых этим противоречием.

В то же время мы считаем, что этот прогресс будет содействовать процессу приобретения пространственными изображениями свойств понятия, так что они станут устойчивыми формами отражения объективной реальности, полностью включающимися в дедуктивное суждение, действенными при решении теоретических и практических задач.

Scanned with OKEN Scanner

LES CONCEPTS FIGURATIFS

RECHERCHES THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES SUR LA NATURE DES ENTITÉS GÉOMÉTRIQUES ET LEUR ÉVOLUTION DANS L'ONTOGENÈSE

RÉSUMÉ

L'analyse psychologique des figures géométriques conduit l'auteur à conclure qu'elles représentent des modalités de refléter la realité qui ne sauraient être ramenées ni à des concepts proprement dits, ni à de simples représentations. Ces entités mentales ont toutes les propriétés du concept : ce sont des abstractions reflétant les traits essentiels, généraux, d'une classe d'objets, sous une forme idéalisée, pure, invariante ; mais elles tiennent en même temps du domaine de l'intuitif, en tant qu'images spatiales caractérisées par une forme et des dimensions.

Entre la figure géométrique proprement dite et son image matérialisée (dessin ou représentation de celui-ci) le rapport est jusqu'à un certain point le même qu'entre la signification et son expression sonore sous forme de mots. Sans une expression sensible, l'existence, la communication et le maniement d'une signification sont inconcevables, bien que la signification soit autre chose que la structure sonore correspondante. La figure géométrique est, elle aussi, en ce sens, signification — signification ayant pour support le modèle graphique —, mais signification intuitive par sa structure.

A première vue il semblerait qu'il n'y ait ici que deux côtés : d'une part le concept, d'autre part le dessin (ou l'objet matériel). En réalité, le géomètre ayant à résoudre un problème n'opère ni à l'aide de concepts purs exprimés par des symboles verbaux ou autres, ni à l'aide des propriétés matérielles de l'objet dessiné. Il déplace, soumet à des rotations, superpose, inverse et sectionne des images spatiales pures exprimées sous une forme matérielle. Une image spatiale ne peut exister qu'en

Scanned with OKEN Scanner

vertu d'un concept, d'une définition, d'une règle de construction. Néanmoins ce n'est pas le concept lui-même qui est sectionné, inversé ou déplacé, mais la figure qui lui correspond, figure que la pensée conçoit par-delà l'ensemble de propriétés matérielles concrètes du dessin ou de sa représentation. La figure, aussi bien que les opérations auxquelles elle est soumise, reproduisent *intuitivement*, mais d'une manière idéale, des formes et des opérations concrètes, matérielles. La figure et les opérations auxquelles elle est soumise ont subi un processus d'affinage, de purification, de quintessenciation qui leur ont conféré les propriétés du concept.

Ainsi, le résultat de ce processus est susceptible de s'insérer dans la dynamique d'un raisonnement rigoureux de type mathématique, remplissant des conditions analogues à celles d'un concept proprement dit.

La figure géométrique n'est pas un simple chaînon intermédiaire entre l'abstrait et l'échelon intuitif de la connaissance. Elle est un produit mental spécifique, ayant pour qualité essentielle de conférer aux opérations de la pensée dans lesquelles elle est insérée la possibilité d'un progrès continu et infini dans la connaissance de la réalité, tout en observant la rigueur logique.

Ces formations mentales, que l'auteur nomme *concepts figuratifs*, font partie de la classe plus vaste des images-abstractions, fréquentes dans la pensée scientifique, images intuitives plus ou moins idéalisées et conceptualisées, ayant pour rôle essentiel de sauvegarder le caractère productif et constructif de la pensée en tant que reflet de l'inépuisable richesse de la réalité, sans en compromettre la correction logique.

Le propre des concepts figuratifs de la géométrie est que dans ce domaine la conceptualisation est quasi totale, ce qui fait que l'investigation est capable de se maintenir, dans des limites fort étendues, au niveau des opérations mentales et que la marche du raisonnement peut être reprise sous une forme strictement déductive. Dans cette phase, le réseau conceptuel est susceptible de se détacher du côté intuitif et de former un engrenage autonome purement logique, qui est l'exposé axiomatique de la géométrie.

Cette possibilité de «mathématisation» de la science des rapports spatiaux exprime au fond *l'indépendance relative de ce domaine de lois.*

Scanned with OKEN Scanner

La connexion universelle n'a nullement l'acception d'amalgame amorphe, inextricable des phénomènes du monde matériel. La réalité objective est organisée en domaines de lois (fait qui résulte notamment de la systématique des sciences et de leur mode historique de constitution), à l'intérieur desquels les interdépendances atteignent une forte densité. Ces domaines d'interaction ne sont pas isolés les uns des autres. Ils sont plus ou moins interdépendants à l'intérieur d'un vaste système hiérarchique, et c'est précisément cette hiérarchisation objective des domaines de lois que, par sa structure et sa dynamique, la pensée tend à refléter. Néanmoins les propriétés spatiales se trouvent former un domaine de lois quasi clos et presque entièrement separable de l'ensemble des autres domaines, et pratiquement indépendant de ceux-ci, dans les limites des dimensions moyennes.

Pour réussir à s'affranchir du contact immédiat de la pratique et à se maintenir, temporairement, sur le plan des abstractions sans toutefois s'égarer dans la fiction, la pensée a besoin d'un contrôle interne. Ce contrôle interne, réalisé par les lois de la logique — élaborées à leur tour par une longue pratique sociale — est parfaitement exprimé dans les conditions du groupe mathématique, notion introduite pour la première fois en psychologie par Jean Piaget. L'auteur a en vue surtout la condition fondamentale du groupe, à savoir que le produit de deux éléments du système doit donner un élément du système, ce qui revient à dire que la succesion des opérations mentales doit se dérouler de telle manière qu'en respectant un certain nombre d'invariants fondamentaux, elle ne dépasse pas les bornes du domaine de lois donné.

Franchir ces limites serait soit s'engager dans un autre domaine de lois d'une aire plus vaste, soit aboutir à une reprise de contact, fondée sur la pratique, avec la réalité matérielle. Ainsi, moins un domaine de lois dépendra d'un autre, mieux il sera possible de maintenir les opérations de connaissance active et d'investigation sur le plan des abstractions, sans risquer de s'égarer dans la fiction, et plus marqué sera le degré de conceptualisation des images utilisées. Tel est en premier lieu le cas des *nombres* qui, exprimant des relations qualitatives à l'état pur — sans contigences avec le contenu matériel, lesquelles impliqueraient des interdépendances diverses —, ont pu constituer un domaine de lois pleinement autonome. Tel est également le cas des relations spatiales lesquelles, jouis-

Scanned with OKEN Scanner

sant d'une autonomie relative très large, trouvent place parmi les disciplines mathématiques. La figure géométrique — à l'origine image directe de formes matérielles se prêtant à une investigation expérimentale — s'est purifiée et conceptualisée, et a fini par devenir un élément composant des opérations logiques. De l'ensemble des connaissances acquises par l'humanité touchant les propriétés des relations spatiales, s'est dégagé à un moment donné le domaine des *formes* comme telles, domaine qui trouve son expression dans le groupe G_s des similitudes de l'espace ; la géométrie euclidienne a délimité son domaine par rapport à ce critère, embrassant ainsi une aire beaucoup plus vaste de propriétés que la métrique élémentaire. Le raisonnement géométrique, bien que recourant à l'image, n'est point grévé par la présence des aspects dimensionnels et, de ce fait, dispose exactement du degré de généralisation exigé par la géométrie euclidienne, géométrie des formes spatiales invariantes. Au point de vue psychologique ce «clivage» entre forme et dimension est possible, du fait que, dans la représentation, la dimension ne se trouve pas impliquée de façon directe, mais lui est ajoutée par la signification de l'image. La particularisation dimensionnelle n'intervient qu'au moment où elle devient indispensable pour reprendre contact avec la réalité matérielle.

★

Partant de ces prémisses théoriques générales, l'auteur s'est proposé de suivre, au cours du développement intellectuel de l'enfant, la constitution de cette modalité particulière d'expression qu'est le *concept figuratif*.

L'étude de l'évolution des connaissances géométriques de l'enfant a déjà été abordée par les psychologues. Ce que l'auteur s'est spécialement attaché à mettre en lumière par ses recherches est le processus de conceptualisation des images spatiales, depuis l'image brute de l'objet concret jusqu'à l'image intuitive purement spatiale, ayant des propriétés conceptuelles, entièrement insérable dans un raisonnement et ne contenant que le pigment sensoriel strictement indispensable pour donner prise à l'action mentale.

Le problème comportait deux aspects fondamentaux :

1° La dissociation mentale des propriétés purement spatiales, de l'ensemble de propriétés matérielles de l'objet concret et leur conversion en abstractions ou images conceptualisées.

Scanned with OKEN Scanner

2° L'évolution des relations entre l'image intuitive et le concept, le processus du fusionnement de l'image et du concept, de la subordination de l'image au concept.

Le premier aspect — celui des relations entre le concret et l'abstrait — concerne avant tout la nature des entités géométriques et la manière dont celle-ci est conçue par l'enfant.

Le second aspect a surtout trait à *l'organisation interne des entités géométriques* en tant que modalités de reflet au point de vue des relations concept-image.

Il y a évidemment interdépendance étroite entre ces deux aspects, qui néanmoins demeurent distincts, comme l'attestent les résultats de l'expérimentation.

Dans son travail, l'auteur a pris pour point de départ quelques notions géométriques simples, dont l'étude conduit aux deux problèmes précédemment énoncés. Il s'est occupé en premier lieu du *point* et de la *ligne droite,* notions géométriques élémentaires particulièrement propres à mettre en lumière aussi bien l'opposition concret-abstrait que la relation intuitif-conceptuel.

Il s'est ensuite occupé des notions de *distance, de lieu géométrique* (la médiatrice du segment de droite) et du *système de références,* propres à mettre en évidence notamment les relations entre le facteur *intuitif* et le facteur *conceptuel,* étant donné qu'il s'agit non pas de l'étude d'entités géométriques comme telles, mais de procédés d'orientation active dans le champ spatial.

Pour ce qui est du point et de la droite, le problème a été abordé sous des angles divers, de manière à permettre une confrontation entre *l'utilisation* des concepts et des images respectifs dans différents contextes logiques-intuitifs d'une part, et la *définition* de ces mêmes entités d'autre part.

Touchant les trois derniers problèmes, l'auteur a fait une confrontation des procédés pratiques de résolution et de l'explicitation sur le plan logique-verbal des moyens utilisés.

EVOLUTION DES RELATIONS ENTRE LE CONCRET ET L'ABSTRAIT DANS LA FORMATION DES CONCEPTS FIGURATIFS

En ce qui concerne l'interprétation de la nature de la figure géométrique, il est possible de dégager trois tendances principales : a) substantialiste, b) graphique, c) abstraite.

a) Dans la première de ces interprétations la figure géométrique n'existe qu'en tant qu'objet matériel : le point est un objet minuscule ayant une forme, des dimensions et même un poids. La ligne droite est un câble parfaitement tendu, une barre rigide, un fil, etc. L'intersection de quatre droites forme un point plus gros et plus «pesant» que celle de deux droites. En transformant une droite en ligne brisée on risque de la voir se rompre au cas où elle n'est pas assez flexible.

b) La seconde interprétation, d'ordre graphique, se trouve à mi-chemin entre l'interprétation, matérielle et l'interprétation abstraite. La figure géométrique est un *dessin,* une construction graphique (il s'agit de figures planes). Comme telle, elle est bidimensionnelle, ce qui représente évidenmment un progrès vers l'abstraction. Dans cette acception, le point a une forme et des dimensions mais cesse d'avoir un poids. La ligne droite ne se rompt pas en se transformant en ligne brisée, du fait qu'elle ne saurait «sortir du dessin» ni se «détacher de la feuille de papier». Dans cette acception la figure géométrique est le résultat de l'action du sujet, et ses qualités sont fonction de celles de l'action : «la droite ne se rompt pas, étant tracée à la main», «la droite est une ligne que l'on tire tout droit».

c) La troisième interprétation, proprement géométrique, est celle qui considère les entités géométriques comme des abstractions, et pour laquelle le modèle matériel et le dessin ne sont que des modalités de concrétisation de ces abstractions.

Ces interprétations concordent en partie avec celles de Deschamps et Michaud (1947, 1949, 1951), la principale différence étant que l'auteur de la présente étude insiste sur le fait que ce sont des modalités de reflet de la réalité, des degrés d'abstraction aboutissant à des formes de connaissance de plus en plus rigoureuses et générales.

Une autre différence — en laissant de côté la terminologie employée — concerne le groupe d'interprétations que Deschamps et Michaud nomment *pragmatiques* et que l'auteur de la présente étude désigne sous le terme de *graphiques*. Quelques sujets se préoccupent en effet de l'acte de construction de la figure, mais les particularités de celle-ci sont surtout fonction des propriétés de *l'espace graphique*. C'est là, selon l'auteur, une caratéristique d'ordre général, l'acte de construction de la figure géométrique pouvant entrer en ligne de compte dans les trois interprétations.

Scanned with OKEN Scanner

Les recherches de l'auteur attestent que les trois modalités d'interprétation ne se succèdent pas par simple substitution de l'une à l'autre. Une première constatation importante est celle que dans leur évolution générale nous n'avons pas affaire à un progrès continu, allant de l'interprétation substantialiste à l'interprétation abstraite, mais à une suite d'oscillations qui font alterner les phases de progrès avec des phases régressives (sous le rapport de l'abstraction). En certains cas, notamment au passage de la 4e à la 5e classe, on constate chez les élèves un accroissement de la fréquence, en même temps que des réponses «substantialistes» et «abstraites», l'accroissement des premières étant plus marqué [1]. Ces oscillations ne sont pas toujours synchrones pour les divers aspects des figures géométriques.

On y décèle les moments essentiels suivants : prédominance de l'interprétation substantialiste en 2e classe, dispersion des formes d'interprétation en 3e classe, prédominance de l'interprétation graphique en 4e classe, retour à l'interprétation substantialiste en 5e classe, prédominance de l'interprétation abstraite en 6e classe. Par-delà ces oscillations il est possible de discerner certaines tendances particulières touchant la constitution des différentes entités géométriques.

Ainsi quant au point, la première propriété matérielle dont s'affranchit l'enfant est le *poids ;* vient ensuite la *grandeur* (conçue à deux dimensions) et en dernier lieu seulement la *forme.*

Comment explique-t-on ces alternances et discordances ?

L'analyse des réponses fournies par les enfants révèle qu'en fait nous nous trouvons en présence de deux facteurs essentiels en conflit. Le premier de ces facteurs est le développement intellectuel de l'enfant.

Le développement de la pensée chez l'enfant est généralement considéré comme allant du concret à l'abstrait. Une distinction s'impose néanmoins, que l'auteur juge extrêmement importante, entre les abstractions considérées comme moments, comme éléments composants des processus et des procédés de connaissance, et les abstractions constituées en systèmes autonomes plus ou moins étendus, qui forment eux-mêmes, à un moment donné l'objet d'investigations. Une telle distinction est évidemment relative, étant donné qu'en dernier ressort la connaissance doit aboutir à la pratique. Néanmoins, comme il a été

[1] Dans les écoles de Roumanie le cours élémentaire commence par la 1re classe et comprend huit années d'étude.

indiqué précédemment, la connaissance scientifique délimite des domaines de lois, qui, en fonction de leur degré de séparabilité, peuvent être temporairement considérés comme autonomes, l'investigation portant en ce cas uniquement sur les reflets mentaux correspondants, en d'autres termes sur des abstractions. Du point de vue de la psychologie génétique il y a une différence nettement marquée entre les deux fonctions des abstractions.

Pour ce qui est des *moyens* de connaissance mis en œuvre, le processus agit en effet dans le sens du perfectionnement des procédés logiques et des abstractions employés.

Mais en ce qui concerne l'orientation de la connaissance, aussi bien sous le rapport des *objectifs* considérés que sous celui des *intérêts*, la tendance majeure est *réaliste-concrète* jusqu'à l'âge de 12—13 ans. L'enfant perfectionne ses moyens intellectuels (et implicitement les abstractions utilisées par lui), *en tendant vers une connaissance plus complète, plus riche, plus concrète, plus objective, des objets dans leur réalité tangible.* Les difficultés apparaissent au moment où les abstractions abandonnent leur rôle de chaînons du processus d'investigation pour s'offrir à nous comme objets autonomes de connaisance, constitués en systèmes plus ou moins complexes.

Lorsque les opérations avec ces abstractions peuvent être organisées en *algorithmes* stables — comme cela se produit dans le calcul arithmétique ou algébrique —, la difficulté se trouve éludée jusqu'à un certain point. Mais si les algorithmes ne peuvent jouer qu'un rôle réduit, si l'enfant est appelé à réaliser des constructions plus ou moins indépendantes dans un système d'abstractions, le problème devient particulièrement ardu.

Entre la direction principale vers laquelle est orienté le progrès des connaissances de l'enfant d'une part et les exigences de ces domaines de connaissance d'autre part, on voit se produire un conflit qu'il est assez malaisé de résoudre.

Tel est notamment le cas pour la géométrie. La géométrie oblige l'enfant d'opérer au moyen d'entités abstraites, d'en rechercher les propriétés ou d'appliquer des propriétés déjà connues à de nouvelles combinaisons. Le fait que ces entités sont figurées par des images, loin de simplifier les choses, les complique au contraire considérablement.

Cette opposition, qui échappe souvent au contrôle du professeur, engendre nombre de formations mentales hybrides — *phénomènes de symbiose mentale entre motivations de sens contraire, superpositions et interférences de significations, etc.* —

Scanned with OKEN Scanner

qui troublent l'activité intellectuelle de l'enfant, entravant l'assimilation des connaissances géométriques.

Il ne s'agit pas ici d'un oubli, les recherches de l'auteur n'ayant pas porté sur des connaissances assimilées en classe. Les questions posées aux élèves visaient, en effet, un mode d'interprétation de la figure géométrique qu'ils devaient s'assimiler en opérant à l'aide de telles figures.

Si le progrès général de la pensée de l'enfant favorisait également celui des opérations sur des systèmes d'abstractions, les résultats de l'enseignement de la géométrie à une certaine étape des études seraient moins éphémères. Or chez les élèves de 5e classe (et il est bon de rappeler que les questions posées n'étaient pas liées directement aux connaissances proprement scolaires) *on constate une tendance plus marquée vers une interprétation concrète, substantialiste, des figures de géométrie que chez les élèves de 4e classe et même des classes inférieures.* Dans les recherches effectuées par l'auteur, ce phénomène a été constaté notamment dans les réponses aux questions touchant la nature du point géométrique, le nombre de points qui peuvent être situés entre deux repères, la nature de la ligne droite et ses possibilités de prolongement, etc. (v. tableaux 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11).

Nous avons vu que, selon Piaget, la pensée parvenue au niveau des opérations parcourt deux étapes: celle des opérations concrètes (de 7 à 12 ans) et celle des opérations formelles (au-dessus de 12 ans).

L'auteur conteste l'exactitude de cette division, et ceci en premier lieu en raison du fait que le *concret* et le *formel* n'expriment pas, par leur opposition, le même critère de classification, un raisonnement formel étant, en effet, un raisonnement qui ne se rapporte à nul contenu, concret ou abstrait.

Piaget cite le problème suivant qu'un enfant d'environ 8 ans est incapable de résoudre : «Quelques-unes des fleurs de mon bouquet sont jaunes», dit un garçon à ses sœurs. La première répond : «Alors toutes les fleurs, sont jaunes» ; la seconde répond: «Une partie est jaune»; et la troisième: «Aucune». Laquelle a raison ? [1].

Piaget explique la difficulté de l'enfant par le fait qu'on lui demande de se rapporter non pas à une situation réelle, mais

[1] Jean Piaget, *La psychologie de l'intelligence*, Paris, 1947, p. 174.

à une situation imaginaire, la solution étant dépendante de la correction de la structure formelle du raisonnement.

En fait, la difficulté à laquelle se heurte l'enfant est due ici à la complexité du système de relations qui intervient dans le raisonnement. Un enfant est parfaitement apte à raisonner en partant de situations imaginaires, comme il lui arrive fréquemment de le faire en jouant.

Selon l'auteur, l'opposition réelle qui nous intéresse dans le développement de la pensée chez l'enfant concerne le *contenu, l'objet* des opérations de la pensée: *tout en perfectionnant constamment ses procédés logico-abstraits, la pensée de l'enfant demeure orientée vers l'aspect objectif-concret des choses.*

Les relations entre l'intuitif et le conceptuel dans la formation des concepts figuratifs. L'évolution est différente sous ce rapport. Le conceptuel et l'intuitif ne représentent pas deux modalités opposées d'interprétation des propriétés spatiales, susceptibles de conduire à des conclusions différentes selon le point de vue adopté.

Le centre d'un cercle est en principe le même, que nous le découvrions par un examen global, intuitif, de la forme d'ensemble de la figure, ou que nous le déterminions par un procédé de mesure quelconque. Les différences éventuelles sont uniquement dues à des imperfections aisément retouchables et non pas à une différence essentielle entre les deux modalités employées. Il en est de même pour les trois problèmes proposés par l'auteur aux enfants: indiquer le plus court chemin d'un point à une droite; placer un point dans un cadre de références d'après un modèle donné; déterminer le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés.

Ces problèmes présentent entre eux des différences intéressantes au point de vue psychologique, chacun d'eux revêtant des aspects différents dans la constitution des concepts figuratifs. Néanmoins, dans les trois cas la solution n'a pas à osciller entre deux modes d'interprétation radicalement opposés. Ce genre de problèmes a permis à l'auteur de suivre le processus de *l'organisation interne du concept figuratif*, du fusionnement entre le conceptuel et l'intuitif, de la subordination de l'image intuitive, spatiale, aux normes conceptuelles. Le fait essentiel est que *dans ces cas on obtient, d'un âge à l'autre d'une classe à l'autre, des progrès continus, sans oscillations.* Ces progrès sont fonction de l'activité scolaire de l'enfant, de son activité

Scanned with OKEN Scanner

pratique, des influences instructives et éducatives générales auxquelles il est soumis, mais ne dépendent pas de la date plus ou moins récente à laquelle il a acquis ses connaissances de géométrie. Des progrès du même ordre ont été constatés au passage de 4e en 5e classe, bien que la géométrie ne soit pas enseignée dans cette dernière classe. Les tableaux contenus dans l'ouvrage (v. tableaux 13, 17 et 18) indiquent le progrès continu (à partir de la 3e classe) que marquent les réponses des élèves aux problèmes posés: le plus court chemin d'un point à une droite, le système des coordonnées, la médiatrice du segment.

Les résultats obtenus par l'auteur concordent dans leurs grandes lignes avec ceux de Piaget, touchant le lieu géométrique (médiatrice) et le système de coordonnées rectangulaires (l'auteur s'étaye en plus sur des données statistiques).

Ainsi, pour le premier de ces deux problèmes, l'auteur a constaté les phases suivantes:

1° Assimilation de la notion d'équidistance concernant le point singulier.

2° Possibilité de découvrir plusieurs points remplissant les conditions prescrites.

3° Généralisation de la règle permettant de trouver les points respectifs en découvrant le procédé d'alignement.

4° Le sujet prend conscience du fait qu'en dehors de cette série de points aucun autre point ne remplit les conditions nécessaires.

5° Idée proprement dite du lieu géométrique (droite abstraite en tant qu'ensemble des points remplissant les conditions nécessaires).

Dans les résultats notés par Piaget, les phases 3, 4, 5 empiètent quelque peu les unes sur les autres, tendant à se confondre.

Voici maintenant les étapes trouvées par l'auteur touchant le système des coordonnées :

1° Une phase primaire, comportant une solution intuitive, globale sans la possibilité d'explicitation des coordonnées.

2° Détermination d'une relation entre deux points, symbolisés par un segment de droite les unissant.

3° Détermination d'une seule coordonnée (notamment chez les élèves de 5e classe, âgés de 11 à 12 ans).

4° Détermination de deux coordonnées, notamment en 6e classe (12 à 13 ans). Entre la 3e et la 4e étape on constate des formes de transition consistant en la représentation de 3 ou

4 segments, révélant l'influence du cadre figuratif, dont le sujet ne s'est pas encore entièrement affranchi.

★

D'une manière générale il est possible d'admettre les degrés suivants d'assimilation des concepts figuratifs, au point de vue des relations entre l'intuitif et le conceptuel:

1° Dans une première étape, prégéométrique, la solution est suggérée par un examen global, intuitif de l'image. Cette voie n'est ni illogique, ni alogique. Il s'agit en fait d'une logique implicite du champ visuel. Le champ spatial considéré est organisé, non amorphe ; il a une structure où ont lieu des confrontations, des analyses, des synthèses, des généralisations, où s'établissent des rapports simples ou multiples, etc. Toutefois, ces opérations logiques — fondées incontestablement sur l'activité du second système de signalisation — ne sont pas exprimées de façon explicite, verbale, mais sont impliquées directement dans la signification des rapports intuitifs, spatiaux.

2° Dans l'étape suivante on voit apparaître des éléments conceptuels explicites, tendant à justifier (parfois correctement, d'autres fois d'une façon erronnée ou insuffisante) la solution proposée. A cette étape c'est encore l'image intuitive, la figure, qui demeure prépondérante. Un enfant qui a trouvé le centre d'un cercle explique l'opération effectuée en traçant (par estimation visuelle) le diamètre dont il détermine le milieu. Un autre enfant, ayant déterminé d'après un modèle la position d'un point dans un cadre de références, expliquera qu'il s'est guidé «d'après les côtés de la figure», ce qui n'est en somme que l'expression verbale d'un examen global du cadre de références, etc.

D'une manière générale on constate ici l'opposition entre la structure intuitive de la figure — complète, équilibrée et cohérente — et les efforts pour en dégager les moyens conceptuels, opération qui, à l'origine, détruit l'équilibre établi. C'est là un conflit dialectique des plus intéressants entre une formation ancienne, plus pauvre en possibilités mais déjà stabilisée, et un procédé nouveau, disposant de moyens beaucoup plus efficaces, mais encore labile et dont l'intervention détruit un équilibre acquis, avant d'avoir pu donner la mesure de ses possibilités.

3° La troisième étape, la plus intéressante au point de vue didactique, est celle des formations conceptuelles figuratives,

Scanned with OKEN Scanner

où la composante conceptuelle a acquis la prépondérance, sans toutefois assurer la stabilité des formations respectives. Ces formations sont dissociables, soumises à des influences diverses, à celle du champ figuratif en premier lieu. Le champ figuratif peut les masquer, les décomposer (comme l'ont montré les recherches d'Iakimanskaia), les faire dévier, ou désorganiser les procédés de résolution.

4° La dernière étape enfin est celle des concepts figuratifs ayant pour caractéristique le plein contrôle exercé par le concept sur la signification de l'image.

Ces différents degrés d'assimilation des concepts figuratifs ne dépendent que partiellement de l'âge de l'enfant. Le niveau auquel parvient le processus de conceptualisation de l'image spatiale (et, implicitement, celui de sa stabilisation) est fonction directe des méthodes d'enseignement de la géométrie.

★

Partant de ces constatations, l'auteur propose l'enseignement de la géométrie par étapes successives, l'objet même de cette discipline étant considéré à des points de vue différents, d'une étape à l'autre.

1. En 2e et 3e classes le professeur s'attachera à former chez les élèves une base ferme, en partant du tangible et de l'intuitif, pour la connaissance des propriétés et des rapports spatiaux. Voici, sommairement ébauchés par l'auteur, quelques éléments d'un tel programme :

Orientation dans l'espace environnant par la perception et la représentation. Capacité de représentation d'un certain nombre de rapports spatiaux (déterminer la place de quelques objets dans l'espace) sous différents points de vue. Evaluation visuelle de quelques distances. Mesurages sur le terrain. Levers de plans (de la classe, de l'école, de la cour d'école, etc.). Etude pratique et description verbale de quelques objets de formes géométriques simples (parallélépipède, cube, pyramide, tronc de pyramide, sphère, cylindre, etc.).

2. En 4e et 5e classes l'élève abordera la *«géométrie graphique»*. Dans cette phase, le dessin tiendra la première place, non point en tant qu'objectivation d'abstractions élaborées, mais comme un échelon pour l'élaboration de ces abstractions. C'est pourquoi il ne sera pas question, dans cette étape, du point «sans dimensions», de lignes «à une seule dimension» ; etc. En général on s'appuyera pour ces notions fondamentales,

Scanned with OKEN Scanner

sur les connaissances empiriques des enfants, sans faire intervenir des définitions proprement dites. Les enfants savent ce qu'est un point et il n'est pas nécessaire qu'ils acquièrent dans cette étape une autre notion que celle du point dessiné. Il en est de même pour la ligne droite (qui sera celle que l'on trace au moyen d'une règle).

Il est nécessaire, selon l'auteur, de commencer par dessiner les objets de forme géométrique indiqués ci-dessus, dans différentes positions, cette transposition plane des volumes effectivement réalisée par l'enfant étant un facteur essentiel du processus d'abstraction. Et comme la chose n'ira pas sans difficultés, l'auteur propose de commencer par faire *dessiner* aux élèves *des éléments déterminés* de l'objet respectif, notamment ses faces dans différentes positions par rapport à l'œil.

Cette première étape franchie, l'élève aborderait l'étude des propriétés de quelques-unes des figures planes qu'il a appris à dessiner : rectangle, carré, triangle, trapèze, cercle, etc. Ces propriétés seront étudiées à la fois de façon déductive et descriptive. (L'élève s'assimilera à cette occasion les notions de parallèles, de droites intersectées, d'angle, etc.). Ainsi les propriétés du rectangle comportent les notions de côtés parallèles, d'angle droit, de diagonales égales, etc. Le calcul des surfaces sera également abordé.

Au cours de cette étude l'attention devra se concentrer sur *la figure dessinée en tant que reproduction simplifiée d'objets réels ou de parties d'objets réels.*

3. A partir de la 6e classe on passera graduellement à l'élaboration des abstractions géométriques proprement dites.

Un premier sous-stade (dont il est difficile de fixer la durée et qui pourra se prolonger pendant toute la 6e classe et même au-delà), préparera cette transition en faisant appel à une série de moyens spécifiques suggérés par le contenu des chapitres.

Le processus d'abstraction est favorisé par les facteurs suivants :

a) L'élève passe du procédé de la description d'une figure donnée à celui de la construction de cette même figure selon des *règles de construction déterminées.* La définition arrive ainsi à précéder, ou en tout cas à contrôler la signification de l'image. De cette manière il est possible d'aboutir graduellement à faire la distinction entre le dessin et la *figure idéale et parfaite* que l'on a en vue.

Scanned with OKEN Scanner

b) Les figures sont soumises à des opérations qui, bien que reproduisant des actions effectives, sont en réalité des actions mentales. Tel est notamment le cas du groupe des déplacements. C'est là selon l'auteur un aspect essentiel, généralement négligé dans l'enseignement de la géométrie. Il n'est pas indispensable d'aborder dès la 6e classe le concept général de groupe, mais il est assez simple — en même temps qu'extrêmement important pour la formation des concepts figuratifs de la géométrie — de s'occuper méthodiquement du groupe des déplacements. Le problème fondamental, ainsi qu'il a été indiqué précédemment, est d'obtenir que l'élève *parvienne à opérer à l'aide d'abstractions géométriques en respectant les limites de ce domaine de lois.* Ceci implique en premier lieu qu'il doit s'assimiler l'idée des *propriétés invariantes des figures* par rapport aux différentes transformations auxquelles elles sont soumises. Dans le cas du groupe de déplacements, l'invariant fondamental est la figure elle-même, avec sa forme et ses dimensions. Compte tenu des résultats des recherches psychologiques, l'auteur considère qu'il est nécessaire *d'insister d'une manière explicite sur cette invariance idéale)* de la figure lorsque celle-ci est soumise à un mouvement de translation ou de rotation. Il convient néanmoins d'aller plus loin; nous inspirant des axiomes du groupe, et pour aboutir à la constitution, au moins implicite, du concept respectif, nous nous attacherons à combiner ces opérations (combinaison qui aura également pour résultat une opération du groupe), nous indiquerons la possibilité de revenir à la situation initiale. Il sera possible ainsi de faire comprendre peu à peu à l'enfant qu'il se trouve dans un *domaine clos d'opérations,* dont il ne lui est pas permis de franchir les limites, et qu'il ne franchira pas s'il respecte les règles.

c) Ces opérations — et, en outre, toutes les autres opérations ayant pour résultat de transformer la figure (sectionnements, etc.) obeissent, elles aussi, à certaines définitions ou règles. Le résultat auquel elles aboutissent n'est pas une simple constatation. Ce résultat s'impose, il est nécessaire. En d'autres termes, les opérations respectives doivent être, elles aussi, soumises à un contrôle conceptuel complet et susceptibles d'être insérées intégralement dans un raisonnement déductif.

Par l'introduction graduelle des figures et des opérations, dans des raisonnements déductifs, ces figures et opérations non

seulement se désubstantialisent, mais encore se «logicisent» sans perdre toutefois leur aspect intuitif-spatial.

d) Comme l'attestent les résultats des recherches entreprises par l'auteur, les enfants s'assimilent graduellement l'idée d'infini en corrélation avec la droite (ce que l'auteur nomme «infini extensif»). Il ne s'agit pas encore de la notion proprement dite de l'infini mathématique. L'infini tel que le conçoit l'enfant est concret et dynamique. La droite infinie est une chose concrète, que l'on construit sans arrêt et sans obstacle. Il s'agit cependant d'une *action virtuelle,* d'une action réalisable uniquement en esprit, selon une règle de construction. C'est pour cette raison que l'assimilation de l'idée de droite infinie (en corrélation avec les propriétés de la droite, avec les droites parallèles, les droites remplissant des fonctions diverses : bissectrices, tangentes, etc.) contribue au processus de conceptualisation de l'image et, par là, à la formation des concepts figuratifs.

e) dans la formation des concepts figuratifs il convient d'accorder un rôle important aux lieux géométriques. L'expérience prouve que les lieux géométriques simples tels que le cercle et la médiatrice peuvent se cristalliser assez tôt en structures concrètes chez l'enfant. Sous l'influence des connaissances de géométrie — en 6e classe — le processus d'abstraction s'amorce. L'importance particulière des lieux géométriques pour la formation des concepts figuratifs consiste en ceci qu'ils explicitent pleinement le fait que l'image géométrique est rigoureusement dépendante d'un concept, d'une règle de construction, la figure n'étant rien autre que la multitude des points ayant la même propriété. La composante figurative et la composante conceptuelle se trouvent ici parfaitement mises en lumière dans leur interdépendance.

f) La confrontation méthodique avec la réalité objective peut devenir un procédé utile pour l'élaboration des concepts figuratifs. Si l'on fournit à l'élève l'occasion d'une confrontation active entre ses dessins et des aspects spatiaux concrets dans le cadre des problèmes qu'il a à résoudre, on facilitera ce processus d'abstraction de la forme spatiale pure et contrôlée conceptuellement.

Ce que l'auteur propose en essence est que, dans cet enseignement étagé, *chaque étape corresponde à un point de vue différent dans la manière d'envisager l'objet même de la géométrie,*

Scanned with OKEN Scanner

tout en ayant soin qu'au cours de chaque étape l'élève soit préparé à aborder le point de vue de l'étape suivante.

Selon l'avis de l'auteur, un tel enseignement par étapes permet d'éviter le choc entre le caractère abstrait de la géométrie et l'orientation réaliste-concrète en plein progrès de la pensée le l'enfant, de prévenir les oscillations et les rechutes déterminées par cette contradiction.

Ce programme est en même temps de nature à favoriser le processus de conceptualisation des images spatiales, de manière à faire de celles-ci des modalités stables de reflet de la réalité objective, modalités pleinement insérables dans un raisonnement déductif et efficientes pour la résolution des problèmes thèoriques et pratiques.

SUMAR

PARTEA I.

Cuvînt înainte		. . . . .	5
Cap.	*I.*	Gîndirea matematică și domeniile de legitate .	7
Cap.	*II.*	Geometria și spațiul obiectiv	26
Cap.	*III.*	Evoluția istorică a ideii de spațiu	34
Cap.	*IV.*	Reflectarea empirică a spațiului	45
Cap.	*V.*	Geometria și raționamentul experimental . .	57
Cap.	*VI.*	Metoda axiomatică și realitatea obiectivă . .	72
Cap.	*VII.*	Conceptele figurale	86
Cap.	*VIII.*	Cu privire la relațiile dintre concepte și imaginile senzoriale în procesul gîndirii . .	95
Cap.	*IX.*	Imaginile — abstracții și conceptele figurale .	116
Cap.	*X.*	Conceptul și conceptul figural	133
Cap.	*XI.*	Forma	146

PARTEA A II-a

Cap.	*XII.*	Cercetări psihologice privitoare la relațiile dintre intuitiv și logic în însușirea cunoștințelor de geometrie	169
Cap.	*XIII.*	Problemele și tehnica cercetărilor noastre .	185
Cap.	*XIV.*	Punctul (I). Natura punctului	192
Cap.	*XV.*	Punctul (II). Numărul punctelor situabile într-un interval dat	244
Cap.	*XVI.*	Punctul (III). Definiția punctului	268
Cap.	*XVII.*	Linia dreaptă (I). Natura liniei drepte . . .	291
Cap.	*XVIII.*	Linia dreaptă (II). Prelungirea liniei drepte . .	315
Cap.	*XIX.*	Linia dreaptă (III). Definiția liniei drepte . .	336
Cap.	*XX.*	Problema perpendicularei	352
Cap.	*XXI.*	Locul geometric (mediatoarea)	389
Cap.	*XXII.*	Coordonatele unui punct în plan	400
Cap.	*XXIII.*	Concluzii	415
Рипдрные концепты. Резюме		. . . . .	439
Lés concepts figuratifs. Résumé		. . . . .	457

Redactor responsabil : ARIADNA OANCEA

Dat la culeș 17.10.1962. Bun de tipar 19.02.1963. Apărut 1963. Tiraj 2100 ex. Hîrtie semivelină de 63 g/m² 610×860/16. Coli editoriale 29,47. Coli de tipar 29,75 A 0012 16/62. C.Z. pentru bibliotecile mari 159.955 :513. C.Z. pentru bibliotecile mici 15 : 513.

Întreprinderea Poligrafică nr. 2, Str. Brezoianu 23—25
București, R.P.R. Comanda nr. 4545

31

Scanned with OKEN Scanner

E R A T Ă

Pagina	Rîndul	În loc de :	Se va citi :	Din vina :
41	27 de sus	creşterea	crearea	autorului
50	22 ,, ,,	A n t o n e	A n d o n e	,,
51	7 ,, ,,	R u s a	R u g a	,,
112	17 ,, ,,	regresiune	transgresiune	,,
143	12 de jos	trei	patru	,,
184	13 de sus	0,5 C	0,5 l	,,
190	8 ,, ,,	под водного	водного	,,
208	20–21 ,,	sulfaţi	cloruri	,,
208	21 de ,,	687	94,54	,,
221	15 ,, ,,	cantitativă	calitativă	,,
226	4 de jos	cladocere	copepode	,,
226	3 ,, ,,	copepode	cladocere	,,
522	7 ,, ,,	mutate	notate	,,
540	7 de sus	determinate	dominate	,,

Scanned with OKEN Scanner